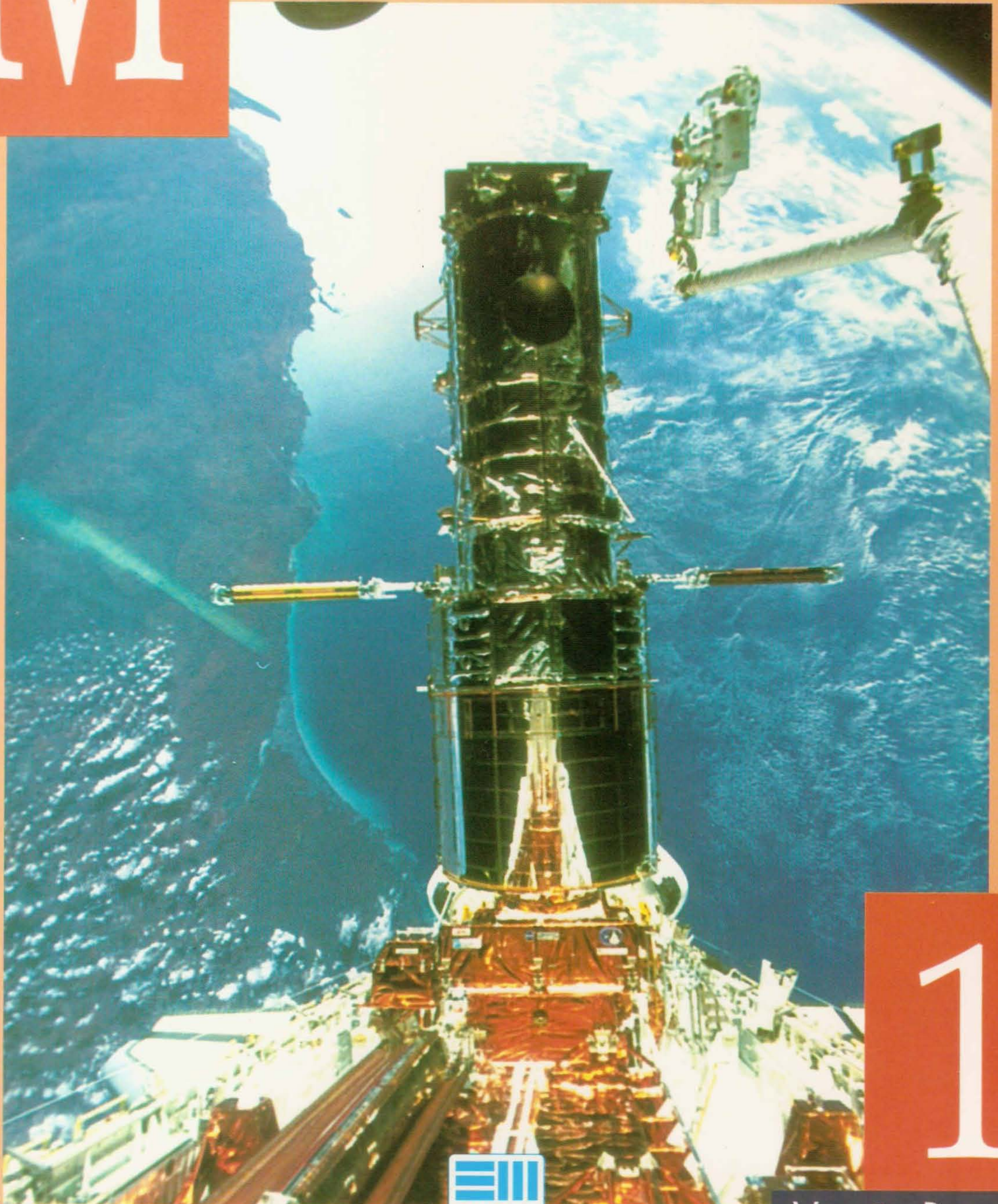
Matemática

Edwaldo BIANCHINI e Herval PACCOLA



1

Versão Beta

Apresentação

É com enorme satisfação que trazemos aos colegas de magistério e estudantes esta nova edição de *Matemática* para o 2º grau.

Mantivemos aqui o compromisso de tornar mais agradáveis e produtivos tanto o ensino como o aprendizado, meta essa também presente na edição anterior.

Você pode estar questionando a necessidade desta reedição. Simples: o mundo à nossa volta torna-se a cada dia mais e mais dinâmico. Dessa forma, por mais atualizado e ajustado que um livro seja, em determinado momento, ele pode estar subestimando assuntos que mereçam uma abordagem mais aprofundada.

Assim, acompanhando a moderna tendência do ensino de estreitar a relação aprendizado/cotidiano, procuramos trabalhar os conceitos de forma criativa e motivadora, privilegiando sua aplicação em problemas que estimulem o interesse do aluno. Também nos exemplos resolvidos e nos "Exercícios propostos", sempre que possível, procuramos trabalhar com situações retiradas da realidade do estudante.

A respeito dos temas estudados, destacamos a inclusão de um capítulo sobre Matemática Financeira, no volume 1, e outro sobre Estatística, no volume 3. Foram acrescentados em vista de sua importância no mundo moderno e também em função do elevado número de questões sobre esses assuntos nos últimos vestibulares.

Uma outra novidade desta reedição é o "Túnel do tempo", uma seção que, como o próprio nome sugere, leva o aluno a relacionar o tema em estudo com o momento histórico em que foi desenvolvido.

No final de cada capítulo, antes dos "Exercícios complementares" e dos "Testes", um resumo do assunto estudado auxilia o aluno na resolução das atividades.

Procuramos também aliar linguagem comunicativa, metodologia e rigor conceitual, com vistas a atender às necessidades do estudante, tanto na qualidade de cidadão como na de futuro vestibulando.

Temos perfeita consciência de que nenhum livro substitui o trabalho do professor. Mas acreditamos que, ao proporcionar uma sólida base conceitual e didática ao estudante, estamos dando a nossa contribuição no sentido de auxiliar o mestre em sua tarefa de ensinar e formar pessoas.

Atendendo a solicitações recebidas de diversas partes do país, este trabalho está sendo apresentado em duas versões. Na versão Alfa, as progressões aritméticas e geométricas são estudadas no volume 1, e a trigonometria é vista no volume 2. Na versão Beta, essa ordem se inverte.

Finalmente, queremos registrar aqui nossos sinceros agradecimentos a todos os professores que, no decorrer desses anos, nos enviaram seu incentivo na forma de críticas e sugestões. Esperamos continuar merecendo a mesma acolhida nesta nova edição e, para tanto, contamos com o seu apoio – é ele que, afinal, torna o nosso trabalho mais adequado e eficiente.

Os Autores

Sumário

Capítulo 6 – FUNÇÃO MODULAR

Capítulo 7 – FUNÇÃO EXPONENCIAL

Capítulo 8 – LOGARITMOS

Capítulo 9 – CÁLCULO E APLICAÇÕES DOS LOGARITMOS DECIMAIS

Capítulo 10 – NOÇÕES SOBRE MATEMÁTICA FINANCEIRA

Capítulo 11 – TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Capítulo 12 – TRIGONOMETRIA – ARCOS E ÂNGULOS

Capítulo 13 – FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Capítulo 14 – FÓRMULAS DE TRANSFORMAÇÃO

Capítulo 15 – EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Capítulo 1

Conjuntos

1. Primeiras noções

As primeiras noções sobre conjuntos você as adquiriu no curso de 1º grau. Vamos revê-las e ampliar esses conhecimentos introduzindo novos símbolos, úteis não somente no estudo da matemática como também em outras áreas.

Recordemos que se entende por **conjunto** qualquer coleção de objetos.

Esses objetos podem ser de qualquer natureza. Podemos falar em conjunto de casas, de alunos, de logotipos, de figuras geométricas, de números etc.

O quadro abaixo mostra um conjunto de logotipos de algumas emissoras de televisão de São Paulo.



Um conjunto geralmente é indicado por uma letra maiúscula do alfabeto.

Os objetos que compõem um conjunto são chamados **elementos**.

Assim, por exemplo, chamando de L o conjunto dos logotipos acima, temos que cada um deles é elemento de L.

Indica-se que um elemento x **pertence** a um conjunto A escrevendo-se:

$x \in A$ (lê-se: x pertence a A)

Se x **não pertence** ao conjunto A, "cortamos" o símbolo com um traço, escrevendo:

$x \notin A$ (lê-se: x não pertence a A)

Esse tipo de indicação é utilizado em muitas outras situações. Você pode verificar isso no conjunto a seguir, onde os sinais são cortados, indicando proibição.



Proibido fumar.



Proibida a presença de cachorros.



Proibido jogar latas e garrafas.



Proibido fazer fogueira.

2. Representação de conjuntos

Existem várias maneiras de se representar um conjunto. Uma delas é indicar todos os seus elementos entre chaves. Vamos, como exemplo, representar os seguintes conjuntos:

a) O conjunto A formado pelos algarismos pares do numeral 6 280 (extensão aproximada, em quilômetros, do Rio Amazonas).

Temos: $A = \{0, 2, 6, 8\}$



Rio Amazonas.

b) O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Como se trata de um conjunto infinito, não é possível enumerar todos os seus elementos. Escrevemos, então, apenas os primeiros elementos, seguidos de reticências:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

c) O conjunto B dos números naturais ímpares menores que 100. Como são muitos os elementos do conjunto B, por comodidade escrevemos os primeiros elementos, seguidos de reticências, e finalmente os últimos elementos. Assim:

$$B = \{1, 3, 5, 7, \ldots, 97, 99\}$$

d) O conjunto T dos números que expressam as medidas dos lados do triângulo EDU, sendo $ED = 15{,}2$ cm, $EU = 16{,}4$ cm e $DU = 10{,}8$ cm:

$$T = \{15{,}2; 16{,}4; 10{,}8\}$$

e) O conjunto H dos algarismos do numeral 149 597 870 (distância média, em quilômetros, entre o centro da Terra e o centro do Sol). Na representação de um conjunto não repetimos os elementos. Assim, o conjunto H tem exatamente sete elementos. Observe:

$$H = \{0, 1, 4, 5, 7, 8, 9\}$$

Uma outra maneira de se representar um conjunto é indicar entre chaves uma propriedade que caracteriza seus elementos. Vamos considerar o conjunto:

$$A = \{\text{janeiro, junho, julho}\}$$

Observe que todos os elementos desse conjunto são meses do ano e seus nomes começam pela letra *j*. Essa é uma propriedade característica dos elementos desse conjunto. Podemos, então, escrever:

$$A = \{x \mid x \text{ é mês do ano cujo nome começa pela letra } j\}$$

(Lê-se A é o conjunto de todo x, tal que x é mês do ano cujo nome começa pela letra j.)

Veja outros exemplos:

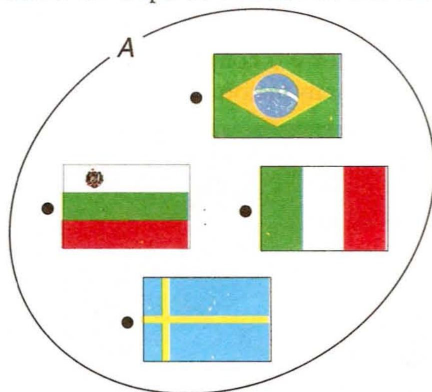
a) $B = \{0, 5, 10, 15, 20, \ldots\}$
$B = \{x \mid x \text{ é número natural múltiplo de } 5\}$

b) $M = \{m, a, t, e, i, c\}$
$M = \{x \mid x \text{ é letra da palavra } \textit{matemática}\}$

Podemos ainda representar um conjunto utilizando o diagrama de Venn, que consiste em colocar os elementos no interior de uma curva fechada simples. Como exemplo vamos representar o conjunto

$$A = \{\ ,\ ,\ ,\ \},$$

das bandeiras dos países finalistas da Copa do Mundo de Futebol, de 1994:



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

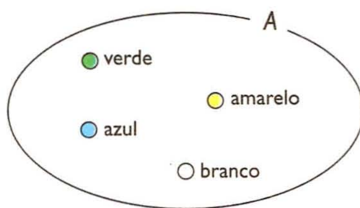
1. Os conjuntos a seguir estão representados por uma propriedade característica de seus elementos. Escreva-os indicando esses elementos.

a) $A = \{x \mid x$ é um número natural menor que 10$\}$.
b) $B = \{x \mid x$ é um número ímpar maior que 5$\}$.
c) $C = \{x \mid x$ é número múltiplo de 3, maior que 10 e menor que 100$\}$.
d) $D = \{x \mid x$ é número natural e $3x^2 - 7x + 2 = 0\}$.

2. Agora temos o inverso. Os conjuntos estão escritos com seus elementos indicados. Escreva-os indicando uma propriedade característica de seus elementos.

a) $A = \{1, 3, 5, \ldots\}$
b) $B = \{$segunda-feira, sexta-feira, sábado$\}$
c) $C = \{0, 4, 8, 12, \ldots, 60\}$
d) $D = \{10, 15, 20, 25, 30\}$

3. Represente o conjunto por uma propriedade que caracteriza seus elementos.



4. Indica-se o número de elementos de um conjunto A por $n(A)$. Assim, dados os conjuntos abaixo, determine $n(A)$, $n(B)$ e $n(C)$.

a) $A = \{x \mid x$ é número natural e $x^2 - 12x + 35 = 0\}$.
b) $B = \{x \mid x$ é letra da palavra *Recife*$\}$.
c) $C = \{0, 3, 6, 9, \ldots, 120\}$

5. Dados os conjuntos $A = \{0, 2, 4, 6\}$ e $B = \{x \mid x^2 - 11x + 18 = 0\}$, use o símbolo $\in$ ou $\notin$ para relacionar:

a) 0 e A b) 0 e B c) 2 e A d) 2 e B e) 9 e A f) 4 e B

3. Conjuntos unitários e conjunto vazio

A idéia de conjunto em matemática tem um sentido mais amplo do que aquele que normalmente é sugerido pela própria palavra. Assim é que admitiremos conjuntos com um só elemento, chamados **conjuntos unitários**, e conjunto sem elementos, chamado **conjunto vazio**. O conjunto vazio é representado por $\varnothing$ ou { }.

Veja os exemplos:

a) O conjunto do mamífero voador é o conjunto unitário {morcego}.

b) O conjunto dos números naturais maiores que 2 e menores que 3 é o conjunto $\varnothing$.



O morcego é o único mamífero voador.

EXERCÍCIO PROPOSTO

6. Classifique cada conjunto como unitário ou vazio.

a) $A = \{x \mid x$ é natural e $2x = 5\}$.
b) $B = \{x \mid x$ é natural e $2x = 6\}$.
c) $C = \{x \mid x$ é natural e $0x = 6\}$.
d) $D = \{x \mid x$ é natural par e primo$\}$.

4. Conjuntos iguais

Dois ou mais conjuntos são **iguais** quando possuem os **mesmos elementos**.

Assim, se A é o conjunto das letras da palavra "arte": $A = \{a, r, t, e\}$ e B é o conjunto das letras da palavras "reta": $B = \{r, e, t, a\}$, temos $A = B$, pois os conjuntos possuem os mesmos elementos, não importando a ordem em que foram escritos. Se A não fosse igual a B, escreveríamos $A \neq B$ (lê-se: A é diferente de B).

EXERCÍCIO PROPOSTO

7. Verifique se $A = B$ ou $A \neq B$, nos seguintes casos:

a) $A = \{x \mid x$ é letra da palavra *amora*$\}$ e $B = \{x \mid x$ é letra da palavra *roma*$\}$.
b) $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{x \mid x$ é número natural menor que $4\}$.
c) $A = \{2, 5\}$ e $B = \{x \mid x^2 - 8x + 12 = 0\}$.

5. Conjunto universo

O conjunto que tem todos os elementos com os quais se deseja trabalhar chama-se **conjunto universo**. Geralmente, um conjunto universo é representado pela letra U.

Consideremos a pergunta: Quais são os números menores que 5? A resposta irá depender do conjunto universo com que se estiver trabalhando. Vejamos:

- Se o conjunto universo for o conjunto dos números naturais, teremos como resposta os números 0, 1, 2, 3 e 4. Também podemos indicar a resposta por $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, em que S é chamado **conjunto solução**.
- Se o conjunto universo for o conjunto dos números naturais pares, teremos como conjunto solução $S = \{0, 2, 4\}$.
- Se o conjunto universo for o conjunto dos números inteiros, teremos:

$$S = \{..., -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

8. Considerando $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ como conjunto universo, determine o conjunto solução de:

a) $\{x \in U | 2 < x < 7\}$
b) $\{x \in U | x + 3 = 8\}$
c) $\{x \in U | x + 1 = 10\}$
d) $\{x \in U | x^2 - 9x + 14 = 0\}$

9. Dê o conjunto solução da equação $2x^2 + 5x - 3 = 0$ nos seguintes casos:

a) $U = \mathbb{N}$
b) $U = \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, 1, \frac{1}{2}, 3\right\}$
c) $U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
d) $U = \left\{-3, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 3\right\}$

6. Alguns símbolos da linguagem dos conjuntos

Para darmos continuidade aos nossos estudos, vamos introduzir alguns símbolos que irão facilitar nossa linguagem, tornando-a mais precisa.

Implicação e equivalência

Quando, a partir de uma afirmação p, concluímos uma outra afirmação q, dizemos que ***p* implica *q*** e escrevemos $p \Rightarrow q$ (lê-se: p implica q ou se p então q).

Exemplos

a) José é pernambucano ⇒ José é brasileiro
(*p*) (*q*)

(Lê-se: se José é pernambucano, então José é brasileiro, ou José é pernambucano implica que José é brasileiro.)

b) $x = 5 \Rightarrow x^2 = 25$
(*p*) (*q*)

c) x é número par ⇒ x é múltiplo de 2
(*p*) (*q*)

d) $x + 2 = 8 \Rightarrow x = 8 - 2$
(*p*) (*q*)



Observe nos exemplos *c* e *d* que também a partir de *q* podemos concluir *p*:

$$x \text{ é múltiplo de } 2 \Rightarrow x \text{ é número par}$$

$$x = 8 - 2 \Rightarrow x + 2 = 8$$

Nesses casos, dizemos que *p* e *q* são equivalentes e escrevemos $p \Leftrightarrow q$ (lê-se: *p* é equivalente a *q*):

x é número par $\Leftrightarrow$ x é múltiplo de 2, ou seja, x é número par se e somente se x é múltiplo de 2.

$$x + 2 = 8 \Leftrightarrow x = 8 - 2$$

> Se $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$, então $p \Leftrightarrow q$

No exemplo *a*, de José é brasileiro, não podemos concluir que José é pernambucano (ele poderia ser catarinense, carioca, paulista etc.). José é brasileiro $\not\Rightarrow$ José é pernambucano (o símbolo $\not\Rightarrow$ lê-se: não implica).

No exemplo *b*, de $x^2 = 25$, não podemos concluir que $x = 5$ (x poderia ser -5), pois $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$. Portanto: $x^2 = 25 \not\Rightarrow x = 5$.

Qualquer que seja (∀)

Vamos resolver a equação $2(3x - 1) = 6(x + 1) - 8$ no universo $U = \{0, 1, 2, 3\}$. Temos:

$2(3x - 1) = 6(x + 1) - 8 \Rightarrow 6x - 2 = 6x + 6 - 8 \Rightarrow 6x - 6x = 6 - 8 + 2 \Rightarrow 0x = 0$.

Observe que a igualdade $0x = 0$ se verifica para qualquer que seja x pertencente a U. Representando a expressão **qualquer que seja *x*** por $\forall x$ (lê-se: qualquer que seja x ou para todo x), podemos escrever:

$$\forall x \in U \Rightarrow 0x = 0$$

A solução da equação proposta é o próprio conjunto universo, isto é: $S = U$.

Existe ao menos um (∃)

Considere o conjunto $A \neq \varnothing$. Sendo $A \neq \varnothing$, então existe ao menos um x, tal que $x \in A$. Representando a expressão **existe ao menos um *x*** por $\exists x$, podemos escrever:

$$A \neq \varnothing \Rightarrow \exists x \mid x \in A$$

O símbolo $\nexists x$ lê-se: não existe x algum.

Exemplos

a) Se $A = \varnothing$, então $\nexists x \mid x \in A$.
b) $\nexists x \in \mathbb{N} \mid 2x = 3$

Existe um único (∃|)

Considerando o conjunto universo $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, existe um único valor de x que verifica a sentença $2 < x < 4$. Representando a expressão **existe um único valor de *x*** por $\exists | x$, podemos escrever:

$$\exists | x \in U \mid 2 < x < 4$$

Exemplos

a) Se A é conjunto unitário, então $\exists | x \mid x \in A$.
b) $\exists | x \in \mathbb{N} \mid x - 1 = 2$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

10. Sendo $U = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, identifique as sentenças como verdadeiras (V) ou falsas (F).

a) $x = -4 \Rightarrow x^2 = 16$
b) $x = 4 \Rightarrow x^2 = 16$
c) $x^2 = 16 \Rightarrow x = -4$
d) $x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$
e) $x^2 = 16 \Leftrightarrow x = -4$ ou $x = 4$
f) $\exists x \in U \mid 2x = 5$
g) $\exists | x \in U \mid 3x = -12$
h) $\forall x \in U \Rightarrow 0x = 0$

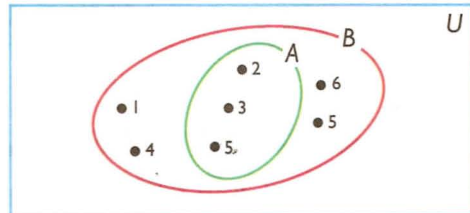
11. Considerando o conjunto $A = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$, identifique as sentenças verdadeiras.

a) $\forall x \in A \Rightarrow x$ é número ímpar
b) $\exists | x \in A \mid x$ é par
c) $\exists x \in A \mid x$ é divisor de 9
d) $\nexists x \in A \mid x > 10$

7. Subconjuntos

Considere os conjuntos $A = \{2, 3, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Observe que todo elemento de A é também elemento de B. Nessas condições dizemos que A é **subconjunto** de B ou que A **está contido** em B e escrevemos $A \subset B$. Podemos também dizer que B **contém** A e escrevemos $B \supset A$.

Essa situação pode ser graficamente representada assim:



Em símbolos, temos: $A \subset B \Leftrightarrow \{\forall x \in A \Rightarrow x \in B\}$

Você, que dentro de pouco tempo, provavelmente, estará preocupado em "tirar" sua Carteira Nacional de Habilitação para dirigir veículos motorizados, necessitará, entre outras coisas, conhecer o conjunto S dos sinais de trânsito.

O conjunto P, dos sinais de trânsito que indicam proibição, mostrado graficamente a seguir, é um subconjunto de S.


Sentido proibido


Proibido virar à esquerda


Proibido virar à direita


Proibido retornar



Proibido estacionar


Proibido parar e estacionar


Proibido ultrapassar


Proibido mudar de faixa de trânsito


Proibido trânsito de veículo de carga


Proibido trânsito de veículos automotores


Proibido trânsito de veículos de tração animal


Proibido trânsito de bicicletas


Proibido trânsito de máquina agrícola


Proibido acionar buzina ou sinal sonoro


Proibido trânsito de pedestres

Vejamos outros exemplos:

a) Dados $A = \{3, 6, 9\}$ e $B = \mathbb{N}$, temos que: $A \subset B$, pois todo elemento de A é também elemento de B.

b) Sendo $A = \{x | x \text{ é animal mamífero}\}$ e $B = \{\text{cão, baleia}\}$, temos que: $A \supset B$, pois todo elemento de B é também elemento de A.

c) $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$

d) $\{2\} \subset \{2\}$

Se **A não está contido em B**, escreve-se: $A \not\subset B$. Para se ter $A \not\subset B$ é necessário que exista pelo menos um elemento que pertença a A e não pertença a B. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 3, 4, 5\}$. Temos: $A \not\subset B$, pois $2 \in A$ e $2 \notin B$.

Observações

1. Todo conjunto é subconjunto de si mesmo.

$$\forall A \Rightarrow A \subset A$$

2. O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

$$\forall A \Rightarrow \varnothing \subset A$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

12. Dados os conjuntos $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{2, 4\}$, identifique as sentenças verdadeiras.

a) $A \subset B$ b) $A \subset C$ c) $C \subset B$ d) $B \supset C$

13. Determine os conjuntos X que satisfazem a condição $\{2, 3\} \subset X \subset \{2, 3, 4, 5\}$.

14. Dados os conjuntos A e B, com $A \neq B$ e $A \subset B$, identifique as sentenças falsas.

a) $x \in B \Rightarrow x \in A$
b) $x \in B \Rightarrow x \notin A$
c) $x \notin B \Rightarrow x \notin A$
d) $x \in A \Rightarrow x \in B$
e) $x \in A \Rightarrow x \notin B$

15. Identifique as sentenças verdadeiras em relação aos conjuntos A, B e C.

a) Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$.
b) $\forall B \Rightarrow \varnothing \subset B$.
c) Se $C \subset A$ e $A \subset B$, então $C \subset B$.
d) Se $x \notin A$ e $x \in B$, então $A \subset B$.

Conjuntos cujos elementos são conjuntos

Os elementos de um conjunto podem também ser conjuntos. Considere, por exemplo, o conjunto M cujos elementos são: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$, e $\{c, d\}$. Temos:

$$M = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}\}$$

Nesse caso, dizemos que:

$$\{a\} \in M \quad \text{e não } \{a\} \subset M$$

O mesmo acontece com os outros elementos de M:

$$\{b\} \in M, \{a, b\} \in M, \{c, d\} \in M$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

16. Dado o conjunto $A = \{\varnothing, \{1\}, \{5\}, \{1, 5\}\}$, identifique as sentenças verdadeiras.

a) $\varnothing \in A$
b) $\{\varnothing, 1, 5\} \in A$
c) $\{\varnothing\} \subset A$
d) $\{1\} \in A$
e) $1 \in A$
f) $\{1\} \subset A$
g) $\{\{1\}\} \subset A$
h) $\{5\} \in A$
i) $5 \in A$
j) $\{1, 5\} \in A$
l) $\{\{1, 5\}\} \subset A$
m) $\{\varnothing, \{1\}, \{5\}\} \subset A$

Conjunto das partes de um conjunto

Considere, por exemplo, o conjunto $A = \{a, b\}$. Vamos escrever os subconjuntos de A:

- com um elemento: $\{a\}, \{b\}$;
- com dois elementos: $\{a, b\}$.

O conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos de A é chamado **conjunto das partes de A** e é geralmente indicado por $\boldsymbol{P(A)}$ (lê-se: P de A).

Lembrando que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto, temos:

$$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

Considerando agora, por exemplo, o conjunto $B = \{m, n, p\}$, vamos determinar $P(B)$. Para isso, escreveremos os subconjuntos de B:

- com um elemento: $\{m\}, \{n\}, \{p\}$;
- com dois elementos: $\{m, n\}, \{m, p\}, \{n, p\}$;
- com três elementos: $\{m, n, p\}$.

Como $\varnothing \subset B$, temos:

$$P(B) = \{\varnothing, \{m\}, \{n\}, \{p\}, \{m, n\}, \{m, p\}, \{n, p\}, \{m, n, p\}\}$$

Observe que:

- no primeiro exemplo o conjunto A tem dois elementos e $P(A)$ tem quatro elementos, ou seja, 2^2;
- no segundo exemplo o conjunto B tem três elementos e $P(B)$ tem oito elementos, ou seja, 2^3.

De um modo geral, se um conjunto A tem $\boldsymbol{n}$ elementos, o número de elementos de $P(A)$ é dado por $\boldsymbol{2^n}$.

Assim, por exemplo, se um conjunto C tem quatro elementos, então $P(C)$ terá 2^4 elementos.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

17. Dado o conjunto $A = \{2, 4, 6, 8\}$, escreva todos os subconjuntos de A que tenham:

a) um elemento
b) dois elementos
c) três elementos

18. Dado o conjunto $B = \{1, 3, 4\}$, pede-se:

a) o número de subconjuntos de B com dois elementos.
b) o número de subconjuntos de B.

19. Forme o conjunto das partes do conjunto $B = \{8, 9\}$.

20. Sendo $x = \{0, 2, 5\}$, determine $P(x)$.

21. Escreva o conjunto das partes do conjunto $A = \{p, a, z\}$.

22. Dê o número de elementos de $P(A)$ nos seguintes casos:

a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

b) $A = \{a, m, o, r\}$

c) $A = \{x \mid x \text{ é par e } 4 < x < 10\}$

d) $A = \{x \mid x \text{ é ímpar e } 3 \leqslant x < 18\}$

23. O número de elementos de um conjunto A é dado por 2^n, onde n é o número de elementos de A. Então, se $P(A)$ tem 64 elementos, qual o valor de n?

24. O conjunto das partes do conjunto B tem 512 elementos. Quantos são os elementos de B?

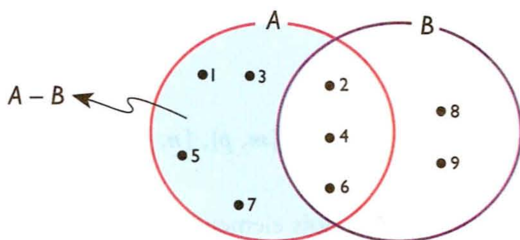
8. Operações com conjuntos

Diferença entre conjuntos

Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8, 9\}$, vamos escrever o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem ao conjunto B. Obtemos assim o conjunto $\{1, 3, 5, 7\}$, chamado **diferença** entre A e B. Indicando a diferença entre A e B por $A - B$ (lê-se: A menos B), temos:

$$A - B = \{1, 3, 5, 7\}$$

Vamos mostrar isso graficamente:



De um modo geral:

Dados dois conjuntos A e B, chama-se **diferença** entre A e B o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B.

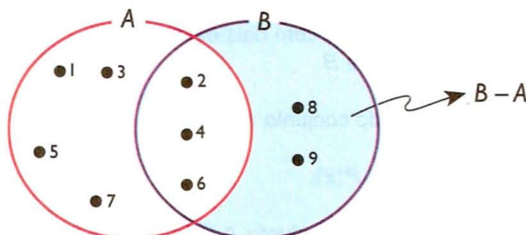
Usando símbolos, definimos a diferença entre dois conjuntos A e B assim:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Voltando aos conjuntos dados, vamos determinar a diferença $B - A$. Os elementos de B que não pertencem ao conjunto A são 8 e 9. Portanto:

$$B - A = \{8, 9\}$$

Graficamente, temos:



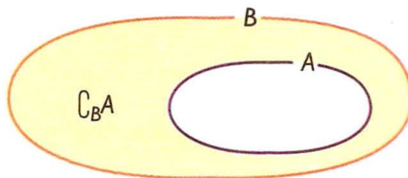
Observações

1. Se A e B são conjuntos tais que $A \subset B$, então a diferença $B - A$ é chamada **complementar de A em B** e indicada por $\complement_B A$ (lê-se: complementar de A em B).

   Em símbolo, temos:

   $$\complement_B A = B - A, \text{ em que } A \subset B$$

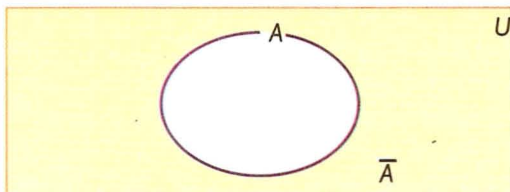
   Graficamente, temos:



   A região colorida representa o complementar de A em B.

2. Em particular, se A é subconjunto do conjunto universo U, o complementar de A em relação a U pode ser representado por A' (lê-se: A linha) ou $\overline{A}$ (lê-se: A barra). Assim:

   $$A' = \overline{A} = \complement_U A = U - A$$



Exemplo

Dados $A = \{a, b, d\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$ e $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, calcular:

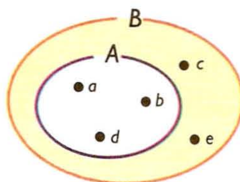
a) $\complement_B A$

b) $\complement_U A = \overline{A}$

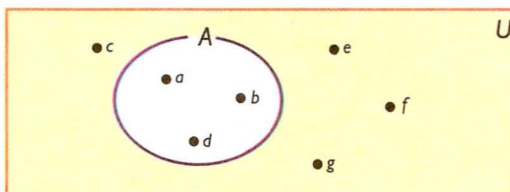
Solução

a) Como $A \subset B$, então a diferença $B - A$ é o complementar de A em relação a B:

$$\complement_B A = B - A = \{c, e\}$$



b) $\complement_U A = \overline{A} = U - A = \{c, e, f, g\}$



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

25. Sendo $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 5, 7\}$ e $C = \{5, 6, 7, 8, 9\}$, determine:

a) $A - B$
b) $A - C$
c) $C - B$
d) $B - A$
e) $C - A$
f) $\complement_A B$

26. Se $B = \{m, n\}$ e $A - B = \{p, q\}$, quais os possíveis elementos de A?

27. Se $B = \{v, i\}$ e $A - B = \{d, a\}$, determine A com o maior número de elementos.

28. Determine x e y, sabendo que $\{2, 4, x, 8\} - \{2, 4, 5\} = \{6, y\}$.

29. Dados $A = \{m, n, p\}$, $B = \{m, n, p, q\}$ e $C = \{m, p\}$, determine:

a) $\complement_B A$
b) $\complement_A C$
c) $\complement_B C$

30. Dados $U = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{1, 3, 5, 7\}$ e $B = \{5, 6, 7, 8\}$, pede-se:

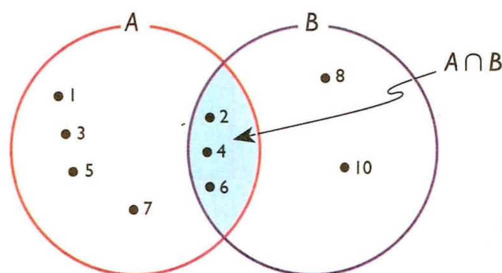
a) $\overline{A}$
b) $\overline{B}$
c) $\overline{A - B}$

Intersecção de conjuntos

Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, vamos escrever o conjunto formado pelos elementos comuns ao conjunto A e ao conjunto B. Obtemos assim o conjunto $\{2, 4, 6\}$, chamado **intersecção** entre A e B. Indicando a intersecção entre os conjuntos A e B por $A \cap B$ (lê-se: A inter B), temos:

$$A \cap B = \{2, 4, 6\}$$

Vejamos isso no gráfico ao lado.



De um modo geral:

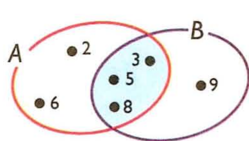
> Dados dois conjuntos A e B, chama-se **intersecção de A com B** o conjunto formado pelos elementos comuns ao conjunto A **e** ao conjunto B. A intersecção entre A e B é indicada por $A \cap B$.

Usando símbolos, podemos definir a intersecção entre os conjuntos A e B assim:

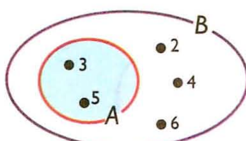
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Na intersecção de A com B, podem ocorrer três casos, conforme nos mostram os exemplos:

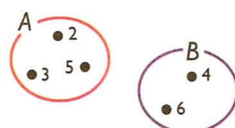
a) $A = \{2, 3, 5, 6, 8\}$
$B = \{3, 5, 8, 9\}$
$A \cap B = \{3, 5, 8\}$



b) $A = \{3, 5\}$
$B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
$A \cap B = \{3, 5\}$



c) $A = \{2, 3, 5\}$
$B = \{4, 6\}$
$A \cap B = \varnothing$



Observação: se $A \cap B = \varnothing$, então os conjuntos A e B são chamados **disjuntos**.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

31. Dados $A = \{1, 3, 4, 5, 7, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 6, 9\}$, $C = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ e $D = \{6, 9, 10\}$, pede-se:

a) $A \cap B$
b) $A \cap C$
c) $B \cap C$
d) $C \cap D$
e) $(B \cap C) \cap D$
f) $A \cap (B \cap C)$

32. Sendo $A = \{4, 6, x, 8\}$, $B = \{1, 2, 7, y, 9\}$ e $A \cap B = \{7, 8\}$, calcule x e y.

33. Sendo $A = \{x \mid x$ é divisor natural de 18$\}$ e $B = \{x \mid x$ é divisor natural de 24$\}$, determine:

a) o conjunto A, indicando seus elementos.
b) o conjunto B, indicando seus elementos.
c) o conjunto $A \cap B$.
d) o m.d.c. (18, 24).

34. Dados $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x$ é múltiplo de 4$\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x$ é múltiplo de 3$\}$, determine:

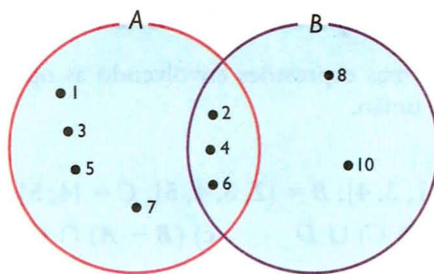
a) o conjunto A, indicando seus elementos.
b) o conjunto B, indicando seus elementos.
c) o conjunto $A \cap B$.
d) o menor múltiplo comum de 4 e 3.

Reunião de conjuntos

Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, vamos escrever o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A **ou** a B. Obtemos assim o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$, chamado **reunião** ou **união** de A com B. Indicando a união entre os conjuntos A e B por $A \cup B$ (lê-se: A união B), temos:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$$

Vejamos isso graficamente:



De um modo geral:

> Dados dois conjuntos A e B, chama-se **reunião** ou **união de A com B** o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A **ou** a B. A reunião de A com B é indicada por $A \cup B$.

Usando símbolos, podemos definir a união de A com B assim:

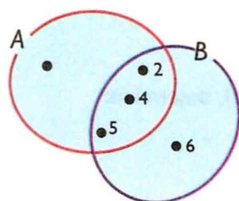
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

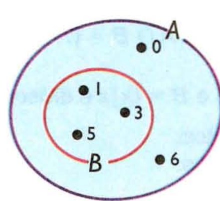
Na união de A com B, podem ocorrer três casos, conforme nos mostram os exemplos:

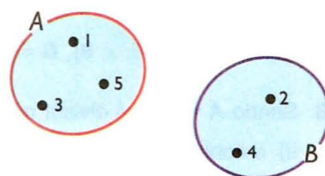
a) $A = \{0, 2, 4, 5\}$
$B = \{2, 4, 5, 6\}$
$A \cup B = \{0, 2, 4, 5, 6\}$

b) $A = \{0, 1, 3, 5, 6\}$
$B = \{1, 3, 5\}$
$A \cup B = \{0, 1, 3, 5, 6\}$

c) $A = \{1, 3, 5\}$
$B = \{2, 4\}$
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$







EXERCÍCIOS PROPOSTOS

35. Sendo $A = \{2, 5, 8\}$, $B = \{3, 4, 5, 7, 8\}$, $C = \{2, 8\}$ e $D = \{5, 7, 8\}$, determine:

a) $A \cup B$
b) $A \cup C$
c) $B \cup D$
d) $A \cup D$
e) $(C \cup D) \cup B$
f) $A \cup (C \cup D)$

36. Dados $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par e menor que } 10\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 8\}$ e $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é divisor de } 12\}$, determine:

a) $A \cup B$
b) $B \cup C$
c) $A \cup C$
d) $(A \cup B) \cup C$

37. Se $x \in A$ e $x \notin B$, identifique as sentenças verdadeiras.

a) $x \in (A \cup B)$
b) $x \in (A \cap B)$
c) $x \in (A - B)$
d) $x \in (B - A)$

38. Sabendo-se que $A \subset B$, identifique a sentença falsa (se achar necessário, construa diagramas).

a) $A \cup B = B$
b) $A \cap B = A$
c) $A - B = \varnothing$
d) $A \cap B = B$

Resolução de expressões que associam operações entre conjuntos

Vamos agora resolver algumas expressões envolvendo as operações estudadas: diferença, complementar, intersecção e união.

Exemplos

Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, $C = \{4, 5\}$ e $D = \{5, 6, 7\}$, determinar:

a) $(A \cup C) \cap B$
b) $(B \cap C) \cup D$
c) $(B - A) \cap C$
d) $(\complement_B C) \cup (A \cap B)$

Solução

a) $(A \cup C) \cap B = \{0, 1, 3, 4, 5\} \cap \{2, 3, 4, 5\} = \{3, 4, 5\}$

b) $(B \cap C) \cup D = \{4, 5\} \cup \{5, 6, 7\} = \{4, 5, 6, 7\}$

c) $(B - A) \cap C = \{2, 5\} \cap \{4, 5\} = \{5\}$

d) $(\complement_B C) \cup (A \cap B) = \{2, 3\} \cup \{3, 4\} = \{2, 3, 4\}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

39. Dados os conjuntos $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 5, 6, 7\}$, $C = \{5, 6, 7\}$ e $D = \{2, 4\}$, determine:

a) $(A \cap B) \cup C$
b) $(C \cup D) \cap B$
c) $(A \cap D) \cup (A \cap C)$
d) $(C \cap D) \cup A$
e) $(B - A) \cup D$
f) $B - (C \cup D)$
g) $B - \complement_A D$
h) $\complement_A(A \cap D)$
i) $(A - D) \cup (B - C)$

40. Sejam A, B e C três conjuntos quaisquer e U o conjunto universo. Identifique, entre as seguintes afirmações, aquelas que são verdadeiras.

a) Se $A \cap B = A$, então $A \subset B$.
b) Se $A \subset B$ e $A \subset C$, então $A \subset (B \cap C)$.
c) $x \in (A - B) \Leftrightarrow x \in A$ e $x \notin B$
d) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$
e) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
f) $B \cup \overline{B} = U$

41. Dados $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ e $C = \{2, 3, 4, 5\}$, calcule:

a) $\complement_B(A \cap C)$
b) $\complement_{(A \cup C)}B$
c) $\complement_C(B - A)$

42. Se $A = \{x \mid x$ é número ímpar e $0 < x < 10\}$, $B = \{x \mid x > 0$ é divisor de $24\}$ e $C = \{x \mid x$ é número par e $2 < x < 13\}$, determine:

a) $(A \cap C) \cup B$
b) $C - (A \cap B)$
c) $(A \cap B) \cup C$

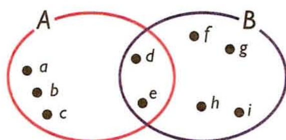
43. Uma operação Δ entre os conjuntos A e B é definida por $M \Delta N = (M \cap N) \cup (M - N)$. Sendo $M = \{a, b, c, d\}$ e $N = \{b, c, e, f\}$, calcule $M \Delta N$.

9. Número de elementos da reunião entre conjuntos

Indicando por $n(A)$ o número de elementos do conjunto A; $n(B)$ o número de elementos B; $n(A \cup B)$ o número de elementos de $A \cup B$ e $n(A \cap B)$ o número de elementos de $A \cap B$, é válida a seguinte relação:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Verifiquemos a validade dessa relação no esquema abaixo:



$$\underbrace{n(A \cup B)}_{9} = \underbrace{n(A)}_{5} + \underbrace{n(B)}_{6} - \underbrace{n(A \cap B)}_{2}$$

Essa relação é importante na resolução de certos problemas, como veremos a seguir.

Exemplo 1

Sendo $n(A) = 10$, $n(A \cap B) = 3$ e $n(A \cup B) = 12$, calcular o número de elementos de B.

Solução

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, ou seja:

$$12 = 10 + n(B) - 3 \Rightarrow 12 = 7 + n(B) \Rightarrow n(B) = 12 - 7 \Rightarrow n(B) = 5$$

O número de elementos de B é 5.

Exemplo 2

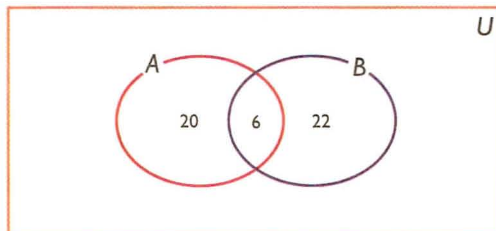
Em uma classe de 48 alunos, cada aluno apresentou um trabalho sobre Ecologia, tendo sido indicados dois livros sobre o assunto. O livro A foi consultado por 26 alunos e o livro B, por 28 alunos. Pergunta-se:

a) Quantos alunos consultaram os dois livros?
b) Quantos alunos consultaram apenas o livro A?

Solução

a) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$48 = 26 + 28 - n(A \cap B)$
$48 = 54 - n(A \cap B)$
$n(A \cap B) = 6$

Os livros A e B foram consultados por 6 alunos.



b) Entre os 26 alunos que consultaram o livro A, existem 6 alunos que consultaram também o livro B. Logo, o número de alunos que consultaram apenas o livro A é $26 - 6 = 20$.

Exemplo 3

Desejando verificar qual o jornal preferido pelos estudantes, uma pesquisa apresentou os resultados constantes da tabela abaixo:

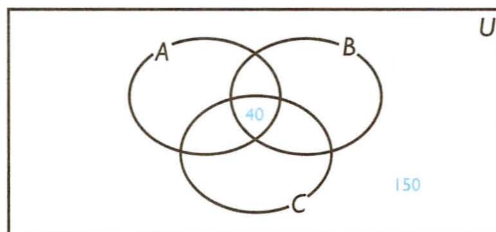
Jornais	*A*	*B*	*C*	*A* e *B*	*A* e *C*	*B* e *C*	*A*, *B* e *C*	Nenhum
Leitores	300	250	200	70	65	105	40	150

Pergunta-se:

a) Quantas pessoas lêem apenas o jornal A?
b) Quantas pessoas lêem o jornal A ou B?
c) Quantas pessoas não lêem o jornal C?
d) Quantas pessoas foram consultadas?

Solução

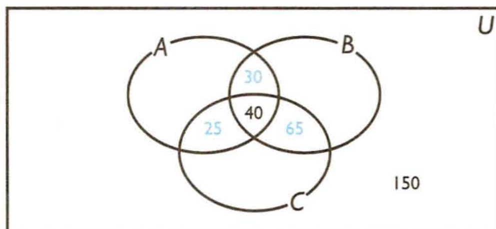
Para resolver o problema vamos recorrer aos diagramas.
Em $A \cap B \cap C$ colocaremos 40 e na região complementar de $A \cup B \cup C$, 150.



Como $n(A \cap B) = 70$ elementos e já foram colocados 40, restam 30 elementos para completar a região $A \cap B$.

Da mesma forma:

$n(A \cap C) - 40 = 65 - 40 = 25$
$n(B \cap C) - 40 = 105 - 40 = 65$

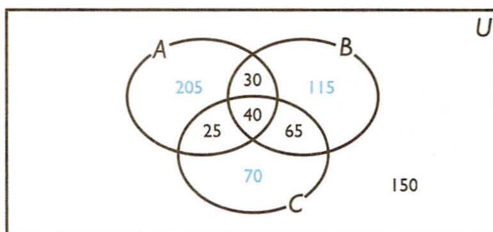


Para completar o conjunto A, devemos colocar:

$300 - (30 + 40 + 25) = 300 - 95 = 205$

Da mesma forma:

$n(B) - 135 = 250 - 135 = 115$
$n(C) - 130 = 200 - 130 = 70$



Agora, consultando o diagrama, podemos responder às questões:

a) 205 pessoas lêem apenas o jornal A.
b) $205 + 30 + 40 + 25 + 65 + 115 = 480$ ou
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 300 + 250 - 70 = 480$
480 pessoas lêem o jornal A ou B.
c) $205 + 30 + 115 + 150 = 500$
500 pessoas não lêem o jornal C.
d) $205 + 115 + 70 + 30 + 25 + 65 + 40 + 150 = 700$
Foram consultadas 700 pessoas.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

44. Sendo $n(A) = 18$, $n(B) = 22$ e $n(A \cap B) = 10$, calcule $n(A \cup B)$.

45. Sendo $n(A \cup B) = 70$, $n(A) = 30$ e $n(B) = 60$, calcule $n(A \cap B)$.

46. Num vestibular eram eliminados os candidatos que não obtivessem a nota mínima 3,0 em matemática e redação. Após a apuração dos resultados, verificou-se que foram eliminados 330 candidatos, sendo 236 em matemática e 210 em redação. Quantos candidatos foram eliminados nas duas disciplinas?

47. Numa pesquisa sobre as emissoras de tevê a que habitualmente assistem, foram consultadas 450 pessoas, com o seguinte resultado: 230 preferem o canal *A*; 250, o canal *B*; e 50 preferem outros canais diferentes de *A* e *B*.
Pergunta-se:

a) Quantas pessoas assistem aos canais *A* e *B*?
b) Quantas pessoas assistem ao canal *A* e não assistem ao canal *B*?
c) Quantas pessoas assistem ao canal *B* e não assistem ao canal *A*?
d) Quantas pessoas não assistem ao canal *A*?

48. Examinando as carteiras de vacinação das crianças de uma creche, verificou-se que 60% receberam a vacina Sabin, 80% receberam a vacina contra o sarampo e 10% não foram vacinadas. Pede-se:

a) a porcentagem de crianças que receberam apenas a vacina Sabin;
b) a porcentagem das que receberam apenas a vacina contra o sarampo;
c) a porcentagem das que receberam as duas vacinas.



Delfim Martins / Pulsar

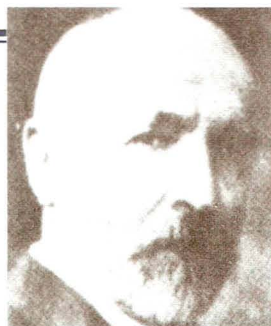
49. O quadro abaixo mostra o resultado de uma pesquisa sobre as revistas que os estudantes do 2º grau costumam ler:

Revistas	*A*	*B*	*C*	*A* e *B*	*A* e *C*	*B* e *C*	*A*, *B* e *C*	Nenhuma
Leitores	50	54	40	22	20	16	12	12

Pergunta-se:

a) Quantos foram os estudantes consultados?
b) Quantos estudantes lêem apenas a revista *A*?
c) Quantos estudantes lêem a revista *B* e não lêem a *C*?
d) Quantos estudantes não lêem a revista *A*?
e) Quantos estudantes lêem a revista *A* ou a revista *C*?

TÚNEL DO TEMPO



Georg Cantor.

Georg Cantor nasceu na Rússia, na cidade de São Petersburgo, em 1845. A partir dos 11 anos, mudou-se para a Alemanha, onde iniciou seus estudos de filosofia, física e matemática.

No campo da matemática dedicou-se especialmente ao estudo da teoria dos números. Admitindo a idéia de que "numerações definidas podem ser feitas com conjuntos infinitos tão bem quanto com finitos", propôs uma série de definições e proposições que deram origem à **teoria dos conjuntos**.

Cantor, considerado hoje um dos mais notáveis matemáticos de seu tempo, recebeu naquela época severas críticas pelo seu trabalho. Os contínuos e duros ataques feitos pelo alemão Leopold Kronecker (1823-1891) lhe valeram sucessivos esgotamentos nervosos. Quase no final de sua vida (faleceu em 1918) recebeu o reconhecimento pelo seu grandioso trabalho. A teoria dos conjuntos venceu e hoje é aplicada não somente em matemática como também em outras áreas do conhecimento humano.

Sobre a teoria dos conjuntos, David Hilbert (1862-1943), um dos maiores matemáticos alemães do século XX, assim se expressou: "Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós".

RELEMBRANDO CONCEITOS

- $x \in A$ indica que x pertence ao conjunto A.
- $x \notin A$ indica que x não pertence ao conjunto A.
- $A \subset B$ indica que A está contido em B.
- $A \not\subset B$ indica que A não está contido em B.
- $A \supset B$ indica que A contém B.
- $A \not\supset B$ indica que A não contém B.
- $A \cup B$ indica a união de A com B.
- $A \cap B$ indica a intersecção de A com B.
- $A - B$ indica a diferença entre A e B.
- $\complement_A B = A - B$ indica o complementar de B em relação a A.
- $\overline{A}$ indica o complementar de A em relação ao conjunto universo U.
- $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

50. Se A, B e C são conjuntos não-vazios e $\varnothing$ é o conjunto vazio, quais das seguintes sentenças são verdadeiras?

a) $\{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\} = A - B$
b) $\{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\} = A \cap B$
c) $\{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\} = A \cup B$
d) $\{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\} = A - B$
e) $A \cup \varnothing = \varnothing$
f) $A \subset B \text{ e } B \subset C \Rightarrow A \subset C$

51. Dados os conjuntos A e B, assinale as proposições falsas.

a) Se $A \cup B = B$, então $A \subset B$
b) Se $A \subset B$, então $\complement_B A = A - B$
c) $\forall A, \forall B, (A \cap B) \subset A$
d) $\exists A \mid A \cup B = A$
e) $\forall A, \forall B, A - B \subset A$
f) $\complement_U (A \cap B) = \complement_U A \cap \complement_U B$

52. Dados os conjuntos A, B e C, não-vazios, encontre as proposições que são verdadeiras.

a) $x \in A$ e $x \in B \Rightarrow x \in (A \cap B)$.
b) $x \in A$ e $x \notin B \Rightarrow x \in (A \cup B)$.
c) $x \in (A - B) \Rightarrow x \in A$ e $x \notin B$.
d) $x \in A \Rightarrow x \in \overline{A}$.
e) $x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in A$ ou $x \in B$.
f) Se $A \subset B$, então $x \in B$ e $x \notin A$.

53. Nas sentenças abaixo, assinale V para as sentenças verdadeiras e F para as falsas.

a) $\{2\} \subset \{2, 3\}$
b) $\{2\} \in \{\{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$
c) $\varnothing \subset \{2\}$
d) $2 \in \{\{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$
e) $2 \subset \{2, 3\}$
f) $\{2, 3\} \subset \{\{2, 3\}\}$

54. Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 5, 6\}$ e $C = \{4, 5\}$, pede-se:

a) $\complement_A C$ b) $(A - B) \cup C$ c) $A - (B \cap C)$ d) $(A \cup B) - (A \cap B)$

55. Sendo $A = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$, $B = \{1, 2, \{1\}, \{2\}\}$, pede-se:

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $A - B$ d) $B - A$

56. Sabendo que $M = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $M \cup N = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ e $M \cap N = \{2, 3, 4\}$, determine o conjunto N.

57. Se $A = \{1, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $A \cap B = \{5, 6\}$, determine o conjunto B.

58. O conjunto das partes de um conjunto A é indicado por $P(A)$. Se $A = \{s, a, l, v, e\}$, quantos elementos tem $P(A)$?

59. Dados os conjuntos $A = \{n, u, m, e, r, o\}$ e $B = \{z, e, r, o\}$, quantos são os subconjuntos de $(A \cup B) - (A \cap B)$?

60. Sendo $A = \{1, 3\}$ e $B = \{2, 3\}$, determine o número de elementos de $P(A) \cap P(B)$.

61. Sendo $P(A)$ o conjunto das partes do conjunto A, quantos são os elementos de $P(P(\varnothing))$?

62. Dados os conjuntos A, B e $A \cap B$, com 30, 50 e 10 elementos, respectivamente, quantos elementos tem o conjunto $A \cup B$?

63. Numa escola, a área de ciências exatas tem 16 professores, sendo que 6 lecionam apenas matemá tica, 5 apenas física e 7 lecionam outras disciplinas distintas de matemática e física. Quantos são os professores que lecionam matemática e física?

64. Uma escola ofereceu a seus alunos aulas de reforço em matemática (M), física (F) e química (Q). O número de alunos matriculados constam da tabela abaixo:

M	F	Q	M e F	M e Q	F e Q	M, F e Q
35	41	28	9	10	12	4

Pergunta-se:

a) Quantos alunos se inscreveram apenas para as aulas de matemática?
b) Quantos alunos se inscreveram apenas para as aulas de química?
c) Quantos alunos se inscreveram para as aulas de física ou de química?
d) Quantos alunos se inscreveram apenas em física e matemática?

65. A determinação do tipo sangüíneo de uma pessoa deve-se à presença (ou não) dos antígenos A e B no sangue. Se uma pessoa possuir somente o antígeno A, ela é do tipo A; se tiver somente o antígeno B, é do tipo B; se tiver ambos, é do tipo AB, e se não tiver nenhum é do tipo O. Num grupo de 70 pessoas verificou-se que 35 apresentam o antígeno A, 30 apresentam o antígeno B e 20 apresentam os dois antígenos. Quantas pessoas são do:

a) tipo A? b) tipo B? c) tipo AB? d) tipo O?

TESTES

66. (U. Católica de Salvador-BA) Sejam A, B, C e D conjuntos não-vazios e tais que $A \subset B \subset C \subset D$. Nessas condições, o conjunto $(B - A) \cup (C - B) \cup (D - C)$ é igual a:

a) $D - A$ b) $A \cup C$ c) $B \cap D$ d) A e) C

67. (Unifor-CE) Se $A = \{1\}$, $B = \{0, 1\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$, então é verdade que:

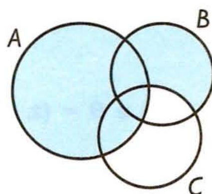
a) $\complement_A(A \cap B) = \{1\}$
b) $\complement_C(A \cup B) = \{1, 2\}$
c) $\complement_B(A \cap B \cap C) = \{0\}$
d) $\complement_B A \cup \complement_C B = \{0, 1\}$
e) $\complement_C(A \cup B \cup C) = \{0\}$

68. (UFCE) Sejam os conjuntos $K = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9\}$, $P_1 = \{1, 5, 7\}$ e $P_2 = \{3, 7, 8\}$. Se $\overline{P_1} = \{x \in K;\ x \notin P_1\}$ e $\overline{P_2} = \{x \in K;\ x \notin P_2\}$, então $\overline{P_1} \cap \overline{P_2}$ é o conjunto:

a) $\{1, 2\}$ b) $\{2, 9\}$ c) $\{3, 5\}$ d) $\{5, 9\}$

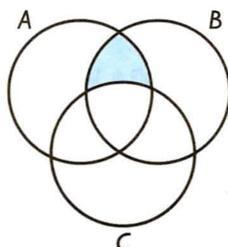
69. (Unirio) Considerando os conjuntos A, B e C, a região colorida no diagrama representa:

a) $A \cup (C - B)$
b) $A \cap (C - B)$
c) $A \cap (B - C)$
d) $A \cup (B - C)$
e) $(A \cup B) - C$



70. (PUC-PR) A região assinalada no diagrama representa:

a) $(A \cap B) \cup C$
b) $(A - B) \cup (B - C)$
c) $(A - C) \cap (B - C)$
d) $(A - B) \cap (C - D)$
e) $(A \cap C) - (B \cap C)$



71. (Vunesp) Se $A \cap B = \{a\}$ e $A \cup B = \{a, b, c, d\}$, podemos afirmar que:

a) c está em A e em B.
b) c não está em A, mas está em B.
c) c não está em B, mas está em A.
d) se $b \neq a$, então b não está em A ou b não está em B.
e) $\{b, c, d\} \subset A$ ou $\{b, c, d\} \subset B$.

72. (Imes-SP) Se A é um conjunto finito qualquer, indicamos por $n(A)$ o número de elementos de A. Sendo B e C dois conjuntos finitos quaisquer, assinale a afirmação verdadeira.

a) $n(B \cup C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C)$
b) $n(B \cup C) = n(B) + n(C) + n(B \cap C)$
c) $n(B \cap C) = n(B) + n(C) + n(B \cup C)$
d) $n(B \cap C) = n(B) - n(C)$
e) $n(B \cup C) = n(B) + n(C)$

73. (U. F. Fluminense-RJ) Considerando três conjuntos P, Q e R diferentes, tais que $P \cap Q \cap R \neq \varnothing$, são feitas as seguintes afirmações:

I. Pelo menos um dos conjuntos tem mais do que um elemento.
II. Pelo menos dois desses conjuntos têm, na sua intersecção, dois elementos.
III. A união dos três conjuntos tem, pelo menos, três elementos. Então pode-se concluir que somente:

a) a afirmativa I é verdadeira.
b) a afirmativa II é verdadeira.
c) as afirmativas I e II são verdadeiras.
d) as afirmativas I e III são verdadeiras.
e) as afirmativas II e III são verdadeiras.

74. (UEBA) Sejam os conjuntos formados por números naturais:
A = conjunto dos múltiplos de 3, B = conjunto dos divisores de 30 e C = conjunto dos números pares. O número de elementos de $A \cap B \cap C$ é:

a) 2 b) 0 c) 3 d) 1 e) 4

75. (UFSE) Sejam A e B subconjuntos de um conjunto X, tais que $X - A = \{0, 1, 5, 6\}$ e $X - B = \{0, 4, 6\}$. Se $A \cap B = \{2, 3\}$, o conjunto $A \cup B$ é igual a:

a) $\{1, 4, 5\}$
b) $\{0, 2, 3, 5\}$
c) $\{1, 2, 3, 4\}$
d) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
e) $\{0, 2, 4, 5, 6\}$

76. (Mackenzie-SP) Se $A = \{3, 7\}$ e $B = \{7, 8, 9\}$, então o número de elementos do conjunto M tal que $A \cap M = \{3\}$, $B \cap M = \{8\}$ e $A \cup B \cup M = \{3, 7, 8, 9, 10\}$ é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

77. (Unifor-CE) Indica-se por $n(X)$ o número de elementos de um conjunto X. Se dois conjuntos A e B são tais que $n(A) = 7$, $n(B) = 5$ e $n(A \cap B) = 3$, quantos elementos tem o conjunto $(A - B) \cup (B - A)$?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

78. (Osec-SP) Os conjuntos A e B têm, respectivamente, 16 e 8 subconjuntos. O conjunto $A \cap B$ tem dois elementos. Quantos elementos tem o conjunto $A \cup B$?

a) 22 b) 9 c) 7 d) 5 e) 3

79. (PUC-RJ) Dez mil estudantes fizeram exames para as universidades A, B e C; 50% dos estudantes foram aprovados na universidade A; 20% dos que passaram em A também passaram em B; apenas 10% dos estudantes que foram aprovados em A e B também passaram em C. Quantos estudantes passaram somente nas universidades A e B?

a) 900
b) 100
c) 3 200
d) 800
e) 1 000



Egberto Nogueira / Abril Imagens

80. (PUC-MG) Em uma classe de 45 meninas, cada uma delas ou tem cabelos pretos ou olhos castanhos, 35 têm cabelos pretos e 20 têm olhos castanhos. O número de meninas que têm cabelos pretos e olhos castanhos é:

a) 5 b) 10 c) 15 d) 20 e) 25

81. (Unisinos-RS) Numa pesquisa, realizada em alguns colégios de 2º grau, sobre a preparação dos alunos para o concurso vestibular 94, foram obtidos os seguintes resultados:

	Número de alunos
Cursou pré-vestibular	358
Contratou professor particular	110
Ambas as situações anteriores	54
Nenhuma das situações anteriores	36

Com base nesses dados, o número de alunos consultados foi:

a) 378 b) 414 c) 450 d) 510 e) 514

82. (F. M. Pouso Alegre-MG) Numa cidade foi feito um levantamento para se saber quantas crianças haviam recebido as vacinas Sabin, Tríplice e contra o sarampo. Os dados obtidos foram:

Vacinas	**Número de crianças**
Sabin	5 428
Tríplice	4 346
Sarampo	5 800
Sabin e Tríplice	812
Sabin e sarampo	904
Tríplice e sarampo	721
Tríplice, Sabin e sarampo	521
Nenhuma	1 644

Entre as crianças abrangidas pela pesquisa, assinale a alternativa falsa.

a) 4 233 crianças receberam apenas a Sabin.
b) 3 334 crianças receberam apenas a Tríplice.
c) 4 696 crianças receberam apenas a de sarampo.
d) 874 crianças receberam pelo menos duas vacinas.
e) Nenhuma.

83. (Mackenzie-SP) Dez mil aparelhos de tevê foram examinados depois de um ano de uso e constatou se que 4 000 deles apresentavam problemas de imagem, 2 800 tinham problemas de som e 3 500 não apresentavam nenhum dos tipos de problemas citados.
Então o número de aparelhos que apresentavam somente problemas de imagem é:

a) 4 000 b) 3 700 c) 3 500 d) 2 800 e) 2 500

Capítulo 2 Conjuntos numéricos

1. Introdução

Embora a idéia de **número** acompanhe o homem desde os tempos mais primitivos, foram necessários muitos milhares de anos para chegarmos aos atuais conjuntos numéricos.

Um dos responsáveis pelo sistema de numeração decimal, adotado universalmente, foi o matemático árabe Mohammed Ibu-Musa Al-Khowarizmi (780-850).

Ele escreveu vários livros sobre astronomia e dois sobre aritmética e álgebra. Estes últimos tiveram importante papel na história da matemática. Seu livro *De numero hindorum* (*Sobre a arte hindu de calcular*), em que Al-Khowarizmi nos fala sobre os numerais hindus e a forma de operá-los, tornou-se o principal veículo de divulgação dos números decimais na Europa ocidental. O sistema hindu de numeração foi tão bem exposto, que acabou passando a impressão de que o nosso sistema numérico é de origem árabe.

Convém ressaltar que Al-Khowarizmi em nenhum momento manifesta a pretensão de originalidade. Até pelo contrário: ele assume claramente que o sistema decimal é originário da Índia.

Como homenagem à importância de sua obra, Al-Khowárizmi teve seu nome perpetuado em duas palavras do sistema de numeração decimal:

- *algarismo*, para indicar os símbolos hindo-arábicos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9; e
- *algoritmo*, para se referir a qualquer regra especial de processo ou operação.

Neste capítulo iremos rever os conjuntos numéricos estudados ao longo do curso de 1º grau.

2. Conjunto dos números naturais

O conjunto dos números naturais, conforme já foi visto, é representado pela letra $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Retirando-se do conjunto $\mathbb{N}$ o número zero, obtemos o conjunto dos números naturais não-nulos:

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Lembrando que, na representação de dois números naturais a e b (com $a < b$) na reta numérica, o número a fica situado à esquerda de b, temos:



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Dados os números naturais *a* e *b*, quais das seguintes sentenças são verdadeiras?

a) Se *a* e *b* forem pares, então $a + b$ é par.
b) Se *a* e *b* forem ímpares, então $a + b$ é ímpar.
c) Se *a* for par e *b* for ímpar, então $a + b$ é ímpar.
d) Se *a* for par e *b* for ímpar, então $a \cdot b$ é ímpar.
e) Se *a* é ímpar, então a^2 será ímpar.
f) Se b^2 é par, então *b* é par.
g) Se *a* e *b* forem primos entre si, o m.m.c. de *a* e *b* é o produto $a \cdot b$.
h) Se *a* e *b* forem primos entre si, o m.d.c. de *a* e *b* é 1.

2. Responda:

a) Qual o maior número natural de dois algarismos cujo quadrado tem três algarismos?
b) Escrevendo todos os números naturais de 1 a 100, quantas vezes escrevemos o algarismo 3?

3. Usando quatro vezes o algarismo 3, é possível escrever alguns numerais naturais. Por exemplo:

- o número zero → $33 - 33$;
- o número 1 → $33 : 33$;
- o número 2 → $(3 : 3) + (3 : 3)$;
- o número 3 → $3 \cdot (3 - 3) + 3$.

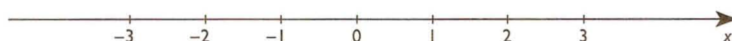
Usando quatro vezes, o algarismo 4, escreva todos os numerais naturais de 1 a 10.

3. Conjunto dos números inteiros

O conjunto dos números inteiros é representado pela letra $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Representemos o conjunto dos números inteiros na reta numérada:



Do conjunto dos números inteiros merecem destaque os seguintes subconjuntos:

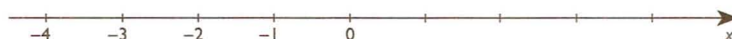
a) conjunto dos números inteiros **não-nulos**:

$$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\} = \{..., -3, -2, -1, 1, 2, 3, ...\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \neq 0\}$$



b) conjunto dos números inteiros **não-positivos**:

$$\mathbb{Z}_- = \{..., -3, -2, -1, 0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leqslant 0\}$$



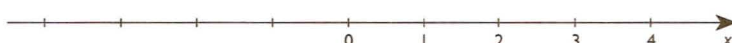
c) conjunto dos números inteiros **negativos**:

$$\mathbb{Z}^*_- = \{..., -3, -2, -1\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$$



d) conjunto dos números inteiros **não-negativos**:

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geqslant 0\}$$



e) conjunto dos números inteiros **positivos**:

$$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\} = \mathbb{N}^* = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$$



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

4. Usando os símbolos $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\supset$, estabeleça relação entre:

a) 3 e $\mathbb{N}$
b) 3 e $\mathbb{Z}$
c) -3 e $\mathbb{N}$
d) -3 e $\mathbb{Z}$
e) 0 e $\mathbb{N}$
f) 0 e $\mathbb{Z}^*$
g) 0 e $\mathbb{Z}_+$
h) 0 e $\mathbb{Z}_-$
i) $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$
j) $\mathbb{Z}_-$ e $\mathbb{Z}$
l) $\mathbb{Z}^*$ e $\mathbb{Z}_-^*$
m) $\mathbb{Z}_+^*$ e $\mathbb{Z}$

5. Escreva os seguintes conjuntos indicando seus elementos:

a) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x > -3\}$
b) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 2\}$
c) $\{x \in \mathbb{Z}^* \mid -3 < x < 3\}$
d) $\{x \in \mathbb{Z}_+ \mid x \leq 4\}$
e) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 2\}$
f) $\{x \in \mathbb{Z}_-^* \mid x > -2\}$
g) $\{x \in \mathbb{Z}_+ \mid x < -3\}$
h) $\{x \in \mathbb{Z}_- \mid -3 < x < 4\}$

6. Classifique cada sentença como verdadeira (V) ou falsa (F).

a) $x^2 = 36 \Rightarrow x = 6 \ (x \in \mathbb{N})$
b) $x^2 = 36 \Rightarrow x = -6 \ (x \in \mathbb{Z})$
c) $\exists x \in \mathbb{Z} \mid 2x = -5$
d) $\forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow 0x = 0$

4. Conjuntos dos números racionais

Chama-se **número racional** todo número que pode ser colocado na forma de razão $\frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$.

Observação: todo número racional pode ser representado por uma fração (razão) em que o numerador e o denominador são primos entre si, ou seja, por uma fração irredutível.
Assim sendo:

- Todo número inteiro é racional.
  Veja os exemplos:
  a) 0 é racional, pois pode ser colocado na forma $\frac{0}{1}$.
  b) -3 é racional, pois pode ser colocado na forma $\frac{-3}{1}$.
  c) 5 é racional, pois pode ser colocado na forma $\frac{5}{1}$.
- Todo número decimal exato é racional.
  Veja os exemplos:
  a) 0,5 é racional, pois pode ser colocado na forma $\frac{5}{10}$.
  b) 2,21 é racional, pois pode ser colocado na forma $\frac{221}{100}$.

- Todo número decimal periódico é racional.
  Veja os exemplos:

  a) 0,444...   b) 3,444...   c) 0,344 4   d) 0,131 313...   e) −0,213 13...

Mostremos que os exemplos dados podem ser colocados na forma $\frac{p}{q}$, com $q \neq 0$.

a) 0,444...
   Chamando 0,444... de x, podemos escrever:

   $x = 0{,}444...$ (I)

   Multiplicando os dois membros por 10, temos:

   $10x = 4{,}444...$ (II)

   Subtraindo (I) de (II), vem:

   $10x - x = 4{,}444... - 0{,}444... \Rightarrow 9x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{9}$

Logo, $0{,}444... = \frac{4}{9}$. Portanto é racional.

b) 3,444...
   Temos: $3{,}444... = 3 + 0{,}444... = 3 + \frac{4}{9} = \frac{31}{9}$

c) 0,344 4...

   $x = 0{,}344\,4...$ (I)

   $10x = 3{,}444...$ (II)

   $100x = 34{,}444...$ (III)

   (III) − (II) $= 100x - 10x = 34{,}444... - 3{,}444... \Rightarrow 90x = 31 \Rightarrow x = \frac{31}{90}$

d) 0,131 313...

   $x = 0{,}131\,3...$ (I)

   $100x = 13{,}131\,3...$ (II)

   (II) − (I) $= 100x - x = 13{,}131\,3... - 0{,}131\,3... \Rightarrow 99x = 13 \Rightarrow x = \frac{13}{99}$

e) −0,213 13...
   $x = -0{,}213\,13...$
   $10x = -2{,}131\,3... \Rightarrow 10x = -2 - 0{,}131\,3... \Rightarrow$

   $\Rightarrow 10x = -2 - \frac{13}{99} \Rightarrow 10x = \frac{-211}{99} \Rightarrow x = \frac{-211}{990}$

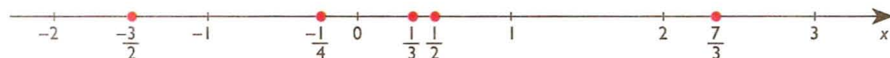
Conhecidos os números racionais e indicando por $\mathbb{Q}$ o conjunto que os representa, temos:

$$\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{p}{q}, \text{ em que } p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

Vamos destacar os seguintes subconjuntos de $\mathbb{Q}$:

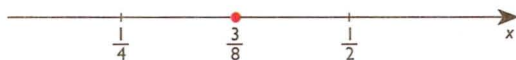
$\mathbb{Q}^* = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 0\}$ → conjunto dos números racionais **não-nulos**;
$\mathbb{Q}_- = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leqslant 0\}$ → conjunto dos números racionais **não-positivos**;
$\mathbb{Q}^*_- = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$ → conjunto dos números racionais **negativos**;
$\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geqslant 0\}$ → conjunto dos números racionais **não-negativos**;
$\mathbb{Q}^*_+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$ → conjunto dos números racionais **positivos**.

Representemos na reta numerada, onde já se encontram fixados os números inteiros, os seguintes números racionais: $\frac{-3}{2}$, $\frac{-1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{7}{3}$.



Convém observar que dados os números racionais *a* e *b* **sempre** existirá entre eles o número $\frac{a+b}{2}$, também racional. Assim, por exemplo, entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$ existe o número

$$\frac{3}{8} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{2}.$$



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. Identifique as sentenças verdadeiras.

a) $-5 \in \mathbb{N}$
b) $-5 \in \mathbb{Z}$
c) $-5 \in \mathbb{Q}$
d) $0 \in \mathbb{Q}$
e) $\frac{3}{5} \in \mathbb{N}$
f) $\frac{3}{5} \in \mathbb{Z}$
g) $\frac{3}{5} \in \mathbb{Q}$
h) $\frac{3}{5} \in \mathbb{Q}^*$
i) $0{,}12 \in \mathbb{Q}$
j) $0{,}1222... \in \mathbb{Q}$
l) $\mathbb{Z} \in \mathbb{Q}$
m) $\mathbb{Q}^*_+ \cup \mathbb{Q}_- = \mathbb{Q}$

8. Escreva na forma $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$, com p e q primos entre si:

a) 0,5
b) 2,4
c) −0,25
d) 0,55
e) 0,55...
f) 0,355...
g) 2,1
h) 2,111...
i) 2,3111...

9. Calcule o valor das expressões:

a) $2^{-1} + \frac{2}{3}$

b) $\left(3 - \frac{7}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{5}{2}\right)$

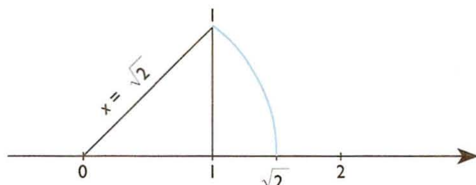
c) $\frac{1 - 3{,}15 \cdot 0{,}2}{0{,}3737\ldots}$

d) $\frac{a^2 - ab^2}{2a - 3b}$, para $a = -1$ e $b = -\frac{1}{2}$

5. Conjunto dos números irracionais

O fato de sempre existir, entre dois números racionais, um outro número racional não significa que os números racionais preencham completamente os pontos da reta, o que vale dizer que existem pontos da reta que não representam números racionais. A esses pontos associamos os **números irracionais**.

Um exemplo disso é o número $\sqrt{2}$, que não é racional, e, no entanto, existe um ponto da reta que o representa, conforme podemos verificar pela figura:



De acordo com o teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 1 + 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

Mostremos que $\sqrt{2}$ não é número racional.

De fato, se $\sqrt{2}$ fosse racional, então deveriam existir dois números p e q primos entre si, tal que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, ou seja, $p = \sqrt{2}\ q$.

Elevando ambos os membros ao quadrado, teremos: $p^2 = 2q^2$. Logo, p^2 é par e conseqüentemente p é par, pois, se p fosse ímpar, p^2 também seria ímpar.

Fazendo $p = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$), teremos: $4k^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2$. Logo, q^2 é par e então q é par.

O fato de p e q serem pares nos mostra que a hipótese de p e q serem primos entre si é falsa.

Logo, não existe o número racional $\frac{p}{q}$, tal que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Portanto $\sqrt{2}$ é número irracional.

De um modo geral, **toda raiz não-exata** assim como **todo número decimal não-exato e não-periódico são irracionais.**

Considere como exemplo o número $n = 0{,}151\ 617...$. Nele, vê-se claramente que a parte decimal tem uma infinidade de elementos formados por pares de números sucessivos. Assim, desejando expressar n com mais casas decimais, teríamos:

$$n = 0{,}151\ 617\ 18...$$
$$n = 0{,}151\ 617\ 181\ 9...\ \text{etc.}$$

Esse número decimal não é periódico nem exato. Ele é um exemplo de número irracional.

Vejamos outros exemplos de números irracionais:

a) Escritos na forma decimal: 0,373 373 337...; 0,412 413 414...; 2,121 221 222...; $\pi = 3{,}141\ 59...$

b) Escritos na forma de radical: $\sqrt{5}$; $-\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[6]{5}$; $\frac{2}{3}\sqrt{2}$; $\sqrt[4]{2^3}$.

Observação: convém lembrar que todo radical pode ser escrito na forma de potência, como nos exemplos:

a) $\sqrt[5]{3^2} = 3^{\frac{2}{5}}$ b) $\sqrt{7^3} = 7^{\frac{3}{2}}$ c) $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$

Racionalização de denominadores

Quando o denominador de uma fração for um número irracional escrito na forma de radical, é possível racionalizá-lo multiplicando o numerador e o denominador por um número conveniente, como nos exemplos:

a) $\dfrac{5}{\sqrt{3}} = \dfrac{5 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$

b) $\dfrac{2}{4 - \sqrt{5}} = \dfrac{2(4 + \sqrt{5})}{(4 - \sqrt{5})(4 + \sqrt{5})} = \dfrac{2(4 + \sqrt{5})}{16 - 5} = \dfrac{2(4 + \sqrt{5})}{11}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

10. Classifique cada um dos seguintes números em racional ou irracional.

a) $-\dfrac{5}{2}$ d) 0,211... g) $\sqrt{8}$ j) $2^{\frac{3}{4}}$

b) 3,6 e) 0,212 212 221... h) $\sqrt{0,25}$ l) $4^{\frac{1}{2}}$

c) $\sqrt{3}$ f) $\sqrt[3]{8}$ i) $\sqrt[5]{25}$ m) 0,323 334 35...

11. Dado o conjunto $\left\{-3,1;\ -2;\ \dfrac{3}{4};\ 0,050050005\ldots;\ \sqrt{1};\ \sqrt{2}\right\}$, destaque o subconjunto dos números racionais.

12. Assinale V para as sentenças verdadeiras e F para as falsas.
Se *a* e *b* são dois números irracionais, então:

a) $a + b$ é um número irracional.
b) $a + b$ pode ser um número racional.
c) $a \cdot b$ é racional.
d) $a \cdot b$ é irracional.
e) existem valores de *a* e *b* de modo que $a \cdot b$ é racional.
f) a^2 pode ser um número racional.

13. Racionalize o denominador das frações:

a) $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{2}{\sqrt{2} - 1}$ e) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ d) $\dfrac{2}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$ f) $\dfrac{6}{2 + \sqrt{15}}$

14. Efetue:

a) $(\sqrt{5} + 2)^2$ c) $(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})^2$

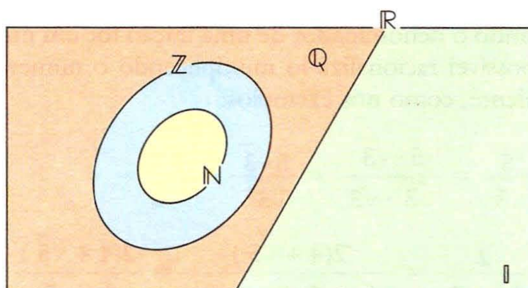
b) $(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)$ d) $\sqrt{2}(2\sqrt{2} - 3\sqrt{3})$

6. Conjunto dos números reais

Chama-se **número real** todo número **racional** ou **irracional**, ou seja, o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) é a reunião do conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$) com o conjunto dos números irracionais ($\mathbb{I}$): $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

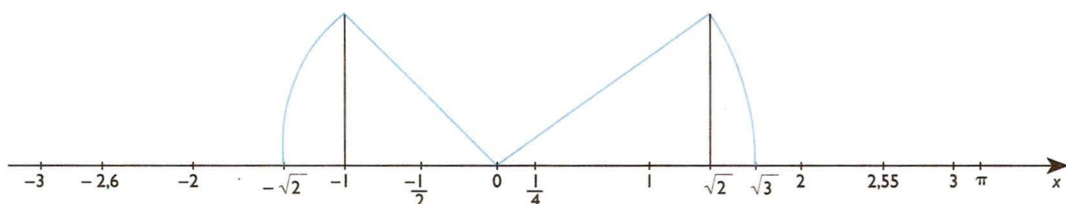
O diagrama ao lado nos mostra a relação entre os conjuntos estudados. Observe que:

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



A imagem de todos os números racionais, juntamente com a imagem de todos os números irracionais, preenche completamente a reta numerada, chamada agora **reta real**.

Vamos construir a reta real e representarmos nela alguns de seus pontos:



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

15. Identifique as sentenças verdadeiras.

a) $\frac{3}{4} \in \mathbb{Z}$ c) $\frac{3}{4} \in \mathbb{I}$ e) $\sqrt{5} \in \mathbb{Z}$ g) $\sqrt{5} \in \mathbb{I}$

b) $\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$ d) $\frac{3}{4} \in \mathbb{R}$ f) $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$ h) $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$

16. Resolva a equação $2x^2 + 3x - 2 = 0$ de acordo com o conjunto universo dado.

a) $U = \mathbb{Z}$ c) $U = \mathbb{I}$

b) $U = \mathbb{Q}$ d) $U = \mathbb{R}$

17. Resolva a equação $x^2 - 4x + 2 = 0$, tendo como conjunto universo:

a) $U = \mathbb{Z}$ b) $U = \mathbb{Q}$ c) $U = \mathbb{I}$ d) $U = \mathbb{R}$

7. Intervalos

Os subconjuntos dos números reais determinados por desigualdades são chamados **intervalos**. Vamos estudar alguns desses intervalos. Para isso vamos considerar dois números reais a e b, com $a < b$.

- Intervalo fechado: é qualquer conjunto do tipo $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, geralmente indicado por $[a, b]$. Então: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$. Os números reais a e b são chamados **extremos do intervalo**.

Representação na reta:



Exemplo

O intervalo fechado de extremos $-\frac{1}{2}$ e 2 é escrito $\left[-\frac{1}{2}, 2\right] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2\right\}$

e representado na reta numerada assim:



- Intervalo aberto: é qualquer conjunto do tipo $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, geralmente indicado por $]a, b[$ ou por (a, b). Então: $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.

  Representação na reta:



Observação: a bolinha vazia indica que o extremo **não pertence** ao intervalo e a bolinha cheia indica que o extremo **pertence** ao intervalo.

Exemplo

O intervalo aberto de extremos $-\sqrt{5}$ e $-\sqrt{2}$ é escrito

$]-\sqrt{5}, -\sqrt{2}[= \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{5} < x < -\sqrt{2}\}$ e representado na reta numerada assim:



- Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita: é qualquer conjunto do tipo $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$, indicado por $[a, b[$ ou por $[a, b)$. Então: $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$.

  Representação na reta:



Exemplo

O intervalo fechado à esquerda e aberto à direita de extremos 3 e $\sqrt{10}$ é escrito $[3, \sqrt{10}[= \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant x < \sqrt{10}\}$ e representado na reta numerada assim:



- Intervalo aberto à esquerda e fechado à direita: é qualquer conjunto do tipo $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$, indicado por $]a, b]$ ou por $(a, b]$. Então: $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$.

  Representação na reta:



Exemplo

O intervalo aberto à esquerda e fechado à direita de extremos -5 e 5 é escrito $]-5, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leq 5\}$ e representado na reta numerada assim:



Sendo a um número real, também são intervalos os seguintes subconjuntos:

$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

Observação: os símbolos $-\infty$ e $+\infty$ são lidos, respectivamente, **menos infinito** e **mais infinito**.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

18. Represente na reta real os intervalos:

a) $[-3, 5]$
b) $]-4; 2{,}5]$
c) $]-2, 2[$
d) $]-\infty, 2]$
e) $]3, \infty[$
f) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$
g) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$
h) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$
i) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < \sqrt{2}\}$

19. Escreva em cada caso o intervalo real representado nas retas:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

20. Quantos são os números inteiros que pertencem ao intervalo:

a) $[-10, 20]$?
b) $[2, 15[$?
c) $]-6, 8]$?
d) $[-5, 5]$?
e) $]-8, 8[$?
f) $]0, 10[$?

21. Dado o conjunto $[-5, 5]$, responda:

a) Quantos são os números naturais desse intervalo?
b) Quantos são os números inteiros desse intervalo?
c) Quantos são os números reais desse intervalo?

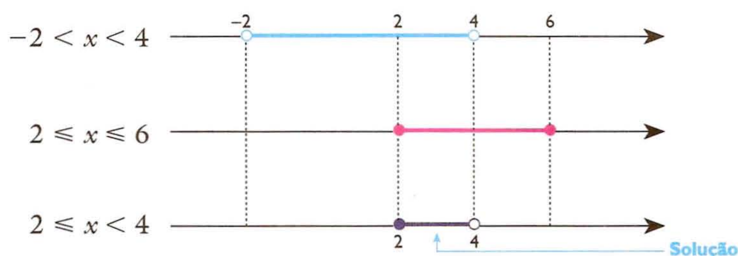
8. Operações com intervalos

Vamos estudar a intersecção e a reunião de intervalos.

Intersecção

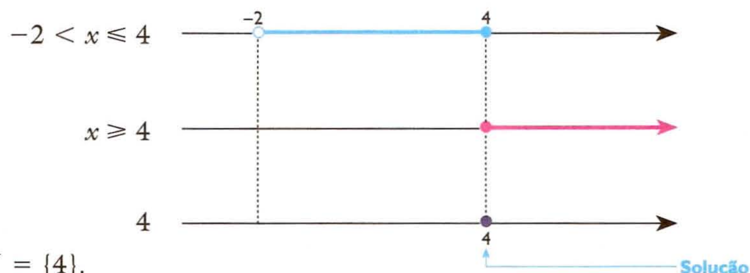
Vejamos três exemplos da intersecção de intervalos.

Exemplo 1
$]-2, 4[\cap [2, 6]$
Graficamente, temos:



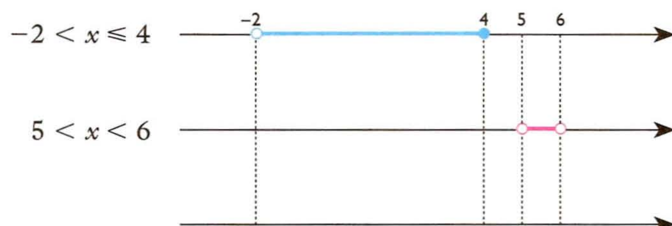
Logo, $]-2, 4[\cap [2, 6] = [2, 4[$.

Exemplo 2
$]-2, 4] \cap [4, +\infty[$
Graficamente, temos:



Logo, $]-2, 4] \cap [4, +\infty[= \{4\}$.

Exemplo 3
$]-2, 4] \cap]5, 6[$
Graficamente, temos:



A intersecção é o conjunto vazio. Logo, $]-2, 4] \cap]5, 6[= \varnothing$.

Observação: os exemplos acima nos mostram que a **intersecção de dois intervalos** pode ser um **intervalo**, um **conjunto unitário** ou o **conjunto vazio**.

EXERCÍCIO PROPOSTO

22. Determine o intervalo correspondente à operação indicada:

a) $[-5, 4] \cap [-2, 6]$

b) $]-1, 1] \cap [1, 3]$

c) $]-4, 4[\cap]4, 6[$

d) $]-\infty, 2] \cap [-2, \infty[$

e) $[-\sqrt{3}, 5] \cap [2, \sqrt{50}]$

f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$

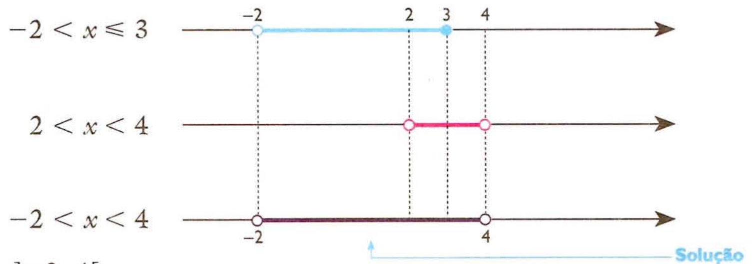
Reunião

Vejamos três exemplos da reunião de dois intervalos.

Exemplo 1

$]-2, 3] \cup]2, 4[$

Graficamente, temos:

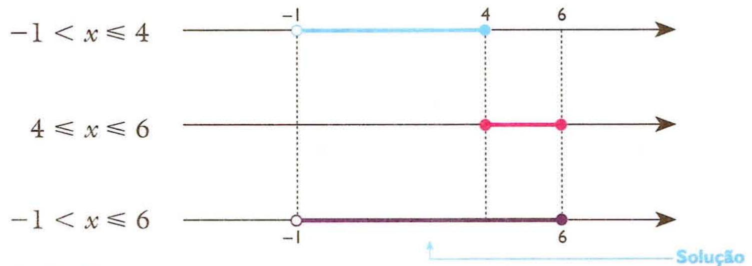


Logo, $]-2, 3] \cup]2, 4[=]-2, 4[$.

Exemplo 2

$]-1, 4] \cup [4, 6]$

Graficamente, temos:

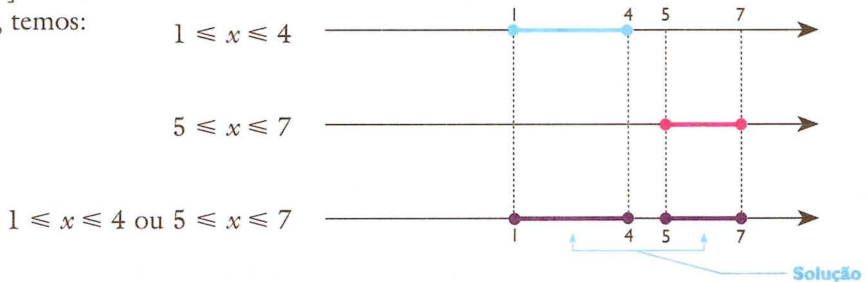


Logo, $]-1, 4] \cup [4, 6] =]-1, 6]$.

Exemplo 3

$[1, 4] \cup [5, 7]$

Graficamente, temos:



Logo, $[1, 4] \cup [5, 7] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 4 \text{ ou } 5 \leqslant x \leqslant 7\}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

23. Determine o intervalo correspondente à operação indicada:

a) $[-10, 2] \cup [-3, 5]$

b) $]-6, 4[\cup [1, 6[$

c) $]-\infty, 3] \cup [-1, \infty[$

d) $]-\infty, 3] \cup [1, 4]$

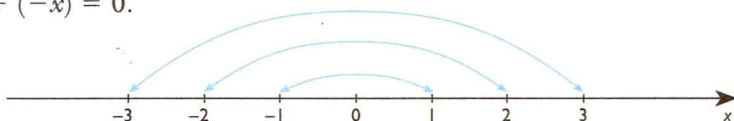
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\} \cup \{3\}$

f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\} \cup [-2, 2[$

9. Valor absoluto ou módulo de um número

Ao representarmos os números reais na reta, verificamos que:

1º) Para todo número real x existe um número real $-x$, chamado **oposto** ou **simétrico** de x, tal que $x + (-x) = 0$.



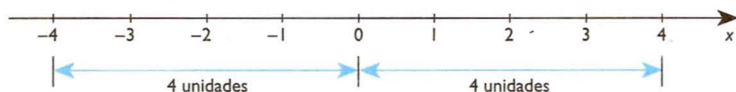
Exemplos

a) O oposto de $+3$ é $-(+3) = -3$.

b) O oposto de -2 é $-(-2) = 2$.

c) O oposto de zero é zero.

2º) Os pontos que representam dois números opostos situam-se a uma mesma distância do ponto que representa o zero. Essa distância é chamada **valor absoluto** ou **módulo** do número.



Assim, os módulos de -4 e de $+4$ são iguais a 4.

Indicando o módulo do número real x por $|x|$ (lê-se: módulo de x), temos, para o exemplo anterior:

$$|-4| = 4 \text{ e } |+4| = 4$$

Observando que o módulo de um número real positivo ou nulo é o próprio número, e que o módulo de um número negativo é o seu oposto, podemos definir:

$$\text{Se } x \geqslant 0, \text{ então } |x| = x.$$
$$\text{Se } x < 0, \text{ então } |x| = -x.$$

Logo, se $x = -4$, temos: $|x| = |-4| = -(-4) = 4$;
se $x = 0$, temos: $|x| = |0| = 0$;
se $x = +4$, temos: $|x| = |+4| = 4$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

24. Calcule o valor das expressões:

a) $2 \cdot |-10| - 4 \cdot |-2|$

b) $|10 - 5 \cdot 3| - |2 \cdot 9 - 10|$

c) $\big|-12 + 3 \cdot |-5|\big|$

d) $\left|\dfrac{-3}{4}\right| \cdot \left|\dfrac{-2}{5}\right| \cdot \left|\dfrac{-1}{3}\right|$

e) $\dfrac{|-10|}{10} \cdot \left(\dfrac{-5}{3}\right)$

f) $\left|\dfrac{-3}{4}\right| + \left|\dfrac{1}{3}\right| \cdot |-2|$

25. Quais os valores de x para os quais $|x| = 10$?

26. Quais os valores naturais de x que verificam a desigualdade $|x| \leq 5$?

27. Quais os valores de $x \in \mathbb{Z}$ que verificam a desigualdade $|x| \leq 5$?

28. Quais os valores reais de x que verificam a desigualdade $|x| \leq 5$?

29. Reconheça quais das seguintes sentenças são verdadeiras.

a) Se $x \in \mathbb{R}$, então $\sqrt{x^2} = x$.

b) Se $x \in \mathbb{R}_+$, então $\sqrt{x^2} = x$.

c) Se $x \in \mathbb{R}$, então $\sqrt{x^2} = |x|$.

d) Se $|x| < |y|$, então $x < y$.
e) Se $|x| = |y|$, então $x = y$.
f) Se $x < y$, então $|x| < |y|$.
g) Se x e y são números reais positivos e $x > y$, então $|x| > |y|$.
h) Se x e y são números reais negativos e $x < y$, então $|x| > |y|$.
i) Se x e y são números reais e $x > y$, então $|x| > |y|$.

TÚNEL DO TEMPO



William Oughtred.

Os sinais das operações aritméticas são hoje de fácil identificação e aplicação. No entanto nem sempre foi assim. Antigamente os matemáticos costumavam indicar essas operações usando palavras, como, por exemplo, os termos latinos *plus*, para indicar "mais", e *minus*, para indicar "menos".

O monge alemão Jordanus Nemorarius, por volta do ano 1200, empregou os símbolos *p* e *m* para indicar as operações de adição e subtração.

Outros matemáticos, em diferentes regiões, usavam símbolos distintos para indicar uma mesma operação. Isso é bastante compreensível devido à dificuldade de comunicação naqueles tempos. Somente no início do século XVI, o grande mestre alemão Michael Stifel (1487-1567) começou a empregar os símbolos + e − como sinais de operações da forma usada atualmente.

O sinal ×, para indicar a multiplicação, foi utilizado pela primeira vez pelo inglês William Oughtred (1574-1660), em 1631. Nesse mesmo ano, outro inglês, Thomas Harriot (1560-1621), utiliza-se do ponto · para indicar a mesma operação e o francês René Descartes (1596-1650) escreve simplesmente *ab* para indicar a multiplicação de *a* por *b*. Deve-se também a Descartes a atual indicação de uma potência.

O sinal :, para representar a divisão, apareceu em 1657, também atribuído a Oughtred, e o sinal $\sqrt{\ }$, para indicar radical, surgiu em 1526, no livro *Coss*, do alemão Christoph Rudolff (1500-1545).

Tantos foram os símbolos apresentados para indicar as operações aritméticas que muitos séculos foram necessários até chegarmos a uma simbologia universal, adotada nos dias de hoje.

RELEMBRANDO CONCEITOS

Conjunto dos números naturais

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Conjunto dos números inteiros

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Conjunto dos números racionais

$$\mathbb{Q} = \left\{x \,\middle|\, x = \frac{p}{q}, \text{ com } p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

São números racionais:

- todo número inteiro;
- todo número fracionário;
- todo número decimal exato;
- todo número decimal periódico.

Conjunto dos números irracionais

São números irracionais:

- todo número decimal não-exato e não-periódico;
- toda raiz não-exata.

Conjunto dos números reais

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ é racional ou } x \text{ é irracional}\}$$

Intervalos reais

Intervalo fechado $[a, b]$
Intervalo aberto $]a, b[$
Intervalo aberto à direita $[a, b[$
Intervalo aberto à esquerda $]a, b]$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

30. Escreva na forma fracionária:

a) 0,25
b) 0,252 5...
c) 0,255 5...
d) 1,2
e) 1,222...
f) 1,022 2...

31. Escreva na forma de radical:

a) $5^{\frac{3}{8}}$
b) $6^{\frac{3}{2}}$
c) $4^{\frac{1}{2}}$
d) $9^{\frac{1}{3}}$

32. Calcule o valor das potências:

a) 5^{-2}
b) $64^{\frac{1}{3}}$
c) $4^{-\frac{1}{2}}$
d) $(0{,}2)^{-2}$
e) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}$
f) $(2 + \sqrt{5})^0$
g) $(\sqrt{2})^2$
h) $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2$

33. Calcule o valor das expressões:

a) $\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{75}}{10}\right)^2}$

b) $\sqrt{1-0,555...}$

c) $8^{\frac{1}{3}} : \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$

d) $8^{0,666...} + 9^{0,5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

e) $(5+\sqrt{2}) \cdot (5-\sqrt{2}) + (5+\sqrt{2})^2$

f) $\sqrt{8+\sqrt{15}} \cdot \sqrt{8-\sqrt{15}}$

g) $\sqrt{\left(\sqrt[12]{\sqrt{10}}\right)^{24} - \left(\frac{1}{6}\right)^{-1}}$

34. Sendo *a* e *b* números reais não-nulos, qual o conjunto de valores que podemos obter para a expressão: $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|}$?

35. Dados $A = [-4, 5]$, $B = [-2, 6[$ e $C = [-3, 8]$, determine:

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $(A \cap C) \cup B$ d) $(A \cap B) \cap C$ e) $A - B$

36. Sabendo que $x^2 = 91^4$ e $y^3 = 91^6$, calcule $(xy)^{10}$, com $x > 0$ e $y > 0$.

37. Determine os três menores valores naturais de *p*, de modo que a expressão $\frac{p^2+3}{p-2}$ represente um número inteiro.

38. (EsPCEx) Simplifique:

a) $\left(\sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2$

b) 3,818 1... : 2,454 5...

39. (UFSC) Dados os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 < x \leqslant 17)$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ é ímpar$)$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 9 \leqslant x \leqslant 18\}$, determine a soma dos elementos que formam o conjunto $(A \cap B) - C$.

40. (Fuvest-SP) Encontre todos os conjuntos de três números inteiros consecutivos cuja soma é igual ao seu produto.

TESTES

41. (U. Católica de Salvador-BA) Efetuando-se 0,35 · 3 − 0,648 : 0,2, obtém-se:

a) −31,25 b) −2,19 c) 0,726 d) 2,01 e) 7,26

42. (UFCE) Se $p = 8 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} - \frac{\sqrt{12}}{2}$ e $q = 3\sqrt{27} - 2 \cdot \sqrt{\frac{6}{32}}$, então $2\sqrt{3}(p+q)$ é igual a:

a) 63 b) 65 c) 67 d) 69

43. (U. F. Fluminense-RJ) A desigualdade $\sqrt{a \cdot b} < \frac{a+b}{2}$ é verdadeira:

a) para todo $a, b \in \mathbb{R}_+$ tal que $a \neq b$.
b) para todo $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a \neq b$, $a \cdot b > 0$.
c) para todo $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot b < 0$.
d) para todo $a, b \in \mathbb{R}_+$ tal que $a = b$.
e) para todo $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a > b$.

RELEMBRANDO CONCEITOS

Conjunto dos números naturais

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Conjunto dos números inteiros

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Conjunto dos números racionais

$$\mathbb{Q} = \left\{x \middle| x = \frac{p}{q}, \text{ com } p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

São números racionais:

- todo número inteiro;
- todo número fracionário;
- todo número decimal exato;
- todo número decimal periódico.

Conjunto dos números irracionais

São números irracionais:

- todo número decimal não-exato e não-periódico;
- toda raiz não-exata.

Conjunto dos números reais

$$\mathbb{R} = \{x | x \text{ é racional ou } x \text{ é irracional}\}$$

Intervalos reais

Intervalo fechado $[a, b]$
Intervalo aberto $]a, b[$
Intervalo aberto à direita $[a, b[$
Intervalo aberto à esquerda $]a, b]$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

30. Escreva na forma fracionária:

a) 0,25
b) 0,252 5...
c) 0,255 5...
d) 1,2
e) 1,222...
f) 1,022 2...

31. Escreva na forma de radical:

a) $5^{\frac{3}{8}}$
b) $6^{\frac{3}{2}}$
c) $4^{\frac{1}{2}}$
d) $9^{\frac{1}{3}}$

32. Calcule o valor das potências:

a) 5^{-2}
b) $64^{\frac{1}{3}}$
c) $4^{-\frac{1}{2}}$
d) $(0,2)^{-2}$
e) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}$
f) $(2 + \sqrt{5})^0$
g) $(\sqrt{2})^2$
h) $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2$

33. Calcule o valor das expressões:

a) $\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{75}}{10}\right)^2}$

b) $\sqrt{1-0,555\ldots}$

c) $8^{\frac{1}{3}} : \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$

d) $8^{0,666\ldots} + 9^{0,5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

e) $(5+\sqrt{2}) \cdot (5-\sqrt{2}) + (5+\sqrt{2})^2$

f) $\sqrt{8+\sqrt{15}} \cdot \sqrt{8-\sqrt{15}}$

g) $\sqrt{\left(\sqrt[12]{\sqrt{10}}\right)^{24} - \left(\frac{1}{6}\right)^{-1}}$

34. Sendo *a* e *b* números reais não-nulos, qual o conjunto de valores que podemos obter para a expressão: $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|}$?

35. Dados $A = [-4, 5]$, $B = [-2, 6[$ e $C = [-3, 8]$, determine:

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $(A \cap C) \cup B$ d) $(A \cap B) \cap C$ e) $A - B$

36. Sabendo que $x^2 = 91^4$ e $y^3 = 91^6$, calcule $(xy)^{10}$, com $x > 0$ e $y > 0$.

37. Determine os três menores valores naturais de *p*, de modo que a expressão $\frac{p^2+3}{p-2}$ represente um número inteiro.

38. (EsPCEx) Simplifique:

a) $\left(\sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2$

b) 3,818 1... : 2,454 5...

39. (UFSC) Dados os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 < x \leq 17\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é ímpar}\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 9 \leq x \leq 18\}$, determine a soma dos elementos que formam o conjunto $(A \cap B) - C$.

40. (Fuvest-SP) Encontre todos os conjuntos de três números inteiros consecutivos cuja soma é igual ao seu produto.

TESTES

41. (U. Católica de Salvador-BA) Efetuando-se $0,35 \cdot 3 - 0,648 : 0,2$, obtém-se:

a) −31,25 b) −2,19 c) 0,726 d) 2,01 e) 7,26

42. (UFCE) Se $p = 8 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} - \frac{\sqrt{12}}{2}$ e $q = 3\sqrt{27} - 2 \cdot \sqrt{\frac{6}{32}}$, então $2\sqrt{3}\,(p+q)$ é igual a:

a) 63 b) 65 c) 67 d) 69

43. (U. F. Fluminense-RJ) A desigualdade $\sqrt{a \cdot b} < \frac{a+b}{2}$ é verdadeira:

a) para todo $a, b \in \mathbb{R}_+$ tal que $a \neq b$.
b) para todo $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a \neq b$, $a \cdot b > 0$.
c) para todo $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot b < 0$.
d) para todo $a, b \in \mathbb{R}_+$ tal que $a = b$.
e) para todo $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a > b$.

44. (PUC-MG) Se $a = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ e $b = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ então $a - b$ é igual a:

a) $\sqrt{6} - 3$
b) $\sqrt{6} + 3$
c) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$
d) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$
e) $\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

45. (Unifor-CE) Se a e b são números reais positivos, tais que $a \cdot b \neq 0$, e $a \neq b$, a expressão $\frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}}}$ é equivalente a:

a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
b) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$
c) $\frac{\sqrt{a}}{a} + \frac{\sqrt{b}}{b}$
d) $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{ab}$
e) $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{b + a}$

46. (FEI-SP) A fração $\frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$, quando $a = 93$ e $b = 92$, é igual a:

a) 0
b) 185
c) $93^2 - 92^2$
d) 1
e) $\frac{185}{2}$

47. (UFSE) Se $A = \left\{x \mid x = \frac{1}{n} \text{ e } n \in \mathbb{N}^*\right\}$ e $B = \left\{x \mid x = \frac{n}{n+2} \text{ e } n \in \mathbb{N}^*\right\}$, então o conjunto $A \cap B$ é igual a:

a) $\varnothing$
b) $\mathbb{Q}_+^*$
c) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$
e) $\left\{x \mid x = \frac{1}{n+2} \text{ e } n \in \mathbb{N}^*\right\}$

48. (Fuvest-SP) Os números x e y são tais que $5 \leqslant x \leqslant 10$ e $20 \leqslant y \leqslant 30$. O maior valor possível de $\frac{x}{y}$ é:

a) $\frac{1}{6}$
b) $\frac{1}{4}$
c) $\frac{1}{3}$
d) $\frac{1}{2}$
e) 1

49. (Osec-SP) Os números a e b são reais e $-1 < a < 0 < b < 1$. Então:

a) $-1 < ab < 0$
b) $ab < -1$
c) $0 < ab < b$
d) $ab > 1$
e) $b < ab < 1$

50. (Vunesp) Sejam x e y dois números reais não-nulos e distintos entre si. Das alternativas abaixo, a única necessariamente verdadeira é:

a) $-x < y$
b) $x < x + y$
c) $y < xy$
d) $x^2 \neq y^2$
e) $x^2 - 2xy + y^2 > 0$

51. (F. Santo André-SP) Para $a = -\frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{3}$, o valor numérico da expressão

$$\frac{a^2 + \frac{1-b}{a}}{b^2 + \frac{1-b}{a}} \text{ é:}$$

a) $\frac{39}{52}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{39}{44}$ d) $\frac{57}{52}$ e) $\frac{3}{5}$

52. Sejam os números reais *a*, *b* e *c*.

a) Se $a > b$ e $ac > bc$, então $c = 1$.
b) Se $a > b$ e $ac > bc$, então $c \geqslant 2$.
c) Se $a < b$ e $ac < bc$, então $c < 0$.
d) Se $a < b$ e $ac > bc$, então $c < 0$.
e) Se $a > b$ e $ac < bc$, então $c < -1$.

53. (PUC-MG) Sendo *x* real positivo e *y* real negativo, a afirmativa correta é:

a) $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$

b) $\sqrt{\frac{x^2}{y^2}} = \frac{x}{y}$

c) $\sqrt{x^2 \cdot y^2} = x \cdot y$

d) $\sqrt{\frac{x^2}{y^2}} = -\frac{x}{y}$

e) $\sqrt{x^2 + y^2} = y - x$

54. (UFPE) Qual das afirmativas abaixo não é verdadeira, a respeito do número natural $\frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$?

a) É par.
b) É múltiplo inteiro de 3.
c) É múltiplo inteiro de 7.
d) É múltiplo inteiro de 13.
e) É múltiplo inteiro de 19.

55. (Cesgranrio) *A*, *B* e *C* tentam adivinhar um número selecionado ao acaso no conjunto {1, 2, ..., 100}. Ganha um prêmio quem mais se aproximar do número selecionado. Se *A* decidiu-se por 33 e *B* escolheu 75, qual a melhor escolha que *C* pode fazer?

a) 16 b) 32 c) 48 d) 54 e) 76

56. (UFPE) Assinale a afirmativa correta.

a) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - 2\sqrt{6}$ é um número irracional.

b) 0,6% de $3\frac{1}{3}$ é igual a 0,2.

c) $\frac{0,178\ 178\ 178}{0,505\ 05}$ é um número real irracional.

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{30} < \left(\frac{2}{5}\right)^{50}$

e) $\left|\frac{1}{11} - \frac{1}{12}\right| = \frac{1}{12} - \frac{1}{11}$

57. (Unifor-CE) Se *a* e *b* são números reais positivos, a expressão

$\left(a + 2a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} + b\right) \cdot \left(a - 2a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} + b\right)$ é equivalente a:

a) $(a + b)^2$
b) $(a - b)^2$
c) $4ab$
d) $a^2 - b^2$
e) $a^2 + b^2$

58. (U. F. Santa Maria-RS) Quando se multiplica um número inteiro *N*, estritamente positivo, por $(0{,}02)^2$, esse número *N* fica:

a) dividido por quatro milésimos.
b) multiplicado por quatro centésimos.
c) diminuído de 2 500 unidades.
d) multiplicado por 2 500.
e) dividido por 2 500.

59. (Osec-SP) Dados os números reais *a* e *b* tais que $0 < a < b$, então é sempre verdadeiro que:

a) $\frac{a}{b} < \frac{2a}{2b}$

b) $\frac{a+1}{b} < \frac{b+1}{a}$

c) $\frac{a}{b} < \frac{a^2}{b^2}$

d) $\frac{b}{a} < \frac{a}{b}$

e) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

60. (UnB-DF) Sabendo que *x* e *y* são grandezas que tornam verdadeira a afirmação "se $x = 2$, então $y < 0$", pode concluir-se que:

a) se $x \neq 2$, então $y \geqslant 0$.
b) se $y = -1$, então $x = 2$.
c) se $y = 1\,000$, então $x \neq 2$.
d) se $x = 2$, então $y \neq 0$.

Capítulo

3 Funções

1. Introdução

O conceito de função, um dos mais importantes da matemática, surge toda vez que procuramos estabelecer uma relação entre duas grandezas variáveis.

Assim, se considerarmos um tanque com 1 200 ℓ de capacidade e uma torneira que despeja nele 30 ℓ de água por minuto, o volume de água despejada dependerá do tempo que a torneira ficar aberta:

- após 1 min, será de 30 ℓ;
- após 2 min, será de $2 \cdot 30\ \ell = 60\ \ell$;
- após 5 min, será de $5 \cdot 30\ \ell = 150\ \ell$;
- após 10 min, será de $10 \cdot 30\ \ell = 300\ \ell$;
- após 40 min, será de $40 \cdot 30\ \ell = 1\,200\ \ell$, momento em que o tanque ficará totalmente cheio.

Indicando o tempo (em minutos) por t e o volume de água (em litros) por v, podemos construir a seguinte tabela:

Tempo (t)	1	2	3	...	40
Volume (v)	30	60	90	...	1 200

Observe que **as variáveis** t e v se relacionam pela igualdade $v = 30 \cdot t$, com $0 \leqslant t \leqslant 40$. Observe ainda que a cada valor atribuído à variável t encontramos um único valor para a variável v. Essa situação constitui um exemplo de função. Nela dizemos que v é função de t. A relação $v = 30t$ é chamada **lei de associação** ou **lei de formação da função**.

O conceito de função não se aplica somente em matemática, mas também no desenvolvimento de muitas teorias de várias ciências.

Vejamos outras situações que são exemplos de funções:

- O preço da taxa de água a ser paga mensalmente é função da quantidade de água consumida.
- O tempo gasto por um carro para percorrer determinada distância é função de sua velocidade.
- O comprimento C de uma circunferência é função de seu raio r, definido pela lei:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot r$$

- A área S de um quadrado é função da medida de seu lado. Se x for a medida do lado, a lei que relaciona S com x é:

$$S = x \cdot x \quad \text{ou} \quad S = x^2$$

• Os dados da tabela abaixo mostram um inter-relacionamento entre y e x, dado pela lei: $y = x + 3$.

x	2	3	4	5	6
y	5	6	7	8	9

Vamos agora realizar um estudo sobre funções usando as noções sobre conjuntos. Para isso necessitamos da noção de par ordenado.

2. Par ordenado

Ao escrevermos os elementos de um conjunto, nós o fazemos sem a preocupação com a ordem dos mesmos. Desse modo, $\{a, b, c\} = \{c, b, a\}$. Se, porém, é dado um conjunto com dois elementos $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$, onde necessariamente $\boldsymbol{m}$ deva ser o primeiro elemento e $\boldsymbol{n}$ o segundo, então o conjunto desses elementos é chamado **par ordenado** e será representado por $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$. Os parênteses em substituição às chaves indicam que a ordem dos elementos deve ser considerada. Assim, se $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ são números reais, então (a, b) é um par ordenado de números reais, em que o **primeiro elemento** é $\boldsymbol{a}$ e o **segundo elemento** é $\boldsymbol{b}$.

Propriedade

Dois pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais se e somente se $a = c$ e $b = d$.

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

Exemplos

Vamos calcular a e b nos seguintes casos:

a) $(a, b) = (2, 5)$

b) $(a + 1, 6) = (5, 2b)$

Solução:

a) $(a, b) = (2, 5)$

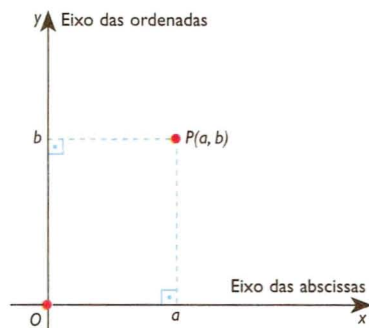
De acordo com a propriedade anterior, temos: $a = 2$ e $b = 5$.

b) $(a + 1, 6) = (5, 2b)$

Temos: $a + 1 = 5 \Rightarrow a = 4$ e $2b = 6 \Rightarrow b = 3$.

Gráfico cartesiano do par ordenado

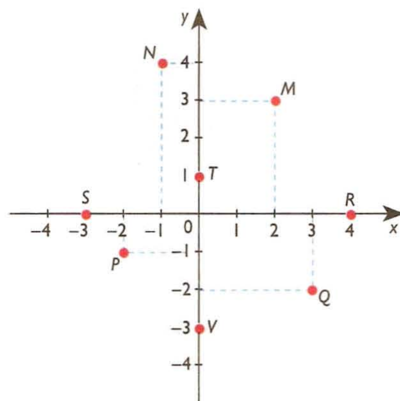
Todo **par ordenado** de números reais pode ser representado no plano cartesiano por **um ponto**. Associando-se ao par (a, b) o ponto P, cuja representação no plano cartesiano é vista a seguir, dizemos que:



- P é o ponto de **coordenadas** $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$;
- o número $\boldsymbol{a}$ é chamado **abscissa** de P;
- o número $\boldsymbol{b}$ é chamado **ordenada** de P;
- a origem do sistema é o ponto $O(0, 0)$.

Observe a representação dos pontos:

a) $M(2, 3)$
b) $N(-1, 4)$
c) $P(-2, -1)$
d) $Q(3, -2)$
e) $R(4, 0)$
f) $S(-3, 0)$
g) $T(0, 1)$
h) $V(0, -3)$



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Estabeleça a lei que relaciona *y* com *x* levando em conta os dados da seguinte tabela:

x	1	2	3	4	5
y	3	5	7	9	11

2. Determine *a* e *b* de modo que:

a) $(a + 5, b + 4) = (2a - 3, 8)$
b) $(3a - 5, 2b + 1) = (3 - 5a, 5 - b)$
c) $(a^2 - 7a, 3b) = (-12, 5b - 4)$
d) $(a, 3a) = (2b - 1, 5b)$

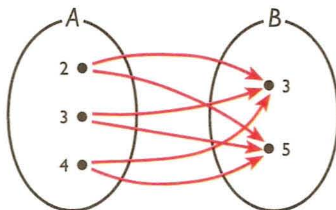
3. Represente num mesmo plano cartesiano os pontos $A(3, 2)$, $B(-2, -3)$, $C(4, -1)$, $D(0, 3)$, $E(-4, 0)$ e $F(-3, 4)$.

3. Produto cartesiano

Dados os conjuntos $A = \{2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 5\}$, vamos formar todos os pares ordenados onde o primeiro elemento pertence a A e o segundo, a B.

Temos: (2, 3); (2, 5); (3, 3); (3, 5); (4, 3); (4, 5). Ao conjunto de todos esses pares ordenados chamaremos **produto cartesiano de *A* por *B*** e o indicaremos por $A \times B$.

Podemos representar graficamente um produto cartesiano indicando os pares ordenados por meio de flechas.



Portanto:

$$A \times B = \{(2, 3); (2, 5); (3, 3); (3, 5); (4, 3); (4, 5)\}$$

De um modo geral:

> Se A e B são conjuntos não-vazios, chama-se **produto cartesiano de A por B** o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) em que $x \in A$ e $y \in B$, isto é:
>
> $$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Observação: se $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$, então $A \times B = \varnothing$.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1

Dados $A = \{1, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$, determinar:

a) $A \times B$ b) $B \times A$ c) $A^2 = A \times A$

Solução

Temos:

a) $A \times B = \{(1, 2); (1, 3); (1, 4); (3, 2); (3, 3); (3, 4)\}$
b) $B \times A = \{(2, 1); (2, 3); (3, 1); (3, 3); (4, 1); (4, 3)\}$
c) $A^2 = A \times A = \{(1, 1); (1, 3); (3, 1); (3, 3)\}$

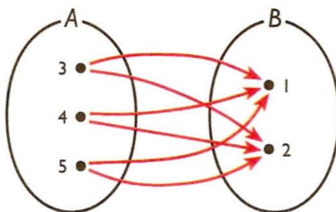
Observe que o produto cartesiano não é **comutativo**, isto é, $A \times B \neq B \times A$.

Exemplo 2

Dados $A = \{3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2\}$, determinar o número de elementos de $A \times B$.

Solução

O esquema nos mostra que cada elemento de A dá origem a dois pares ordenados. Como A tem 3 elementos, então o número de elementos de $A \times B$ é $3 \cdot 2 = 6$. De um modo geral, se A tem m elementos e B tem n elementos, então $A \times B$ terá $m \cdot n$ elementos.



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

4. Dados os conjuntos $A = \{-2, 0, 2\}$ e $B = \{-1, 1\}$, determine:

a) $A \times B$ b) $B \times A$ c) A^2 d) B^2

5. Dados $A = \{5, 6\}$ e $B = \{3, 4, 5, 6\}$, determine o número de elementos de:

a) $A \times B$ b) $A \times A$ c) $B \times A$ d) B^2

6. Sejam A e B dois conjuntos tais que $n(A) = 10$ e $n(B) = 3$. Ache $n(A \times B)$.

7. Sendo A e B dois conjuntos, calcule x nos seguintes casos:

a) $n(A) = 6$, $n(B) = x + 5$ e $n(A \times B) = 54$
b) $n(A) = 3$, $n(B) = 7$ e $n(A \times B) = 5x + 1$
c) $n(A) = x$, $n(B) = x - 2$ e $n(A \times B) = 48$
d) $n(A) = 2x - 1$, $n(B) = x + 3$ e $n(A \times B) = 8x - 1$

Exemplo 3

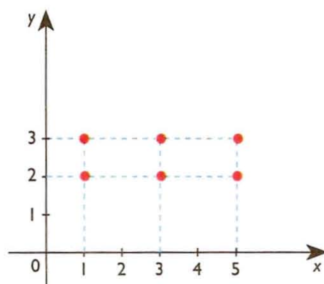
Representar no plano cartesiano os produtos $A \times B$ nos seguintes casos:

a) $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{2, 3\}$
b) $A = [1, 4]$ e $B = [1, 3[$
c) $A = \{2\}$ e $B = [-3, 3]$
d) $A = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} | y \geq 3\}$

Solução

a) $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{2, 3\}$

O gráfico de $A \times B$ é formado por todos os pontos cuja abscissa é elemento de A e cuja ordenada é elemento de B. Logo, $A \times B =$ $= \{(1, 2); (1, 3); (3, 2); (3, 3); (5, 2); (5, 3)\}$. Colocando esses pares ordenados no plano cartesiano, teremos sua representação cartesiana.



b) $A = [1, 4]$ e $B = [1, 3[$

Pelos pontos de abscissas 1 e 4, traçamos retas perpendiculares ao eixo dos x.

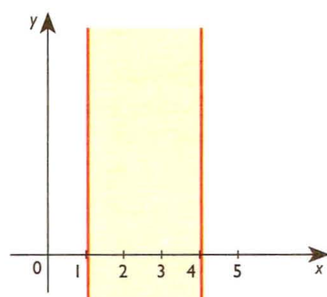


Gráfico de A

Pelos pontos de ordenadas 1 e 3 traçamos retas paralelas ao eixo dos x. Como 3 não pertence ao intervalo $[1, 3[$, a reta que passa pela ordenada 3 será tracejada.

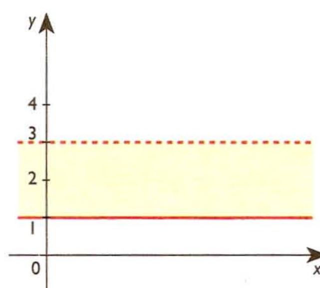


Gráfico de B

A região retangular representa o gráfico de $A \times B$.

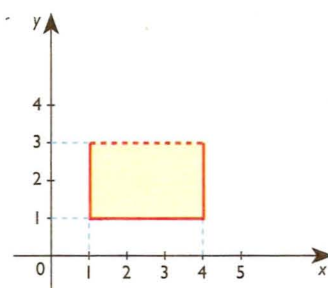


Gráfico de $A \times B$

c) $A = \{2\}$ e $B = [-3, 3]$

Pelo ponto de abscissa 2 traçamos uma reta perpendicular ao eixo dos x.

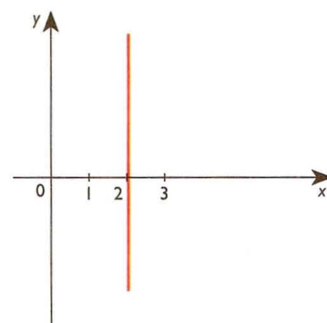


Gráfico de A

Pelos pontos de ordenadas -3 e 3 traçamos retas paralelas ao eixo dos x.

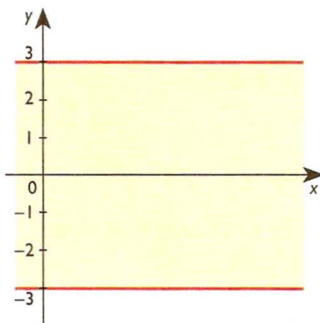


Gráfico de B

O segmento de reta que liga o ponto $(2, -3)$ ao ponto $(2, 3)$ representa o gráfico de $A \times B$.

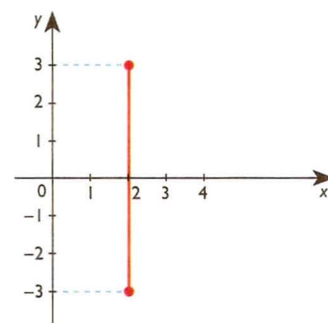
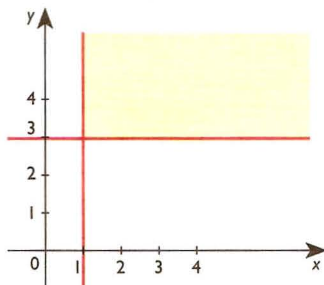


Gráfico de $A \times B$

d) $A = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} | y \geq 3\}$



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

8. Represente no plano cartesiano os produtos $A \times B$ nos seguintes casos:

a) $A = \{-3, -1, 1, 3\}$ e $B = \{2, 4\}$

b) $A = \{1, 4\}$ e $B = \{-3, -2, 2, 3\}$

c) $A = \{2\}$ e $B = [1, 4]$

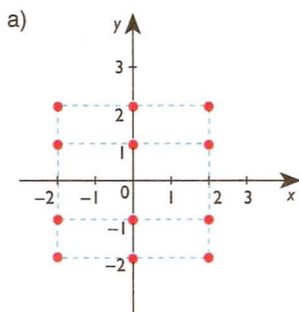
d) $A = [-2, 3]$ e $B = \{3\}$

e) $A = [1, 4]$ e $B = [2, 4]$

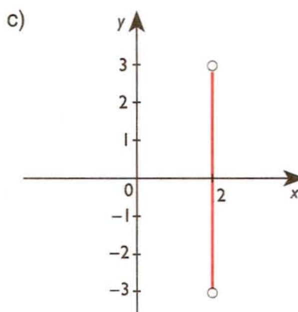
f) $A = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} | y \geq 2\}$

9. Os gráficos a seguir representam produtos cartesianos de A por B. Identifique, em cada caso, o conjunto A e o conjunto B.

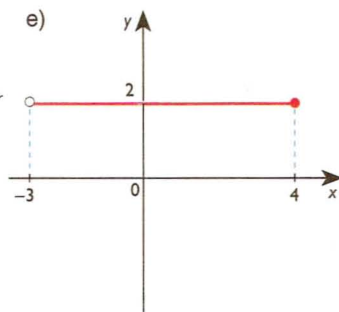
a)



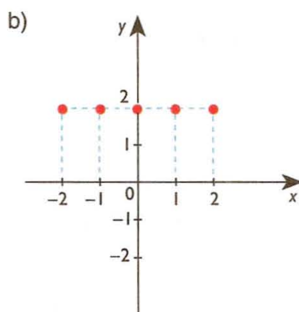
c)



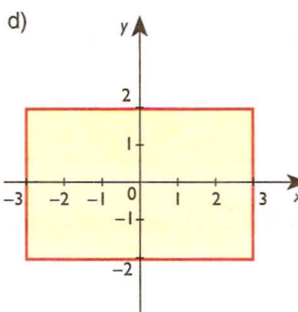
e)



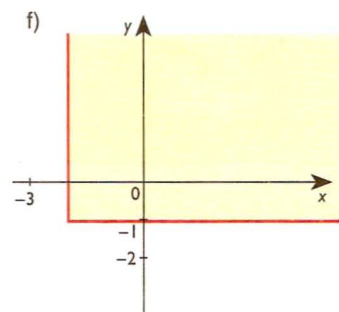
b)



d)



f)



4. Noção de relação

Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$, temos:

$A \times B = \{(1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (3, 5)\}$

Destaquemos de $A \times B$, por exemplo, o conjunto R formado pelos pares (x, y) que satisfaçam a seguinte lei de associação: $x + y = 5$, ou seja:

$$R = \{(x, y) \in A \times B \mid x + y = 5\}$$

Na tabela abaixo estão todos os valores de $x + y$, com destaque para aqueles cuja soma é 5.

x	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3
y	2	3	4	5	2	3	4	5	2	3	4	5
$x + y$	3	4	5	6	4	5	6	7	5	6	7	8

Essa tabela nos mostra que R é dado por:

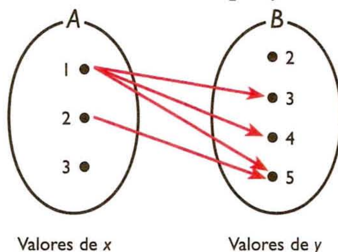
$$R = \{(1, 4); (2, 3); (3, 2)\}$$

Observe que $R \subset A \times B$.

Consideremos um outro conjunto S de $A \times B$, cuja lei de associação seja dada por $y > 2x$, ou seja:

$$S = \{(x, y) \in A \times B \mid y > 2x\}$$

O diagrama de flechas nos mostra os casos em que $y > 2x$.



Temos, portanto:

$$S = \{(1, 3); (1, 4); (1, 5); (2, 5)\}$$

Observe que $S \subset A \times B$.

Os conjuntos R e S, subconjuntos de $A \times B$, constituem exemplos de **relações de A em B**.

De um modo geral:

> Dados dois conjuntos A e B, chama-se relação de A em B qualquer subconjunto de $A \times B$, isto é:
>
> $$R \text{ é uma relação de } A \text{ em } B \iff R \subset A \times B$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

10. Dados os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 3\}$ e $B = \{0, 1, 2, 4, 6, 10\}$, determine as seguintes relações de A em B:

a) $R_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x + 4\}$

b) $R_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2\}$

c) $R_3 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = |2x|\}$

11. Sendo $A = \left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, 0\right\}$, determine:

a) $R_1 = \{(x, y) \in A^2 \mid y = x^{-1}\}$

b) $R_2 = \left\{(x, y) \in A^2 \mid y = x + \frac{1}{2}\right\}$

12. Sendo $A = \{1, 2, 3, 6, 9\}$, determine as seguintes relações:

a) $R = \{(x, y) \in A^2 | x \cdot y = 18\}$

b) $S = \{(x, y) \in A^2 | x^2 + y^2 < 20\}$

13. Determine as seguintes relações:

a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | 2x + y = 10\}$

b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} | x^2 + y^2 = 25\}$

5. Noção matemática de função

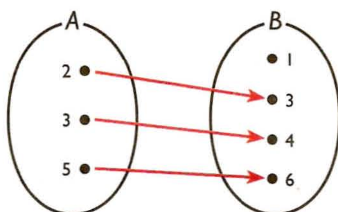
Sejam dados, por exemplo, os conjuntos $A = \{2, 3, 5\}$ e $B = \{1, 3, 4, 6\}$.

Vamos considerar os conjuntos de pares (x, y), tais que $x \in A$ e $y \in B$.

Sabemos que qualquer um desses conjuntos é chamado **relação de *A* em *B***; porém, se a relação associar **cada elemento de *A* a um único elemento de *B***, dizemos que ela é uma **função de *A* em *B***.

Tomemos, por exemplo, o conjunto dos pares $(x, y) \in A \times B$, definidos pela lei de associação: $y = x + 1$.

Veja o esquema:



Chamando de R essa relação, temos que:

$$R = \{(x, y) \in A \times B | y = x + 1\},$$

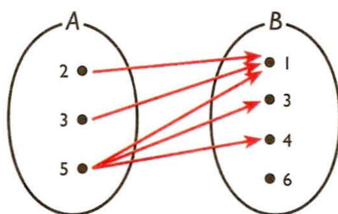
ou seja:

$$R = \{(2, 3); (3, 4); (5, 6)\}$$

Observe que **cada *x*** pertencente a A está associado a um **único** y pertencente a B. Nesse caso, a relação é **uma função** de A em B.

Consideremos agora o conjunto dos pares $(x, y) \in A \times B$, definidos pela lei de associação: $y < x$.

Veja o esquema:



Chamando de S essa relação, temos que:

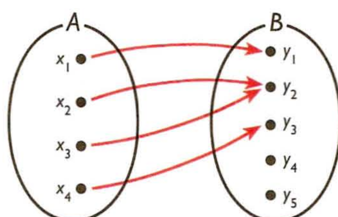
$$S = \{(x, y) \in A \times B | y < x\},$$

ou seja:

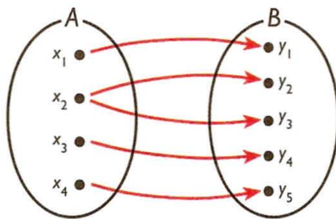
$$S = \{(2, 1); (3, 1); (5, 1); (5, 3); (5, 4)\}$$

Nesse caso, não acontece de **cada** x pertencente a A estar associado a um **único** y pertencente a B. Assim sendo, a relação S **não é função** de A em B.

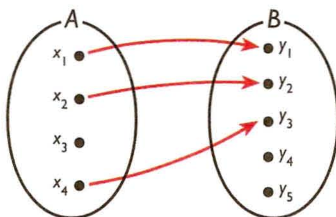
Observe as relações de $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ em $B = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ mostradas nos seguintes esquemas:



Esta relação **é função** de A em B, pois para cada x de A está associado um único y de B.



Esta relação **não é função** de A em B, pois o elemento x_2 de A está associado a mais de um elemento de B.



Esta relação **não é função** de A em B, pois o elemento x_3 de A não está associado a nenhum elemento y de B.

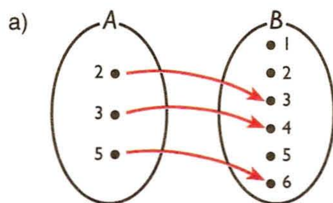
De um modo geral:

Dados os conjuntos A e B, não-vazios, e uma relação R de A em B, dizemos que R é uma **função de A em B** se para cada x de A existir em correspondência um único y de B.

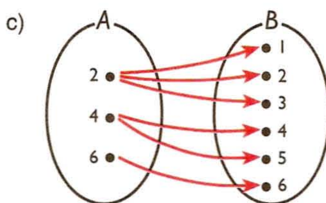
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

14. Os esquemas abaixo representam relações de A em B. Indique as relações que são funções.

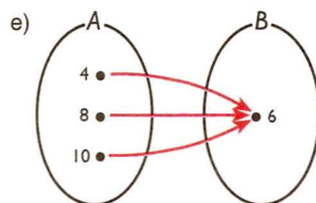
a)



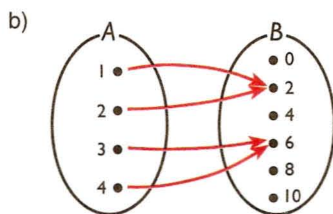
c)



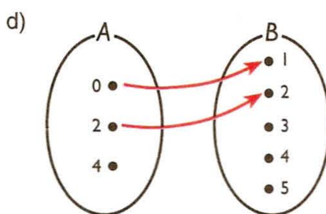
e)



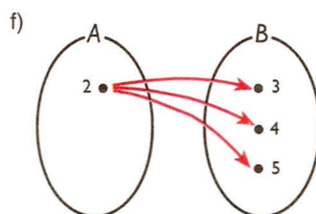
b)



d)



f)



15. Dados os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, construa o esquema de flechas e, através dele, identifique as relações que são funções.

a) $R_1 = \{(-2, 0); (-1, 1); (0, 2); (1, 3); (2, 4)\}$
b) $R_2 = \{(-2, 0); (-2, 1); (0, 2); (0, 4)\}$
c) $R_3 = \{(-2, 2); (-1, 2); (0, 3); (1, 3); (2, 4)\}$
d) $R_4 = \{(0, 0); (1, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4)\}$

16. Sendo $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, identifique as relações que são funções.

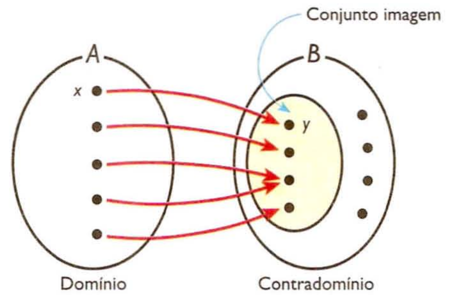
a) $R_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2\}$
b) $R_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 1\}$
c) $R_3 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x + 1\}$

6. Linguagem das funções

Dados dois conjuntos não-vazios A e B, e uma lei f que associa **a cada elemento x de A um único elemento y de B**, teremos uma função f de A em B.

1º) Ao conjunto A dá-se o nome de **domínio** da função. Indica-se o domínio da função f por D ou D(f). Logo, $D(f) = A$.

2º) Ao conjunto B dá-se o nome de **contradomínio** da função. Indica-se o contradomínio da função f por C(f). Logo, $C(f) = B$.



3º) Ao elemento y de B, associado ao elemento x de A, dá-se o nome de **imagem** de x, pela função f. Indica-se que y é a imagem de x pela notação $y = f(x)$ (lê-se: y é igual a f de x).

4º) Ao conjunto dos elementos y de B, que são imagens dos elementos x de A, dá-se o nome de **conjunto imagem** ou simplesmente imagem da função. Indica-se o conjunto imagem da função por Im ou Im(f). Para toda função, $\text{Im} \subset B$.

5º) Indica-se que f é uma função de A em B pela notação $f\colon A \to B$ (lê-se: f de A em B).

Observação: a função também poderia ter sido indicada por qualquer outra letra.

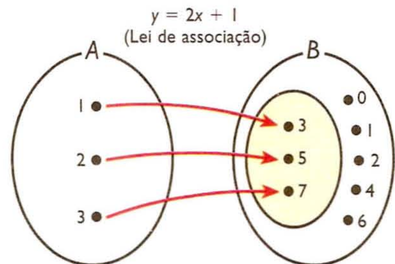
Para que uma função fique bem definida é preciso que sejam dados os conjuntos não-vazios A e B e uma lei que associe a cada x de A um único elemento y de B.

Vejamos os exemplos.

Exemplo 1

Dados os conjuntos
$A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,
consideremos a função $f\colon A \to B$,
definida por $f(x) = 2x + 1$ ou $y = 2x + 1$.
Temos:

Para $x = 1 \Rightarrow y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$.
Para $x = 2 \Rightarrow y = 2 \cdot 2 + 1 = 5$.
Para $x = 3 \Rightarrow y = 2 \cdot 3 + 1 = 7$.
Logo, $f = \{(1, 3); (2, 5); (3, 7)\}$.



Indica-se que 3 é a imagem de 1, pela função f, por $f(1) = 3$.
Da mesma forma, temos: $f(2) = 5$ e $f(3) = 7$.
O conjunto imagem dessa função é $\text{Im}(f) = \{3, 5, 7\}$.

Exemplo 2

Dado $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, determinar o conjunto imagem da função $f\colon A \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$.

Solução

Temos: $f(-2) = (-2)^2 = 4$ $\quad f(1) = 1^2 = 1$
$f(-1) = (-1)^2 = 1$ $\quad f(2) = 2^2 = 4$
$f(0) = (0)^2 = 0$

Portanto $\text{Im}(f) = \{0, 1, 4\}$.

Exemplo 3
Dada a função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$, calcular o valor de x para que $f(x) = 0$.

Solução
$f(x) = 0 \Rightarrow 0 = 2x^2 - 7x + 3$
$2x^2 - 7x + 3 = 0$
$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 49 - 24 = 25 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5$

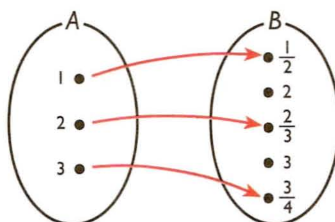
$$x = \frac{-(-7) \pm 5}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm 5}{4} \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}.$$

Como $D(f) = \mathbb{N}$, então $x = 3$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

17. O diagrama representa uma função de A em B. Pede-se:

a) $f(1)$
b) $f(2)$
c) $f(3)$
d) $D(f)$
e) $C(f)$
f) $Im(f)$



18. Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 5x - 3$, determine:

a) $f(-2)$
b) $f\left(\frac{1}{5}\right)$
c) $f(0)$
d) $f(-3)$
e) x, sabendo que $f(x) = 2$
f) x, sabendo que $f(x) = -1$

19. Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 5x^2 - 8x + 3$, calcule:

a) $f(-1)$
b) $f(0)$
c) $f\left(\frac{1}{2}\right)$
d) $f(\sqrt{2})$
e) x, de modo que $f(x) = 0$
f) x, de modo que $f(x) = 7$

20. Dados os conjuntos $A = \{-1, 0, 1\}$ e $B = \left\{-3, 0, \frac{1}{3}, 1, 2, 3, 4\right\}$, determine o conjunto imagem da função $f: A \to B$, definida por:

a) $f(x) = x + 3$
b) $f(x) = 3x$
c) $f(x) = 3^x$
d) $f(x) = \frac{|x|}{3}$

21. Dada a função f de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 3x - 3$, determine x, tal que $f(x) = 1$.

Exemplo 4
Sendo $f(x - 5) = 3x - 8$ uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, calcular $f(x)$.

Solução
Fazendo $x - 5 = t$, temos: $x = t + 5$.
Substituindo, em $f(x - 5) = 3x - 8$, x por $t + 5$, teremos:
$f(t) = 3 \cdot (t + 5) - 8 \Rightarrow f(t) = 3t + 15 - 8 \Rightarrow f(t) = 3t + 7$.
Logo, $f(x) = 3x + 7$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

22. Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x + 1) = 5x - 2$, calcule $f(x)$.

23. Na função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(3x - 2) = 2x + 5$, calcule $f(4)$.

24. Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x + 2) = x + 2$, calcule $\frac{f(3)}{f(4)}$.

25. Dadas as funções $f(3x + 1) = x + 2$ e $g(x - 3) = 4x + 7$, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, calcule o valor de $f(4) + g(-1)$.

7. Domínio de uma função real de variável real

Vimos que para definir uma função é necessário conhecermos dois conjuntos A e B não-vazios e a lei que associa a cada elemento x de A um único elemento y de B. No entanto, é comum definirmos uma função f apenas pela lei de associação, sem especificarmos os conjuntos A e B. Nesse caso, convencionaremos que A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}$ e diremos que f é uma **função real de variável real**.

O conjunto A, domínio da função f, será formado por todos os valores reais de x, para os quais as operações indicadas na lei de associação sejam possíveis em $\mathbb{R}$.

Exemplo

Determinar o domínio das seguintes funções de variável real:

a) $y = x^2 + 3x$

b) $y = \frac{1}{x}$

c) $f(x) = \frac{x}{x - 2}$

d) $y = \sqrt[3]{3x - 2}$

e) $f(x) = \sqrt{3x - 2} + \sqrt{-x + 4}$

f) $f(x) = \frac{\sqrt{x + 2}}{\sqrt{-x + 4}}$

Solução

a) $y = x^2 + 3x$

Substituindo x por qualquer número real, obteremos para y um valor real.

Logo, $D(f) = \mathbb{R}$.

b) $y = \frac{1}{x}$

A expressão $\frac{1}{x}$ somente terá sentido se $x \neq 0$.

Logo, $D(f) = \mathbb{R}^*$.

c) $f(x) = \frac{x}{x - 2}$

A expressão $\frac{x}{x - 2}$ somente terá sentido se $x - 2 \neq 0$, ou seja, se $x \neq 2$.

Logo, $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$ ou $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$.

d) $y = \sqrt[3]{3x - 2}$

Substituindo x por qualquer número real, obteremos para y um valor real.

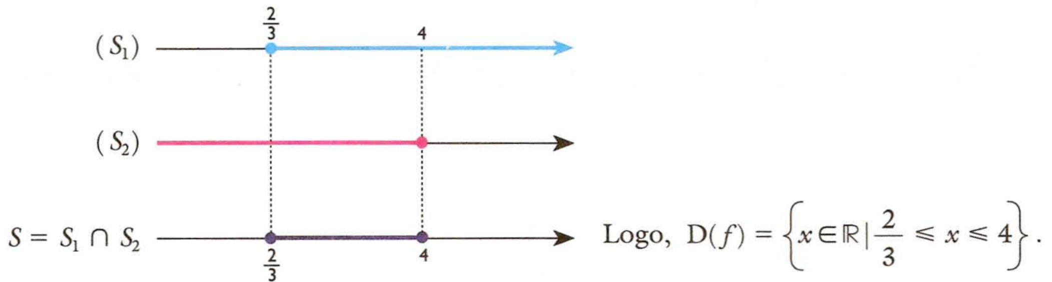
Logo, $D(f) = \mathbb{R}$.

e) $f(x) = \sqrt{3x - 2} + \sqrt{-x + 4}$

Devemos ter simultaneamente:

$$\begin{cases} 3x - 2 \geqslant 0 \Rightarrow 3x \geqslant 2 \Rightarrow x \geqslant \dfrac{2}{3} & (S_1) \\ -x + 4 \geqslant 0 \Rightarrow -x \geqslant -4 \Rightarrow x \leqslant 4 & (S_2) \end{cases}$$

Determinemos a solução comum:



Logo, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{2}{3} \leqslant x \leqslant 4\right\}$.

f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 2}}{\sqrt{-x + 4}}$

Devemos ter simultaneamente:

$x + 2 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -2$

$-x + 4 > 0 \Rightarrow -x > -4 \Rightarrow x < 4$

Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x < 4\}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

26. Determine o domínio das funções.

a) $y = 3x + 2$

b) $y = x^2 - 4$

c) $y = \dfrac{2x - 1}{x - 2}$

d) $y = \sqrt{3x + 5}$

e) $y = \sqrt[3]{3x + 5}$

f) $y = \dfrac{2x - 1}{\sqrt{3x + 5}}$

g) $y = \dfrac{3x + 1}{x^2 - 1}$

h) $y = \dfrac{x + 4}{x^2 - 7x + 12}$

i) $y = \sqrt[6]{-3x + 1}$

j) $y = \dfrac{\sqrt{3x + 5}}{2x - 1}$

l) $y = \dfrac{5}{x} + \dfrac{2}{x - 2}$

m) $y = \dfrac{5}{x} + \dfrac{2}{\sqrt{x - 2}}$

n) $y = \dfrac{5}{x} + \dfrac{2}{\sqrt{x + 2}}$

o) $y = \sqrt{x - 2} + \sqrt{2x - 1}$

p) $y = \sqrt{x - 2} + \dfrac{x - 1}{x + 3}$

8. Gráfico de uma função

Dada uma relação f (função ou não), se representarmos no plano cartesiano todos os pares ordenados (x, y), com $x \in D(f)$ e $y = f(x)$, obteremos um conjunto de pontos que é o gráfico de f.

Exemplo 1

Representar no plano cartesiano o gráfico da função $f(x) = 2x - 1$, nos casos em que o domínio seja:

a) $D(f) = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 3\}$ c) $D(f) = \mathbb{R}$

Solução

a) $D(f) = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

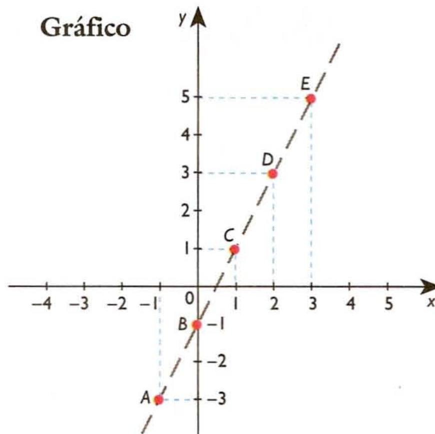
Para cada $x \in D(f)$, vamos encontrar o valor $y = 2x - 1$. Com isso obteremos os pares (x, y), que representados no plano cartesiano pelos pontos A, B, C, D, E nos dão o gráfico da função.

Para $x = -1 \Rightarrow y = f(-1) = 2(-1) - 1 = -3$.
Para $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$.
Para $x = 1 \Rightarrow y = f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$.
Para $x = 2 \Rightarrow y = f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$.
Para $x = 3 \Rightarrow y = f(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$.

Tabela

x	y	(x, y)
–1	–3	$A(-1, -3)$
0	–1	$B(0, -1)$
1	1	$C(1, 1)$
2	3	$D(2, 3)$
3	5	$E(3, 5)$

Gráfico



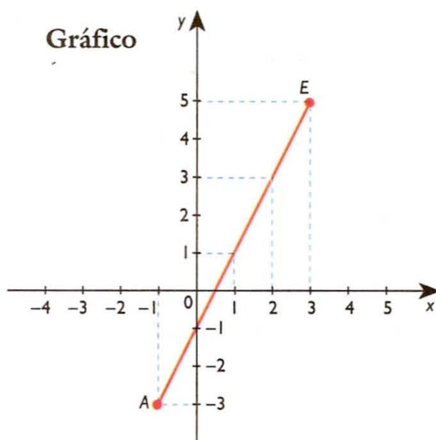
Observe que os pontos A, B, C, D e E estão apoiados sobre uma reta. Isso acontece para qualquer ponto determinado pela função $y = 2x - 1$.

b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 3\}$

Agora, além dos pontos A, B, C, D, E, devemos considerar também o conjunto de todos os pontos (x, y) com x entre -1 e 3 e $y = 2x - 1$. Nesse caso, o gráfico é o segmento $\overline{AE}$.

Atenção: pontos destacados na extremidade de um gráfico indicam seu início ou fim.

Gráfico

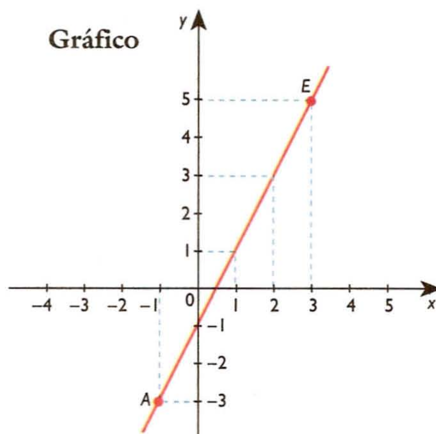


c) $D(f) = \mathbb{R}$

Nesse caso, o gráfico da função $y = 2x - 1$ é a reta $\overleftrightarrow{AE}$.

Atenção: como não existem pontos destacados nos extremos do gráfico, isso significa que o gráfico prossegue indefinidamente.

Gráfico



Exemplo 2

Construir o gráfico da função $y = f(x) = x^2 - 1$, nos seguintes casos:

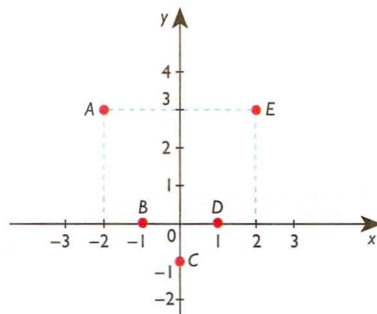
a) $D(f) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$ c) $D(f) = \mathbb{R}$

Solução

a) **Tabela**

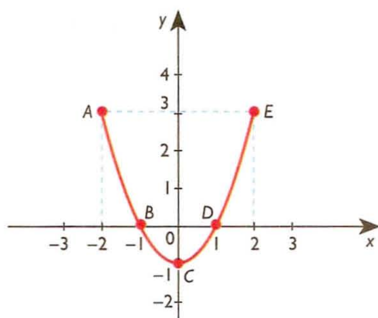
x	y	Ponto (x, y)
–2	3	$A(-2, 3)$
–1	0	$B(-1, 0)$
0	–1	$C(0, -1)$
1	0	$D(1, 0)$
2	3	$E(2, 3)$

Gráfico

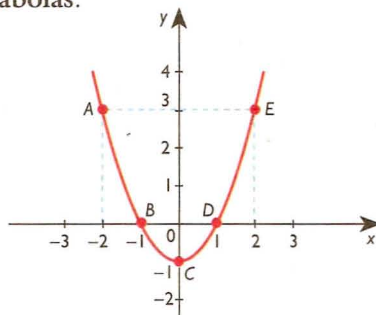


O gráfico é o conjunto dos pontos A, B, C, D e E.

b) O gráfico é a curva abaixo.



c) O gráfico da função $y = x^2 - 1$ é a curva abaixo. Curvas desse tipo são chamadas **parábolas**.



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

27. Construa o gráfico da função $f(x) = 2x + 1$ nos seguintes casos:

a) $D(f) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ b) $D(f) = [-2, 2]$ c) $D(f) = \mathbb{R}$

28. Construa o gráfico da função $f(x) = x^2 - 3$ nos seguintes casos:

a) $D(f) = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ b) $D(f) = [-3, 3]$ c) $D(f) = \mathbb{R}$

29. Construa o gráfico da função $f(x) = 4 - x^2$ nos seguintes casos:

a) $D(f) = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 3\}$ c) $D(f) = \mathbb{R}$

30. Construa o gráfico da função $f(x) = 2^{x+1}$ nos seguintes casos:

a) $D(f) = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$ b) $D(f) = [-3, 1]$ c) $D(f) = \mathbb{R}$

31. Construa o gráfico da função $f(x) = \dfrac{2}{x}$ nos seguintes casos:

a) $D(f) = \left\{-2, -1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 1, 2\right\}$ b) $D(f) = \mathbb{R}^*$

32. Construa o gráfico da função $f(x) = x^3$, sendo $D(f) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

9. Análise de gráficos

Ao examinarmos o gráfico de uma relação R, é possível obter através dele algumas informações sobre as propriedades que a caracterizam, como por exemplo:

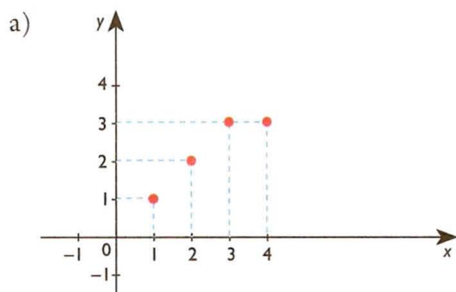
- reconhecer se R é ou não é função;
- se R for uma função, identificar graficamente o domínio e o conjunto imagem e determinar, se existirem, os valores de x para os quais $R(x) = 0$.

Como reconhecer quando um gráfico representa uma função

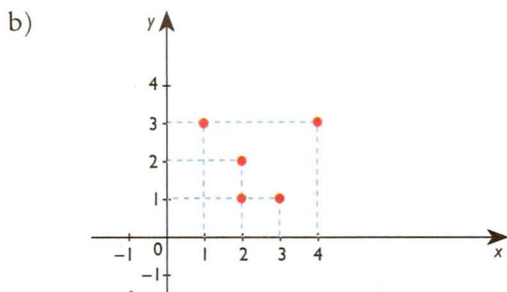
Exemplo 1

Verificar se os conjuntos de pontos das figuras constituem gráficos de uma função com domínio D = {1, 2, 3, 4}:

a)



b)



Solução

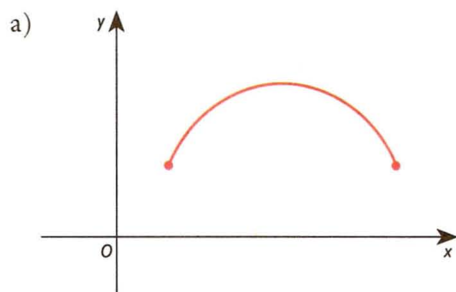
a) O gráfico representa uma função, pois cada $x \in$ D tem uma única imagem.

b) O gráfico não representa função, pois o elemento $x = 2$ tem duas imagens: $y = 1$ e $y = 2$.

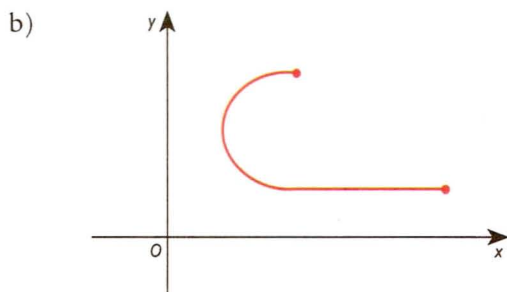
Exemplo 2

Reconhecer, a seguir, as curvas que representam funções:

a)



b)



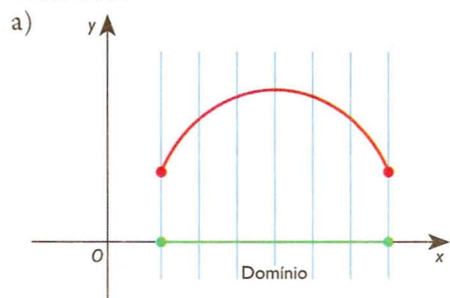
Solução

Para reconhecer se uma curva representa ou não uma função, basta verificar se qualquer reta paralela ao eixo Oy e que passe por um ponto do domínio:

- encontra a curva em um só ponto; nesse caso a curva é gráfico de uma função;
- não encontra a curva ou a encontra em mais de um ponto; nesse caso a curva não é gráfico de uma função.

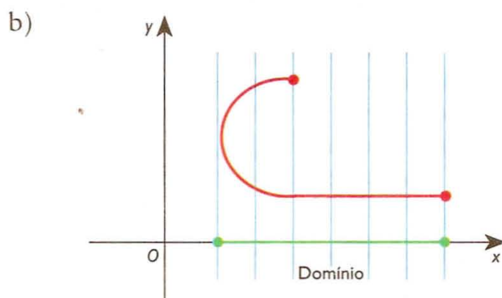
Visto isso:

a)



Não existe reta paralela ao eixo y passando por um ponto do domínio que corte a curva em mais de um ponto. Essa curva é gráfico de uma função.

b)

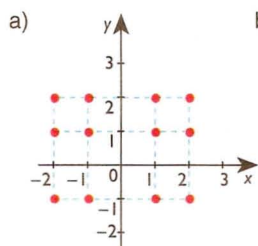


Existe reta paralela ao eixo y passando por um ponto do domínio que corte a curva em mais de um ponto. Essa curva não é gráfico de uma função, pois para alguns valores de x existe, em correspondência, mais de um valor de y.

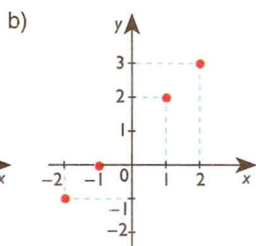
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

33. Identifique os conjuntos de pontos que representam gráfico de funções com domínio D = {−2, −1, 1, 2}.

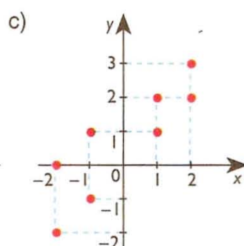
a)



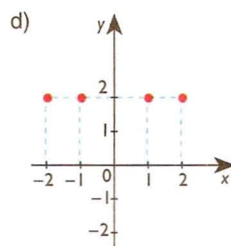
b)



c)

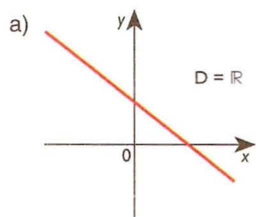


d)

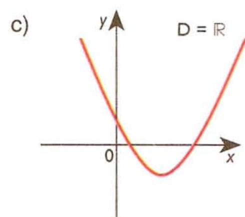


34. Identifique os gráficos que são funções.

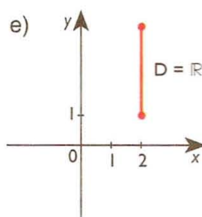
a)



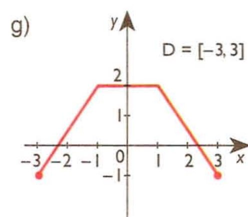
c)



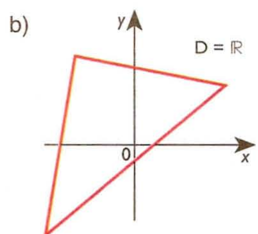
e)



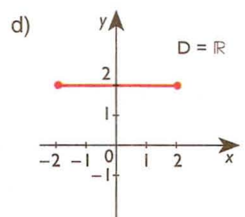
g)



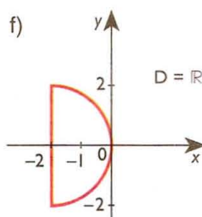
b)



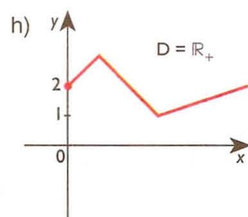
d)



f)

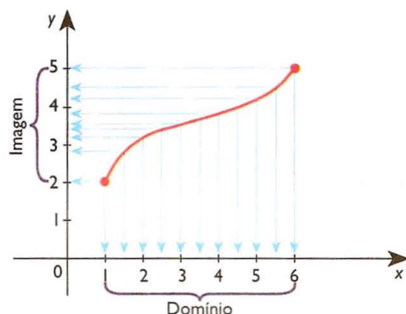


h)



Identificação pelo gráfico do domínio e imagem de uma função

Considere a função representada pelo gráfico abaixo:



O domínio é o conjunto das abscissas x dos pontos do gráfico.

Na figura, temos:

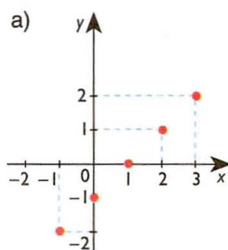
$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 6\}$

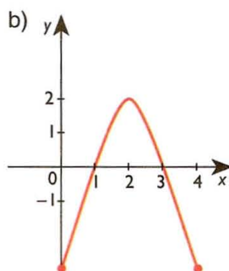
A imagem é o conjunto das ordenadas y dos pontos do gráfico. Na figura, temos:

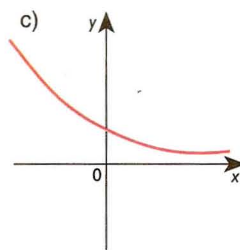
$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 2 \leq y \leq 5\}$

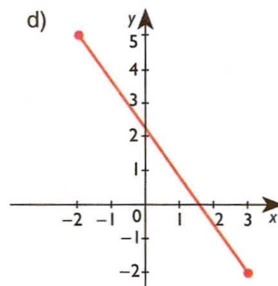
EXERCÍCIO PROPOSTO

35. Determine o domínio e o conjunto imagem das funções.

a) 

b) 

c) 

d) 

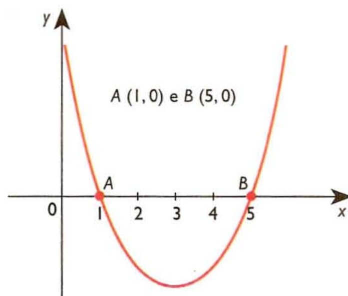
Zeros de uma função

Os valores de x para os quais $f(x) = 0$ chamam-se **zeros** ou **raízes** da função. Geometricamente os zeros de uma função são as abscissas dos pontos onde o gráfico corta o eixo x.

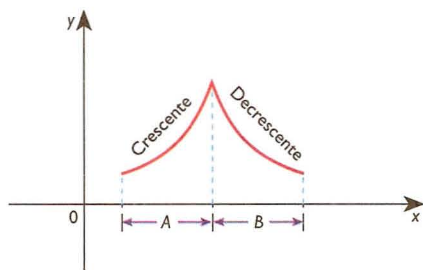
No gráfico abaixo, temos:

$$f(1) = 0 \text{ e } f(5) = 0$$

Logo, os números 1 e 5 são os zeros da função.



Função crescente e função decrescente



Considere a função f definida pelo gráfico.

Observe que, no intervalo A, **aumentando** o valor de x, **aumenta** também o valor de y. Dizemos então que a função é **crescente** no intervalo A.

No intervalo B, **aumentando** o valor de x, o valor de y **diminui**. Dizemos então que a função é **decrescente** no intervalo B.

De um modo geral:

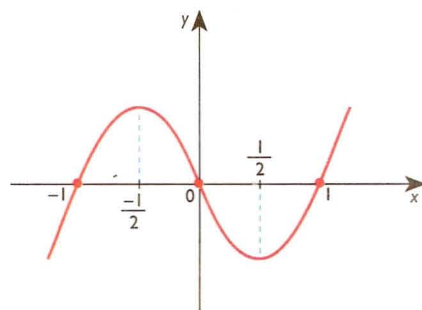
Sendo x_1 e x_2 elementos quaisquer de um conjunto $A \subset D(f)$, com $x_1 < x_2$, diz-se que a função é **crescente** em A se $f(x_1) < f(x_2)$ e **decrescente** se $f(x_1) > f(x_2)$.

Exemplo

Dada a função representada pelo gráfico ao lado, vamos determinar:

a) os zeros da função;

b) os intervalos onde a função é crescente e decrescente.



Solução

a) Os zeros da função são as abscissas dos pontos onde a curva corta o eixo x. Logo, os zeros da função são -1, 0 e 1.

b) A função é crescente nos intervalos

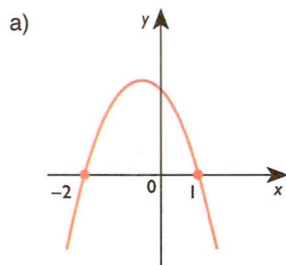
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{1}{2}\right\} \quad \text{e}$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{1}{2}\right\}$$ e decrescente no intervalo $$C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right\}.$$

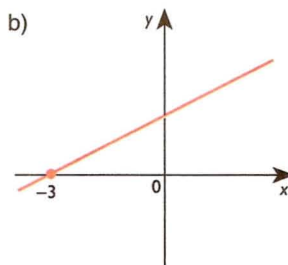
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

36. Determine os zeros das funções representadas graficamente.

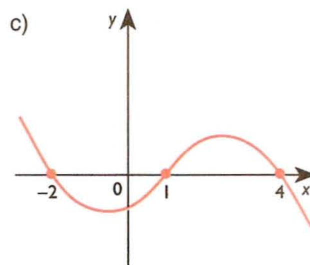
a)



b)



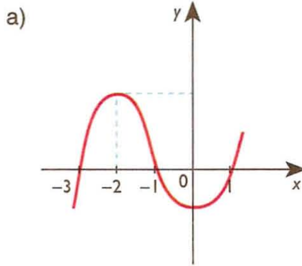
c)



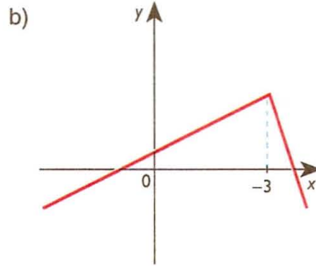
37. Nas funções reais definidas pelos gráficos a seguir, dê os intervalos em que cada uma é:

- crescente
- decrescente

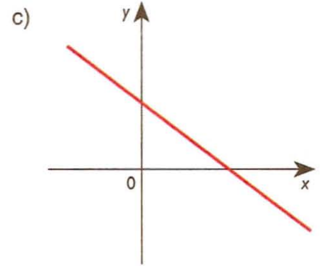
a)



b)

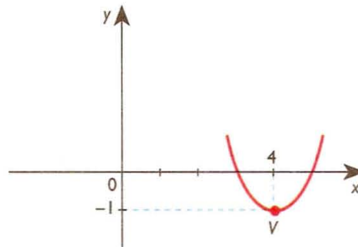


c)



Valor máximo e valor mínimo

Consideremos a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada pelo seguinte gráfico:



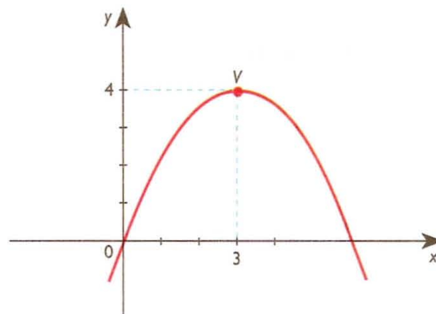
Esse gráfico nos mostra que, para todo x do seu domínio, tem-se:

$$f(x) \geqslant f(4),$$

pois $f(4) = -1$ e ela não assume nenhum valor menor que -1.

Nessas condições, dizemos que 4 é um **minimante** da função e o valor $f(4) = -1$ é o seu **valor mínimo**. O ponto do gráfico onde ocorre o valor mínimo é $V(4, -1)$.

Da mesma forma, para a função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida pelo gráfico:



tem-se que, para qualquer valor de x do seu domínio, $g(x) \leqslant g(3)$.

Nessas condições, dizemos que 3 é um **maximante** da função e o valor $g(3) = 4$ é o seu **valor máximo**. O ponto do gráfico onde ocorre o valor máximo é $V(3, 4)$.

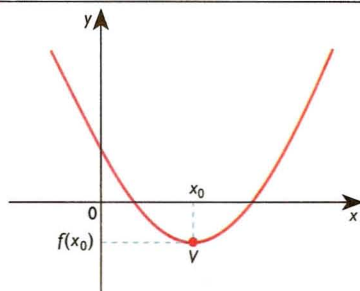
Vamos generalizar esses conceitos considerando as funções representadas pelos gráficos da página seguinte.

O gráfico ao lado nos mostra que para todo x do domínio da função temos:

$$f(x) \geqslant f(x_0)$$

Dizemos então que x_0 é um **minimante** da função f e $y_0 = f(x_0)$ é o **valor mínimo** da função.

O ponto do gráfico da função f onde ocorre o valor mínimo é $V(x_0, y_0)$.

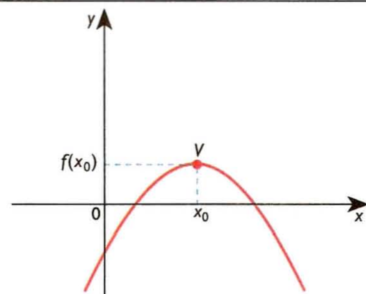


O gráfico ao lado nos mostra que para todo x do domínio da função temos:

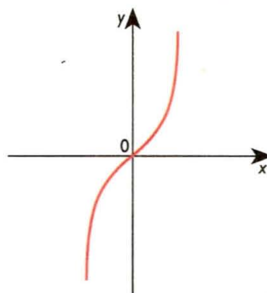
$$f(x) \leqslant f(x_0)$$

Dizemos então que x_0 é um **maximante** da função f e $y_0 = f(x_0)$ é o **valor máximo** da função.

O ponto do gráfico da função f onde ocorre o valor máximo é $V(x_0, y_0)$.



O gráfico ao lado nos mostra que a função f não tem maximante nem minimante.

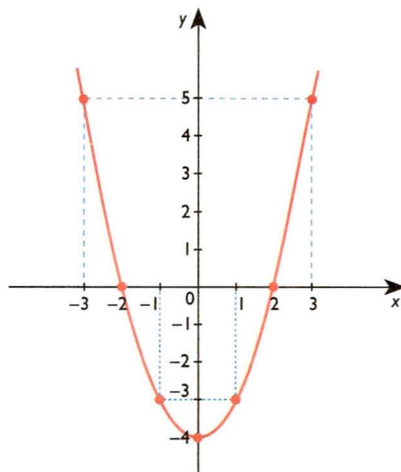


Função par e função ímpar

Considerando a função $f(x) = x^2 - 4$, temos:

$$f(-1) = f(1) = -3$$
$$f(-2) = f(2) = 0$$
$$f(-3) = f(3) = 5$$

Isso quer dizer que a função possui o mesmo valor para valores simétricos da variável. Dizemos então que a função é **par**. Observe que a função tem o gráfico simétrico em relação ao eixo y.



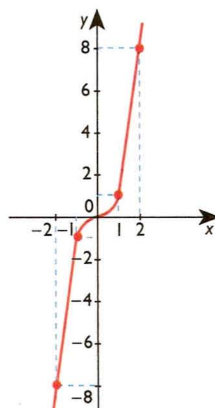
De um modo geral:

> Função par é a função na qual $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D(f)$.

Considerando agora a função $f(x) = x^3$, temos:

$f(-2) = -8$ e $f(2) = 8 \Rightarrow f(-2) = -f(2)$
$f(-1) = -1$ e $f(1) = 1 \Rightarrow f(-1) = -f(1)$

Isso quer dizer que a função possui valores simétricos para valores simétricos da variável. Dizemos então que a função é **ímpar**.



De um modo geral:

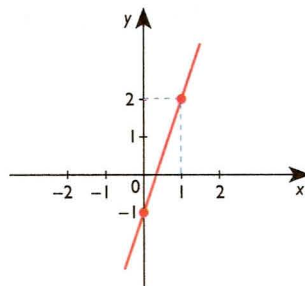
> Função ímpar é a função na qual $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D(f)$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

38. Considere o gráfico da função $f(x) = 3x - 1$.

Responda:

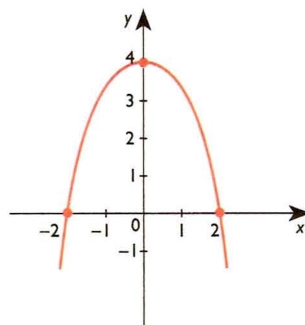
a) Qual é o domínio da função?
b) Qual é a imagem da função?
c) A função é crescente ou decrescente?
d) Para que valor de x, $f(x) = 0$?
e) Para que valores de x, $f(x) > 0$?
f) Para que valores de x, $f(x) < 0$?
g) A função é par?
h) A função é ímpar?
i) A função tem algum ponto de mínimo ou de máximo?



39. Considere o gráfico da função $f(x) = -x^2 + 4$.

Responda:

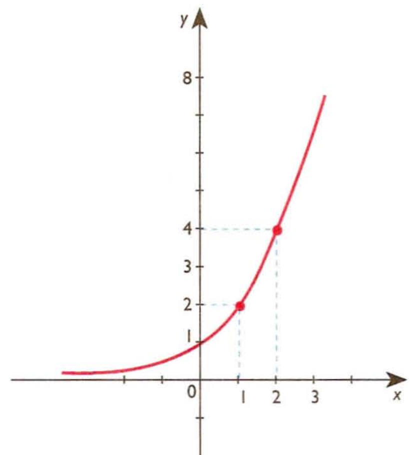
a) Qual é o domínio da função?
b) Qual é a imagem da função?
c) Para que valor de x, $f(x)$ é crescente?
d) Para que valores de x, $f(x)$ é decrescente?
e) Para que valores de x, $f(x) = 0$?
f) Para que valores de x, $f(x) > 0$?
g) Para que valores de x, $f(x) < 0$?
h) A função é par ou ímpar?
i) Qual é o maximante da função?
j) Qual é o valor máximo da função?



40. Considere o gráfico da função $y = 2^x$.

Responda:

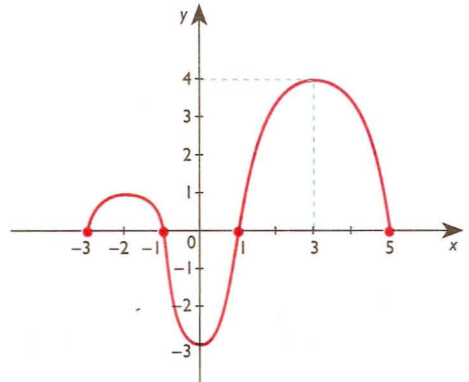
a) Qual é o domínio da função?
b) Qual é a imagem da função?
c) Existe x, tal que $f(x) = 0$?
d) A função é crescente ou decrescente?
e) Existe x, tal que $f(x) < 0$?
f) Para que valor de x, $f(x) = 1$?
g) Para que valores de x, $f(x) > 2$?
h) A função é par?
i) A função é ímpar?
j) Para valores de x cada vez menores, o valor de $f(x)$ se aproxima de que número?



41. Considere a função representada pelo gráfico.

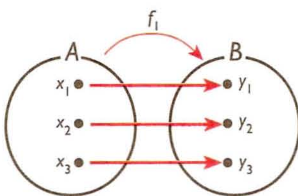
Responda:

a) Qual é o domínio da função?
b) No intervalo [0, 3] a função é crescente ou decrescente?
c) Para que valores de x, $f(x) = 0$?
d) Para que valores de x, $f(x) < 0$?
e) Qual é o maximante da função?
f) Qual é o minimante da função?
g) Qual é a imagem da função?

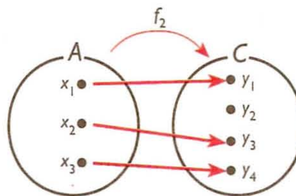


10. Função bijetora

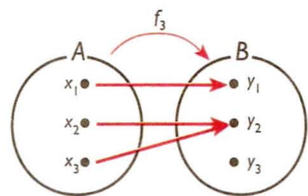
Consideremos as funções definidas pelos seguintes diagramas de flechas:



Veja que, nesse caso, cada elemento do contradomínio B é imagem de um único elemento do conjunto A. Quando isso ocorre, a função é chamada **bijetora**.



Veja que, nesse caso, existe elemento do contradomínio C que não é imagem de nenhum elemento do conjunto A. Por esse motivo, a função não é bijetora.



Veja que, nesse caso, existe elemento do contradomínio B que é imagem de mais de um elemento do conjunto A. Por causa disso, a função não é bijetora.

De um modo geral:

Uma função $f: A \to B$ é **bijetora** quando cada elemento do contradomínio B é imagem de um **único** elemento do conjunto A.

Observações

1. Quando o conjunto imagem de uma função for igual ao seu contradomínio, dizemos que a função é **sobrejetora**.
2. Quando para quaisquer x_1 e x_2 do domínio tais que $x_1 \neq x_2$ tivermos $f(x_1) \neq f(x_2)$, dizemos que a função é **injetora**.

Assim, nos esquemas anteriores temos que:

a) f_1 é sobrejetora e também injetora. Dizer que uma função é bijetora é equivalente a dizer que ela é injetora e sobrejetora. Portanto f_1 é uma função bijetora.

b) f_2 não é sobrejetora mas é injetora.

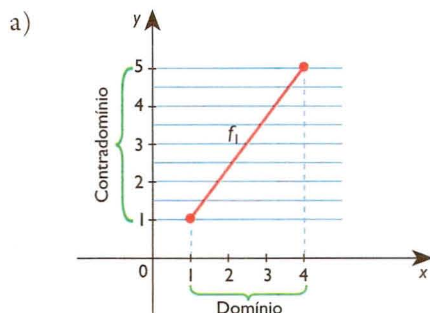
c) f_3 não é sobrejetora nem injetora.

Podemos reconhecer se uma função é ou não bijetora através de seu gráfico. Para isso traçamos retas paralelas ao eixo x pelos pontos do eixo Oy que pertencem ao contradomínio. Se cada uma dessas retas interceptar o gráfico em um único ponto, a função será bijetora.

Exemplos

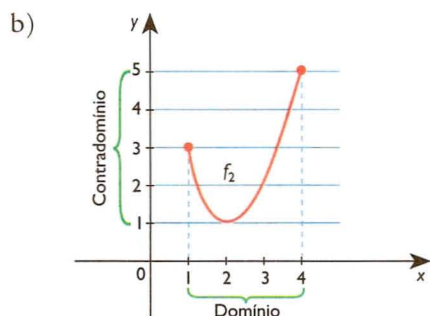
Considere as funções $f: A \rightarrow B$, com $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 4\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant y \leqslant 5\}$, representadas pelos gráficos:

a)



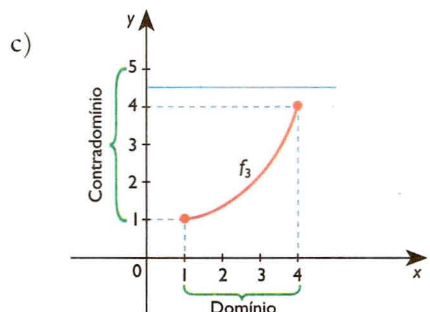
f_1 é função bijetora, pois as retas paralelas ao eixo x, que passam pelos pontos do contradomínio, cortam o gráfico em um único ponto.

b)



f_2 não é função bijetora, pois existem retas paralelas ao eixo x que passam pelos pontos do contradomínio e cortam o gráfico em mais de um ponto.

c)

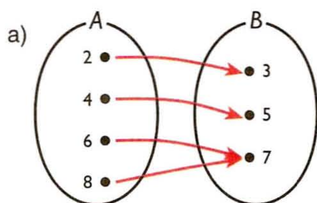


f_3 não é função bijetora, pois existem retas paralelas ao eixo x que passam pelos pontos do contradomínio e não cortam o gráfico.

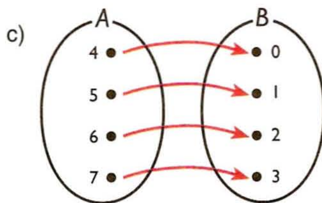
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

42. Os esquemas representam funções de A em B. Identifique quais são sobrejetoras, injetoras ou bijetoras.

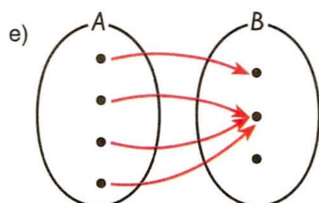
a)



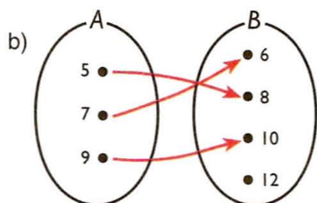
c)



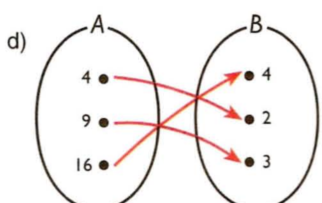
e)



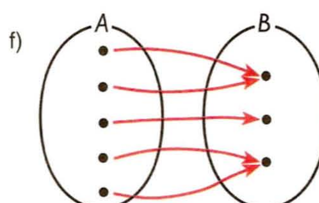
b)



d)

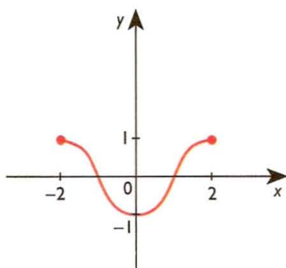


f)

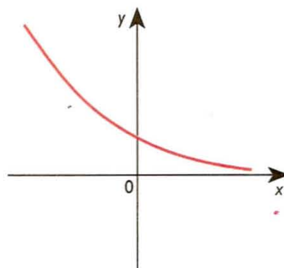


43. Os gráficos abaixo representam funções de A em B. Indique quais são bijetoras.

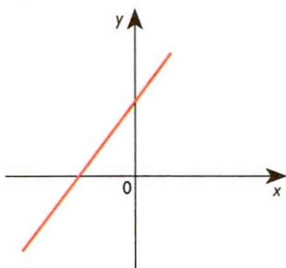
a) $A = [-2, 2]$ e $B = [-1, 1]$



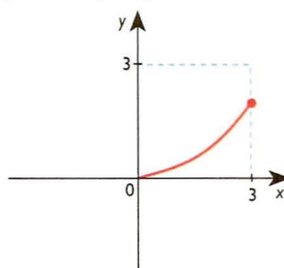
c) $A = \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{R}_+^*$



b) $A = \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{R}$



d) $A = [0, 3]$ e $B = [0, 3]$



44. Considerando a função f de P em Q, representada pelo diagrama abaixo, indique as sentenças verdadeiras (V) e as falsas (F).

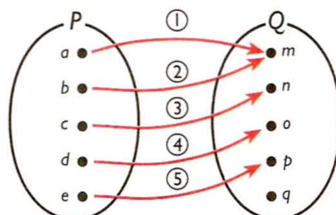
a) A função f é sobrejetora.

b) A função f é injetora.

c) Retirando-se o elemento q, a função torna-se sobrejetora.

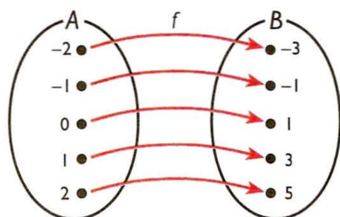
d) Se a flecha ② ligasse b com q, teríamos uma função bijetora.

e) Se retirarmos a flecha ② e o elemento b, teremos uma função injetora.



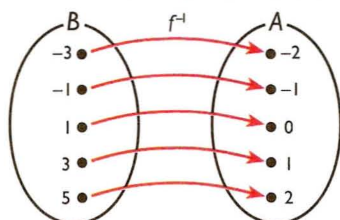
11. Funções inversas

Dados $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-3, -1, 1, 3, 5\}$, consideremos a função $f: A \to B$, definida por $f(x) = 2x + 1$.



$f = \{(-2, -3); (-1, -1); (0, 1); (1, 3); (2, 5)\}$

Como f é uma função bijetora, podemos associar a todo elemento y de B um único elemento x de A, tal que $y = f(x)$.



A essa nova função de B em A chamaremos **função inversa** da função f e indicaremos por f^{-1}. Portanto:

$f^{-1} = \{(-3, -2); (-1, -1); (1, 0); (3, 1); (5, 2)\}$

Observe que:

- o domínio de f é o contradomínio de f^{-1};
- o contradomínio de f é o domínio de f^{-1};
- se $(a, b) \in f$, então $(b, a) \in f^{-1}$.

Determinemos a lei que define $f^{-1}(x)$, no caso em que $f(x) = 2x + 1$.

Sendo $y = \overbrace{2x + 1}^{f(x)}$, devemos calcular $x = f^{-1}(y)$. (I)

Isolando x em $y = 2x + 1$, temos: $y = 2x + 1 \Rightarrow 2x = y - 1 \Rightarrow x = \dfrac{y - 1}{2}$. (II)

Comparando (I) e (II), temos:

$$f^{-1}(y) = \frac{y - 1}{2}$$ (função inversa de $f(x)$)

No entanto, na maioria das vezes, é conveniente expressarmos a função inversa deixando x como variável livre. Assim, a lei que define $f^{-1}(x)$ é dada por $f^{-1}(x) = \dfrac{x - 1}{2}$.

De um modo geral:

Dada a função bijetora: $f: A \to B$, chama-se **função inversa** de f, indicada por f^{-1}, a função $f^{-1}: B \to A$ que associa cada y de B ao elemento x de A, tal que $y = f(x)$.

Exemplo

Dada a função $f: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{2\}$, definida por $y = \dfrac{2x + 5}{x - 3}$, determinar a função inversa de f.

Solução

$$y = \overbrace{\frac{2x+5}{x-3}}^{f(x)} \Rightarrow x = f^{-1}(y) \quad \text{(I)}$$

Isolando x, temos: $y = \dfrac{2x+5}{x-3} \Rightarrow (x-3)y = 2x+5 \Rightarrow xy - 3y = 2x + 5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow xy - 2x = 3y + 5 \Rightarrow (y-2)x = 3y + 5 \Rightarrow x = \frac{3y+5}{y-2} \quad \text{(II)}$$

De (I) e (II), vem: $f^{-1}(y) = \dfrac{3y+5}{y-2}$, ou, escrevendo em função de x: $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+5}{x-2}$.

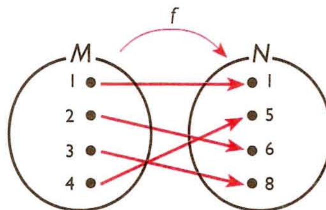
Logo, a função inversa de f é f^{-1}, definida de $\mathbb{R} - \{2\}$ em $\mathbb{R} - \{3\}$, ou seja:

$$f^{-1}: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{3\}, \text{ definida por } f^{-1}(x) = \frac{3x+5}{x-2}.$$

Observação: somente as funções bijetoras possuem inversa.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

45. O esquema seguinte representa uma função bijetora *f*, de *M* em *N*. Faça o esquema da função inversa.



46. Sendo $f = \{(-3, 2); (-1, 4); (1, 5); (2, 3)\}$ uma função bijetora, escreva a função f^{-1}.

47. Sabendo que g é uma função bijetora, $g(5) = -4$ e $g(8) = 3$, determine $g^{-1}(-4)$ e $g^{-1}(3)$.

48. Dê a função inversa de cada uma das funções.

a) $y = 4x - 1$

b) $f(x) = \dfrac{x+3}{2}$

c) $g(x) = \dfrac{2x-1}{x-2}$ $(x \neq 2)$

d) $y = \sqrt[3]{2x+3}$

e) $y = 1 + x^3$

f) $f(x) = \dfrac{5x+2}{2x-1}$ $\left(x \neq \dfrac{1}{2}\right)$

49. Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 5$, determine:

a) $f^{-1}(5)$

b) $f^{-1}(0)$

c) $f^{-1} = \left(-\dfrac{1}{2}\right)$

d) $f^{-1}(0{,}2)$

50. Dadas as funções reais f e g definidas, respectivamente, por $f(x) = \dfrac{4x+1}{2}$ e $g(x) = x - 3$, determine:

a) $f^{-1}(3) + g^{-1}(5)$

b) $g^{-1}(0) - f^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$

Gráfico da função inversa

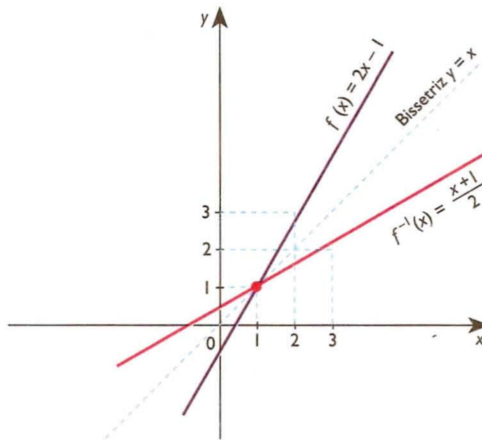
Vamos construir num mesmo plano cartesiano os gráficos das funções $f(x) = 2x - 1$ e sua inversa $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$.

$f(x) = 2x - 1$

x	y	(x, y)
0	–1	(0, –1)
2	3	(2, 3)

$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$

x	y	(x, y)
1	1	(1, 1)
3	2	(3, 2)



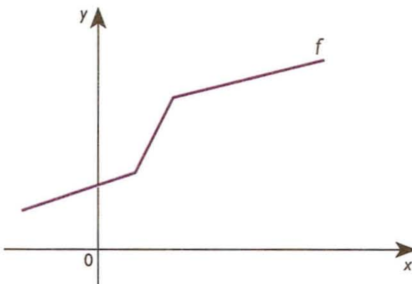
Observe que os gráficos de f e de sua inversa f^{-1} são **simétricos** em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. Essa propriedade é válida para toda função $f(x)$ e sua inversa $f^{-1}(x)$.

Em vista disso, conhecido o gráfico de uma função $f(x)$, podemos obter o gráfico da função $f^{-1}(x)$, caso exista, usando a simetria em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

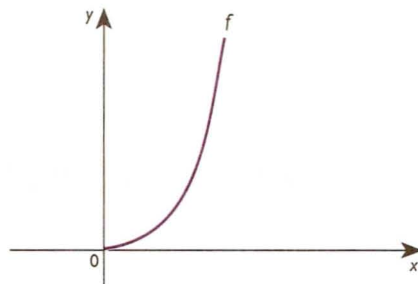
Exemplo

Usando a simetria em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, construir o gráfico da função inversa, nos seguintes casos:

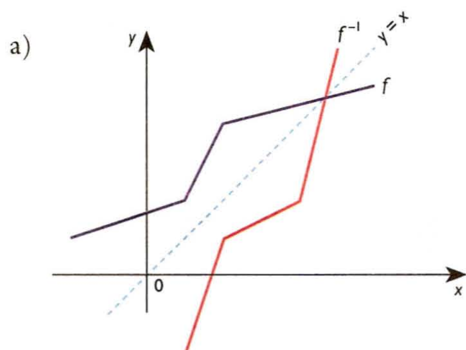
a)

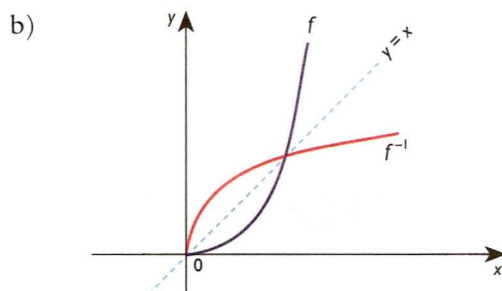


b)



Solução





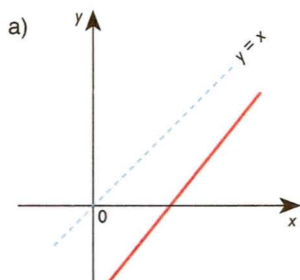
EXERCÍCIO PROPOSTO

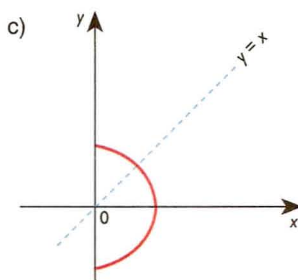
51. Algumas das figuras abaixo representam gráficos de funções.

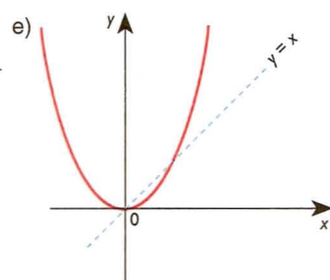
a) Quais dos gráficos representam funções?

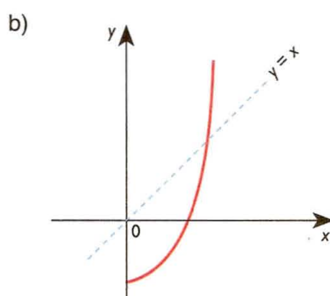
b) Quais representam funções que admitem função inversa?

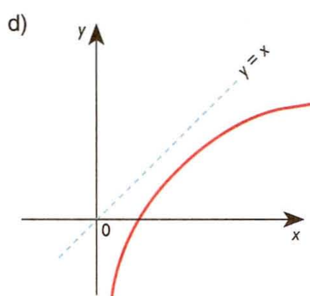
c) Usando a simetria em relação à reta $y = x$, construa o gráfico daquelas funções que admitem função inversa.

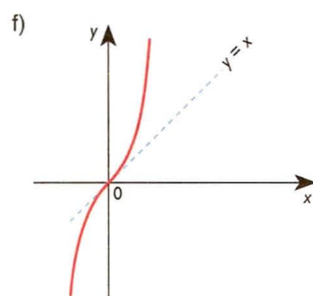






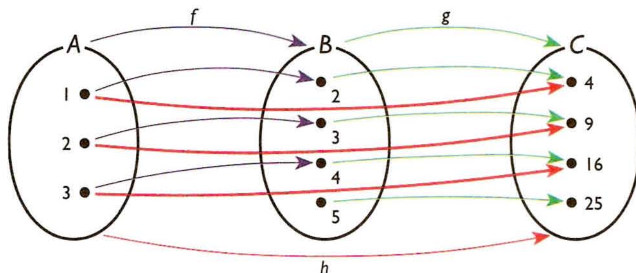






12. Função composta

Consideremos os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, $C = \{4, 9, 16, 25\}$ e as funções $f: A \rightarrow B$ definida por $y = x + 1$ e $g: B \rightarrow C$, definida por $z = y^2$.



O esquema nos mostra que existe uma função h: $A \to C$, em que:

- $h(1) = 4 = g(2) = g(f(1))$;
- $h(2) = 9 = g(3) = g(f(2))$;
- $h(3) = 16 = g(4) = g(f(3))$.

Isso significa que primeiro aplicamos ao elemento x a função f, obtendo $f(x)$, e em seguida aplicamos g em $f(x)$, obtendo $g(f(x))$, ou seja, $h(x) = g(f(x))$.

A essa função h: $A \to C$ damos o nome de **função composta de g com f** e a indicamos por $g \circ f$ (lê-se: g composta com f).

De um modo geral:

> Dadas as funções: $f: A \to B$ e $g: B \to C$, chama-se **função composta de f e g** a função $(g \circ f): A \to C$, tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1

Dadas as funções $f(x) = 3x - 1$ e $g(x) = x^2 + 2$, calcular:

a) $(g \circ f)(x)$ b) $(f \circ g)(x)$ c) $(f \circ f)(x)$ d) $(g \circ g)(x)$

Solução

a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x - 1) = (3x - 1)^2 + 2 = 9x^2 - 6x + 1 + 2 = 9x^2 - 6x + 3$

b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 2) = 3(x^2 + 2) - 1 = 3x^2 + 6 - 1 = 3x^2 + 5$

c) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(3x - 1) = 3(3x - 1) - 1 = 9x - 3 - 1 = 9x - 4$

d) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x^2 + 2) = (x^2 + 2)^2 + 2 = x^4 + 4x^2 + 4 + 2 = x^4 + 4x^2 + 6$

Exemplo 2

Dados $f(x) = 2x - 3$ e $f(g(x)) = 6x + 11$, calcular $g(x)$.

Solução

$f(x) = 2x - 3 \Rightarrow f(g(x)) = 2g(x) - 3$

Como $f(g(x)) = 6x + 11$, então $2g(x) - 3 = 6x + 11 \Rightarrow 2g(x) = 6x + 14 \Rightarrow g(x) = 3x + 7$.

Exemplo 3

Sendo $g(x) = 2x - 3$ e $f(g(x)) = 6x - 8$, calcular $f(x)$.

Solução

Fazendo $g(x) = t$, temos: $2x - 3 = t \Rightarrow 2x = t + 3 \Rightarrow x = \dfrac{t + 3}{2}$.

Substituindo em $f(g(x)) = 6x - 8$, $g(x)$ por t e x por $\dfrac{t + 3}{2}$, encontramos:

$$f(t) = 6\left(\frac{t + 3}{2}\right) - 8 \Rightarrow f(t) = (3t + 3) - 8 \Rightarrow f(t) = 3t + 9 - 8 \Rightarrow f(t) = 3t + 1$$

Logo, $f(x) = 3x + 1$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

52. Sendo $f(x) = 3x - 2$ e $g(x) = 2x + 1$, determine:

a) $f(g(x))$ b) $g(f(x))$ c) $f(f(x))$ d) $g(g(x))$

53. Dadas as funções $f(x) = x + 3$ e $g(x) = 2x^2 - 3$, determine:

a) $f(g(x))$ b) $g(f(x))$ c) $f(f(x))$ d) $g(g(x))$

54. Sendo $f(x) = 3x - 2$ e $g(x) = x^2 - 3$, determine:

a) $f(g(0))$ b) $f(g(-1))$ c) $g(f(4))$ d) $g(f(-1))$

55. Se $f(x) = 3x + 7$ e $f(g(x)) = 6x + 10$, calcule $g(x)$.

56. Sendo $g(x) = 3x - 5$ e $f(g(x)) = 12x - 22$, calcule $f(x)$.

57. Dados $f(g(x)) = 8x + 39$ e $g(x) = x + 6$, calcule $f(x)$.

58. Sabendo que $f(x) = x + 2$ e $f(g(x)) = 3x + 1$, calcule $g(x)$.

TÚNEL DO TEMPO



René Descartes.

Existem evidências de que o homem tem, desde a Antigüidade, a noção intuitiva de função. Algumas dessas evidências são tabelas encontradas no Egito, na Índia e na Grécia, que associam comprimentos da sombra de uma vara a certas horas do dia.

A formalização da idéia de função, no entanto, parece ter ocorrido somente no século XVII. Ao que tudo indica, foi René Descartes (1596-1650), filósofo e matemático francês, o primeiro a usar o termo **função**. Ao estudar a relação entre duas grandezas, Descartes adotou um sistema de eixos concorrentes, representando a primeira grandeza sobre um dos eixos e a segunda, sobre o outro. Dessa forma ele pôde determinar as coordenadas de um ponto no plano.

O sistema de eixos ortogonais que você utiliza é um caso particular daquele criado por Descartes. Daí o nome sistema cartesiano ortogonal.

Posteriormente outros grandes nomes da matemática dedicaram-se tanto à formalização como à aplicação de funções, cabendo ao matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) a introdução da notação $f(x)$ universalmente utilizada.

Com o surgimento da teoria dos conjuntos, o conceito de função passou a ser estruturado com base na idéia de pares ordenados e na lei que relaciona os elementos desses pares.

Nos dias atuais as representações cartesianas estão em quase todas as atividades humanas, como mostram os meios de comunicação ao analisar, por exemplo, a variação da temperatura, das intenções de voto numa eleição, ou a oscilação das ações nas Bolsas de Valores.

Essas representações, além de possibilitarem análises rápidas através da simples visualização de um gráfico, facilitam a monitoração do fenômeno em desenvolvimento.

RELEMBRANDO CONCEITOS

Uma relação f de A em B, tal que cada elemento de A está associado a um único elemento de B, é chamada **função de A em B.**

A é o domínio e B é o contradomínio da função f.

Zeros da função são as abscissas dos pontos onde o gráfico da função corta o eixo x.

Função crescente e função decrescente

Se para quaisquer x_1 e x_2 do domínio, tais que $x_1 < x_2$, temos:

- $f(x_1) < f(x_2)$, a função é crescente;
- $f(x_1) > f(x_2)$, a função é decrescente.

Função par e função ímpar

Se para qualquer x do domínio temos:

- $f(-x) = f(x)$, a função é par;
- $f(-x) = -f(x)$, a função é ímpar.

Função injetora

Se para quaisquer x_1 e x_2 do domínio, com $x_1 \neq x_2$, temos $f(x_1) \neq f(x_2)$, a função é chamada injetora.

Função sobrejetora

Quando o contradomínio coincidir com o conjunto imagem.

Função bijetora

Quando for injetora e sobrejetora.

Função composta

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Função inversa

Quando a função f de A em B é bijetora, existe a função inversa f^{-1} de B em A.

Os gráficos de duas funções inversas são curvas simétricas com relação à bissetriz do 1º e do 3º quadrante.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

59. Dadas as funções $f(x) = 8x - 4$, $g(x) = -2x^2 + 5x$ e $h(x) = \frac{2}{x}$, calcule:

a) $f(-2)$
b) $g\left(-\frac{1}{2}\right)$
c) $h(2)$
d) $f^{-1}(x)$
e) $f(g(x))$
f) $g(f(2))$
g) $f(f(x))$
h) $f(x) + g(x)$
i) $g(x) \cdot h(x)$

60. Sendo $f(x) = 9 - 4x$ e $g(x) = 2x^2 - 11x + 5$, determine x, de modo que se tenha:

a) $f(x) = 0$
b) $g(x) = 0$
c) $f^{-1}(x) = 1$
d) $g(x) = -10$

61. Sabendo que $f(x + 5) = 15x - 8$, calcule:

a) $f(6)$
b) $f(2x - 1)$

62. Dadas as funções $f(x) = x - 4$ e $f(g(x)) = 2x + 3$, determine $g(x)$.

63. Dadas as funções $f(x) = 3x - 16$ e $g(x) = 3x - x^2$, calcule x de modo que:

a) $f(x) = g(x)$ b) $f(g(x)) = -10$ c) $f(x) + g(x) = -7$

64. Dos conjuntos A e B, sabe-se que B tem três elementos mais que A e $n(A \times B) = 2n(A) + 30$. Quantos elementos tem o conjunto B?

65. Dê o domínio das funções:

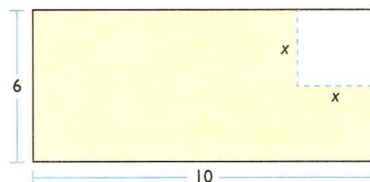
a) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x - 4}$ b) $y = \dfrac{x - 2}{\sqrt{x - 1}}$ c) $y = \dfrac{6}{x^2 - 7x + 10}$ d) $y = \sqrt{x + 2} + \dfrac{\sqrt[3]{x - 1}}{\sqrt{x - 4}}$

66. Sendo $f(x) = \dfrac{3x + 1}{x - 1}$, calcule $f(f(x))$.

67. Dada a função f de $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ em $B = \{0, 3, 8, 15, 24\}$ definida por $f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2 - 1\}$:

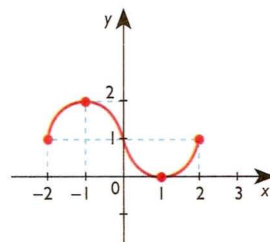
a) construa o gráfico de flechas e verifique se f é uma função bijetora;
b) determine $f^{-1}(x)$, se f for uma função bijetora.

68. A figura mostra um retângulo de 10 cm por 6 cm. De um dos cantos foi retirado um quadrado de lado $x (0 < x < 3)$. Escreva a área y da região colorida em função de x.



69. O gráfico ao lado representa uma função f. Pede-se:

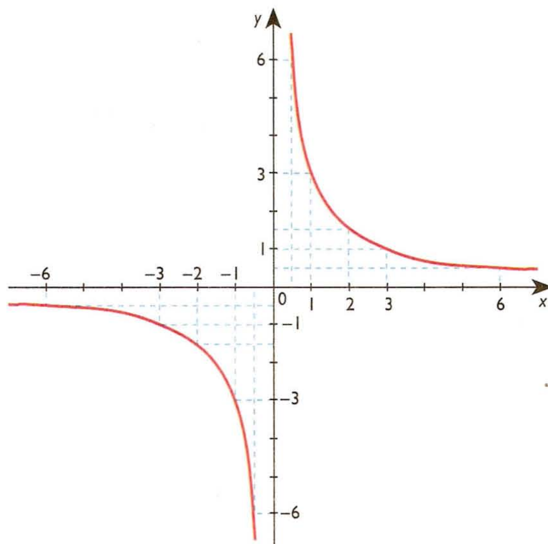
a) o domínio da função.
b) a imagem da função.
c) as raízes da função.
d) o valor máximo de f.
e) o valor mínimo de f.
f) o intervalo onde a função é decrescente.



70. Considere o gráfico da função $f(x) = \dfrac{3}{x}$.

Responda:

a) Qual é o domínio da função?
b) Qual é a imagem da função?
c) A função é crescente ou decrescente?
d) A função é par ou ímpar?
e) Para que valores de x, $f(x) > 0$?
f) Para que valores de x, $f(x) < 0$?
g) Para valores de x positivos cada vez maiores, o valor de $f(x)$ se aproxima de que número?
h) Para valores de x negativos cada vez menores, o valor de $f(x)$ se aproxima de que número?



71. A função $f : A \to B$ definida por $f(x) = \dfrac{2x + 10}{x - 1}$ tem $\text{Im}(f) = \{-10, -5, -4, -2, 8\}$. Dê o domínio da função.

72. (EsPCEx) Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 4, 6, 16\}$ e $C = \{2, 3, 8, 10\}$ e as relações $R_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2\}$ e $R_2 = \left\{(x, y) \in B \times C \mid y = \dfrac{x}{2}\right\}$. Determine $R_1 \cap R_2$.

73. (UFCE) Sejam f e g funções reais de variável real, tais que $f(x) = 2x - 5$ e $f(g(x)) = x$. Determine o valor de $g(33)$.

74. (UFSC) Dadas as funções $f(x) = \sqrt{5 - x}$ e $g(x) = x^2 - 1$, dê o valor de $(g \circ f)(4)$.

75. (F. Salvador-BA) Sabendo-se que $g(f(x)) = \dfrac{2x - 2}{2x + 2}$ e $g^{-1}(x) = \dfrac{2x + 1}{1 - x}$, determine $f(5) + g\left(-\dfrac{7}{2}\right)$.

TESTES

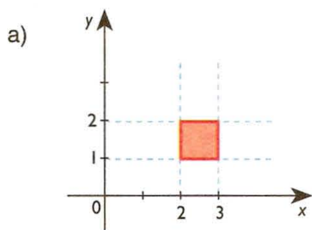
76. (Osec-SP) Os conjuntos A e B são tais que $\{(0, 2), (0, 3), (1, 2), (2, 3)\} \subset A \times B$. Então:

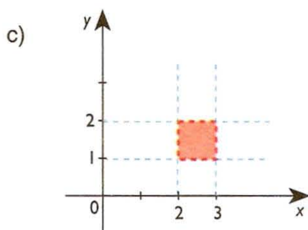
a) $(2, 1) \in A \times B$
b) $A \times B$ tem 6 elementos.
c) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}$ e $A \cap B = \{2\}$
d) $\{(1, 3), (2, 2)\} \subset A \times B$
e) $(0, 0) \in A \times B$

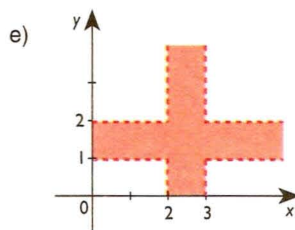
77. (UFES) Se $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 2, 4, 5\}$, então o número de elementos distintos do conjunto $(A \times B) \cup (B \times A)$ é:

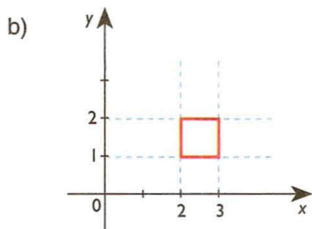
a) 4 b) 8 c) 12 d) 20 e) 24

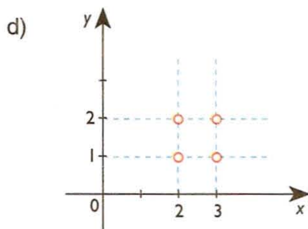
78. (UFSE) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 < y < 2\}$, a figura que melhor representa o conjunto $A \times B$ é:

a)


c)


e)


b)


d)


79. (Osec-SP) Seja a função real definida pela sentença $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{\sqrt{x}-1}}$. O domínio da função é:

a) $Df = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 1\}$
b) $Df = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$
c) $Df = \{x \in \mathbb{R} \mid x = -1\}$
d) $Df = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0\}$
e) $Df = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

80. (F. C. Contábeis) Considerando as relações binárias

$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N},\ y = x^2 - 1\}$,

$S = \left\{(x, y) \in\ ]1, +\infty[\ \times \mathbb{R},\ y = \dfrac{x}{-\sqrt{x-1}}\right\}$,

$T = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ y = \sqrt[5]{x-3}\}$,

pode-se afirmar que:

a) *R* e *S* representam funções.
b) *R* e *T* representam funções.
c) *S* e *T* representam funções.
d) apenas *T* representa função.
e) apenas *R* representa função.

81. (UEBA) Sendo $f(2x + 1) = x + 1$ e $g(2x - 1) = x$, o valor de $f(5) + g(3)$ é:

a) 15 b) 5 c) 1 d) 7 e) 8

82. (PUC-PR) Se *f* e *g* são funções tais que $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$, e $f(g(x)) = x$, então $g(x)$ é igual a:

a) $\dfrac{x-2}{2x+1}$
b) $\dfrac{2x+3}{3}$
c) $\dfrac{2x+1}{2-x}$
d) $\dfrac{2x+1}{x-2}$
e) $\dfrac{x-4}{2x+8}$

83. (U. Católica de Salvador-BA) Se o domínio da função *f*, definida por $f(x) = 1 - 2x$, é o intervalo $]-3, 2]$, o seu conjunto imagem é o intervalo:

a) $]-7, 3]$
b) $[-3, 7[$
c) $]-3, 7]$
d) $[-3, 5[$
e) $]-3, 3]$

84. (FEI-SP) Se $f(2x + 3) = 4x^2 + 6x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, então $f(1 - x)$ vale:

a) $2 - x^2$
b) $2 + x^2$
c) $x^2 + 2x - 4$
d) $3x^2 - 2x + 4$
e) $x^2 + x - 1$

85. (Unifor-CE) São dadas as funções *f* e *g*, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 2x + k$ e $g(x) = 3x - 1$. Se $f(g(x)) = g(f(x))$, então o número *k* é igual a:

a) $-\dfrac{1}{2}$ b) $-\dfrac{1}{4}$ c) $\dfrac{1}{4}$ d) $\dfrac{1}{2}$ e) 1

86. (UECE) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = kx^2$, sendo *k* uma constante positiva. Se $f(\sqrt{2}) = \sqrt{3}$, então $f(\sqrt{6})$ é igual a:

a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt{12}$ c) $\sqrt{18}$ d) $\sqrt{27}$

87. (Osec-SP) Seja *f* uma função real tal que $f(x + 1) = (f(x))^2$ e $f(0) = 10$. Então $f(4)$ é igual a:

a) 10^{16} b) 100 c) 10^{256} d) 101 e) 121

88. (Mackenzie-SP) A função real definida por $f(x) = kx + m$ é ímpar, tal que $k \in \mathbb{R}^*$, $m \in \mathbb{R}$ e $f(-1) = 3$. Então a soma das raízes da equação $f(f(x)) = f\left(\frac{-x^2}{3}\right)$ é:

a) 3 b) −3 c) 0 d) −9 e) 9

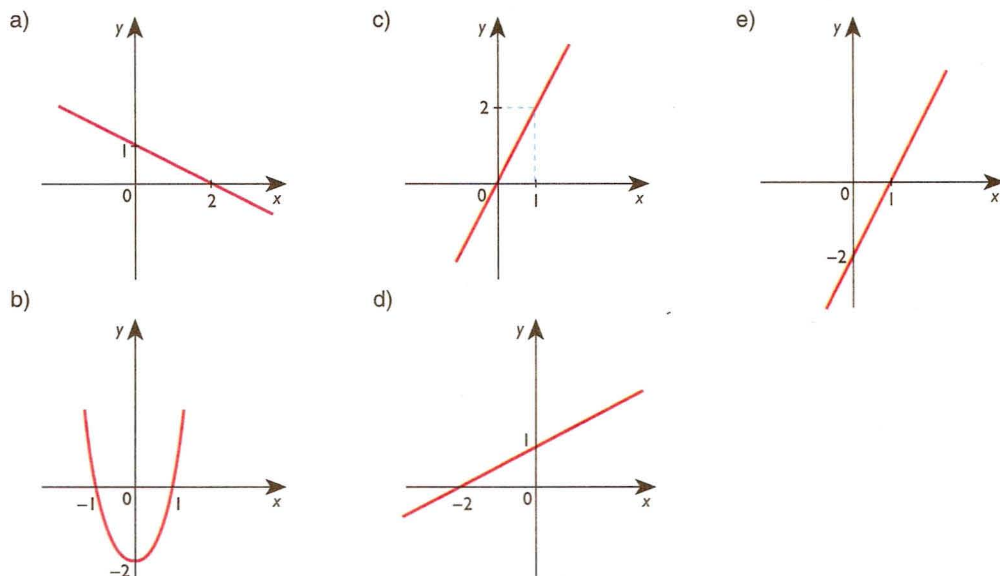
89. (FEI-SP) Dadas as funções reais $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = ax + b$, se $f[g(x)] = 8x + 7$, o valor de $a + b$ é:

a) 13 b) 12 c) 15 d) 6 e) 5

90. (UFES) Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = mx + n$, com $m \neq 0$, é tal que $f(f(x)) = 2f(x)$ para todo x real, então $m + n$ é igual a:

a) 3 b) 2 c) 0 d) −1 e) −2

91. (U. F. Santa Maria-RS) Dada a função $f(x) = \frac{x}{2} + 1$, o gráfico de sua inversa $f^{-1}(x)$ é:



92. (F. C. Contábeis) Considerando $f(x) = \frac{x + 3}{2x - 5}$, a lei que define uma função real, bijetora, de domínio $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$, pode-se afirmar que o domínio de $f^{-1}(x)$ é dado por:

a) $\mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$ c) $\mathbb{R}$ e) $\mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{3}\right\}$

b) $\mathbb{R} - \{-3\}$ d) $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

93. (Fuvest-SP) Uma função f de variável real satisfaz a condição $f(x + 1) = f(x) + f(1)$, qualquer que seja o valor da variável x. Sabendo-se que $f(2) = 1$, podemos concluir que $f(5)$ é igual a:

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $\frac{5}{2}$ d) 5 e) 10

94. (Mackenzie-SP) Sejam as funções reais definidas por $f(x + 3) = x + 1$ e $f(g(x)) = 2x$. Então o valor de $g(0)$ é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

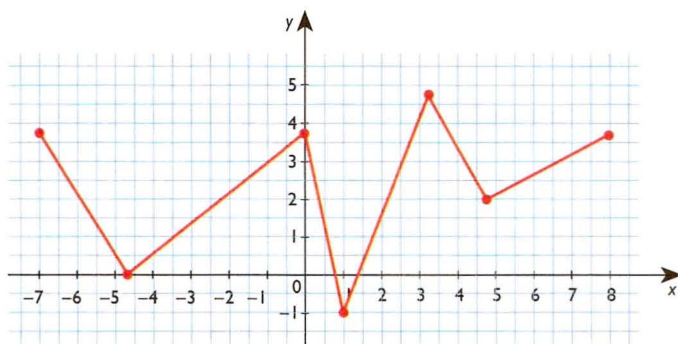
95. (PUC-MG) Duas funções são tais que $f(x) = x + 3$ e $f[g(x)] = 5x + 4$. Então $\frac{g(-2)}{f(0)}$ é igual a:

a) -9
b) -3
c) 0
d) 1
e) 3

96. (Fesp-SP) Se a função $f(x) = \frac{5x - 1}{2}$ e $f^{-1}(x) = \frac{2x + 1}{m}$, o valor de m é:

a) 3
b) 5
c) 2
d) 4
e) 1

97. (UFMG) Observe a figura:



Essa figura contém o gráfico da função $y = f(x)$ definida em $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 \leq x \leq 3\}$.
Todas as afirmativas sobre a figura são corretas, exceto:

a) a soma de todas as raízes distintas de $f(x)$ é negativa.
b) $f(-5) < f(6)$.
c) $f(-4) + f(2) > 1$.
d) a soma de todos os valores distintos de x, $x \in A$, tais que $f(x) = 3$, é um número positivo.
e) $f(3) - f(-2) < 0$.

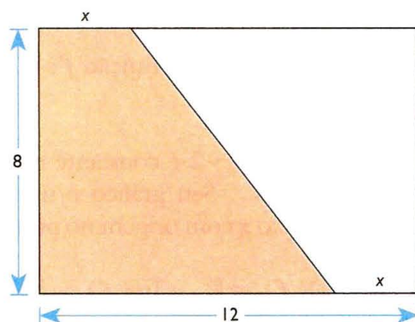
Capítulo

4 Função do 1º grau

1. Função constante

Existem funções em que o valor de $f(x)$ é sempre o mesmo para qualquer valor de x, como podemos verificar no exemplo a seguir.

O retângulo da figura ao lado tem 12 cm de comprimento e 8 cm de largura.



Considerando o trapézio assinalado, temos:

- a base maior (B) mede $(12 - x)$ cm;
- a base menor (b) mede x cm;
- a altura (h) mede 8 cm.

A área y de um trapézio é dada por

$$y = \frac{B + b}{2} \cdot h$$

No nosso caso temos:

$$y = \frac{(12 - x) + x}{2} \cdot 8 \Rightarrow y = \frac{12 - x + x}{2} \cdot 8 \Rightarrow y = 48$$

A área do trapézio é 48 cm^2.

Observe que a área y **não depende** do valor de x, ou seja, para qualquer valor de x, com $0 < x < 12$, temos, no nosso caso, sempre $y = 48$.

Funções desse tipo são chamadas **funções constantes**.

De um modo geral:

> Dado um número real k, chama-se **função constante** a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $y = f(x) = k$.

São exemplos de função constante:

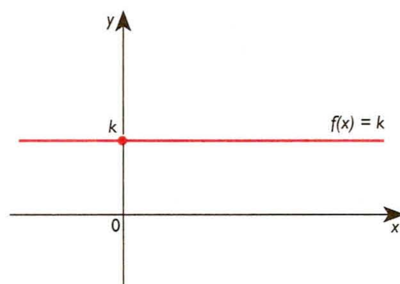
a) $f(x) = 3$ b) $y = -6$ c) $y = \frac{4}{5}$ d) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Gráfico da função constante

O gráfico da função constante $f(x) = k$ é uma reta paralela ao eixo x passando pelos pontos de ordenadas $y = k$.

O domínio da função é $D(f) = \mathbb{R}$.

A imagem da função é $Im(f) = \{k\}$.

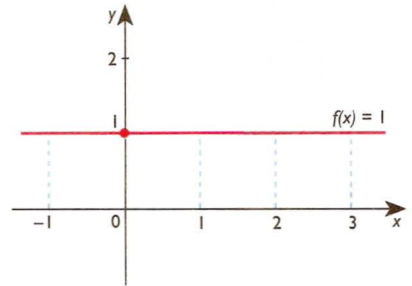


Exemplo 1

Construir o gráfico da função $f(x) = 1$.

Solução

Como $f(x) = 1$ é uma função constante, seu gráfico é uma reta paralela ao eixo x passando pelos pontos de ordenadas $y = 1$.



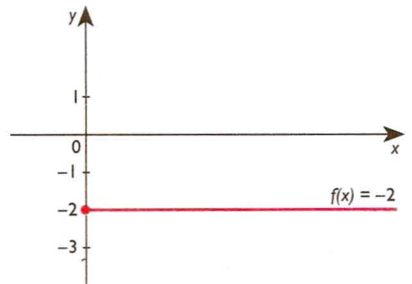
$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } Im(f) = \{1\}$$

Exemplo 2

Construir o gráfico da função $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -2$.

Solução

A função $f(x) = -2$ é constante no seu domínio $D(f) = \mathbb{R}_+$. Seu gráfico é uma semi-reta paralela ao eixo x com origem no ponto $(0, -2)$.



$$D(f) = \mathbb{R}_+ \text{ e } Im(f) = \{-2\}$$

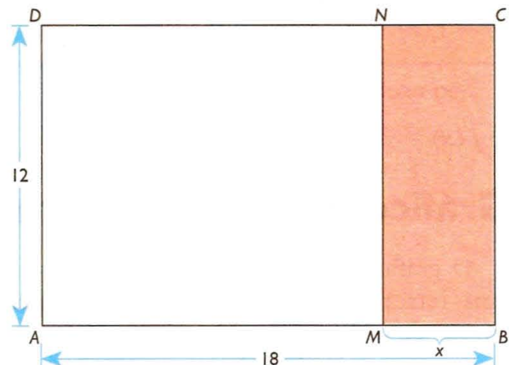
EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Construa o gráfico das funções abaixo:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $y = 3$ b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $y = \frac{5}{2}$ c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = -\frac{3}{2}$

2. Função do 1º grau

A figura mostra um retângulo $ABCD$, de lados 18 cm e 12 cm. Sobre $\overline{AB}$ marcou-se um ponto M, a x cm de B. Por M traçou-se $\overline{MN} \,//\, \overline{BC}$. Dessa forma foram obtidos dois retângulos.



O perímetro y do retângulo $MBCN$ assinalado é função de x definida por:

$$y = 2x + 24$$

Assim, para $x = 3$ cm, teremos:

$$y = 2(3) + 24 = 6 + 24 = 30$$

O perímetro do retângulo será de 30 cm.

A área z do mesmo retângulo em cm^2, também função de x, é definida por:

$$z = 12x$$

Assim, para $x = 3$ cm, teremos:

$$z = 12 \cdot 3 = 36$$

A área do retângulo será de 36 cm^2.

Cada uma dessas duas funções é um exemplo de **função do 1º grau**.

De um modo geral:

> Dados os números reais a e b, com $a \neq 0$, chama-se **função do 1º grau** (ou **função afim**) a função:
>
> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = ax + b$

Nas seguintes funções do 1º grau, estamos destacando os valores de a e b:

a) $f(x) = 3x + 12$, em que $a = 3$ e $b = 12$.

b) $y = x - 3$, em que $a = 1$ e $b = -3$.

c) $f(x) = -0{,}2x$, em que $a = -0{,}2$ e $b = 0$.

Os exemplos seguintes envolvem funções do 1º grau.

Exemplo 1

Dada a função $f(x) = 2x$, calcular:

a) $f(3)$

b) $f(x + 1)$

Solução

a) $f(3) = 2 \cdot 3 \Rightarrow f(3) = 6$

b) $f(x + 1) = 2 \cdot (x + 1) \Rightarrow f(x + 1) = 2x + 2$

Exemplo 2

Sendo $f(3x + 2) = 5x + 3$, calcular $f(8)$.

Solução

Devemos fazer $3x + 2 = 8 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$.

Logo, $f(8) = 5(2) + 3 = 10 + 3 = 13$.

Exemplo 3

Sendo $f(x + 2) = x + 3$, calcular $f(x - 5)$ em função de x.

Solução

Fazendo $x + 2 = t$, temos: $x = t - 2$.

Substituindo esses valores em $f(x + 2) = x + 3$, vem:

$f(t) = (t - 2) + 3 \Rightarrow f(t) = t + 1$

Substituindo t por $x - 5$, vem:

$f(x - 5) = (x - 5) + 1 \Rightarrow f(x - 5) = x - 4$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

2. Dadas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, identifique aquelas que são do 1º grau.

a) $f(x) = 6x - 15$

b) $g(x) = -9x + 1$

c) $h(x) = x^2 + 7x$

d) $y = 10 - 4x$

e) $f(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{3}$

f) $y = x - \dfrac{3}{5}$

3. Dada a função $f(x) = 5x - 2$, determine:

a) $f(-3)$

b) $f\left(\dfrac{1}{5}\right)$

c) $f(0)$

d) $f(\sqrt{2})$

4. Sendo $f(x) = 4x + 5$, escreva:

a) $f(x - 2)$ b) $f(3x + 4)$ c) $f\left(\frac{x}{4} + 1\right)$

5. Dada a função $f(x) = 8x + 12$, determine o valor de x para que se tenha:

a) $f(x) = 0$ b) $f(x) = 4$ c) $f(x) = 12$

6. Sabendo que $f(x + 2) = 10x - 7$, pede-se:

a) $f(3)$ b) $f(1)$ c) $f(5)$

7. Sendo $f(x + 6) = 8x - 15$, determine:

a) $f(x)$ b) $f(3x + 2)$

8. Uma transportadora realiza serviços apenas para carga completa, cobrando uma quantia inicial de 100 UT (Unidade de Transporte) e mais 5 UT por quilômetro rodado. Chamando de x o número de quilômetros percorridos, responda:

a) Qual a lei que define o preço y a ser cobrado em função de x?
b) Quantas UT serão pagas para um transporte de 120 km?
c) Se um transporte custou 300 UT, qual o total de quilômetros percorridos?

9. De uma folha de cartolina retangular de 50 cm por 40 cm foram retirados 6 quadradinhos de lado x, conforme nos mostra a figura. Qual a lei que define o perímetro y da parte restante?

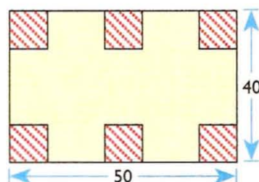


Gráfico da função do 1º grau

O gráfico de uma função do 1º grau é uma reta não-paralela nem ao eixo x nem ao eixo y. Seu domínio é $D(f) = \mathbb{R}$ e sua imagem é $Im(f) = \mathbb{R}$.

Exemplo 1

Construir o gráfico da função $y = 2x + 3$ ($a = 2 > 0$).

Solução

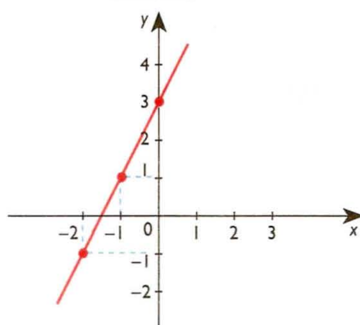
A função $y = 2x + 3$ é do 1º grau e, portanto, seu gráfico é uma reta. Como o traçado de uma reta pode ser feito a partir de dois de seus pontos, vamos atribuir a x dois valores arbitrários e, conseqüentemente, encontraremos os valores respectivos de y. Para evitar possíveis erros, podemos determinar um terceiro ponto da reta, que servirá para testar o alinhamento.

Para $x = 0 \Rightarrow y = 2 \cdot 0 + 3 \Rightarrow y = 3$.
Para $x = -2 \Rightarrow y = 2 \cdot (-2) + 3 \Rightarrow y = -1$.
Para $x = -1 \Rightarrow y = 2 \cdot (-1) + 3 \Rightarrow y = 1$.

Tabela

x	y	(x, y)
0	3	(0, 3)
–2	–1	(–2, –1)
–1	1	(–1, 1)

Gráfico



Observe que a função $y = 2x + 3$ é **crescente**. Isso ocorrerá sempre que o coeficiente a do termo em x da função for **positivo**.

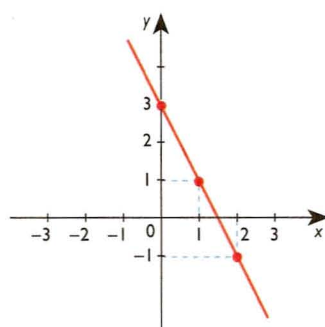
Exemplo 2
Construir o gráfico da função $y = -2x + 3$ ($a = -2 < 0$).

Solução

Tabela

x	y	(x, y)
1	1	(1, 1)
0	3	(0, 3)
2	–1	(2, –1)

Gráfico



Observe que a função $y = -2x + 3$ é **decrescente**. Isso ocorrerá sempre que o coeficiente a do termo em x da função for **negativo**.
Em resumo temos:

> Se $a > 0$, a função $y = ax + b$ é **crescente**.
> Se $a < 0$, a função $y = ax + b$ é **decrescente**.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

10. Construa o gráfico das funções:

a) $f(x) = 2x + 5$ b) $f(x) = 5 - 2x$ c) $y = \frac{1}{2}x + 2$

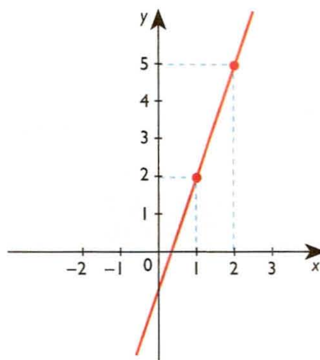
11. Classifique em crescente ou decrescente as seguintes funções:

a) $f(x) = 10x + 40$ b) $y = -8x$ c) $y = -\frac{3}{4}x$ d) $f(x) = x - 12$

12. Dada a função $y = (3m - 6)x + 8m$, determine o valor de m, de modo que:
a) a função seja constante b) a função seja crescente c) a função seja decrescente

---

Exemplo 3
Escrever a função correspondente ao gráfico:



Solução
O gráfico é uma reta não-paralela aos eixos. Trata-se, pois, de uma função do 1º grau, isto é, uma função do tipo $y = ax + b$.

Como os pares (1, 2) e (2, 5) pertencem ao gráfico:

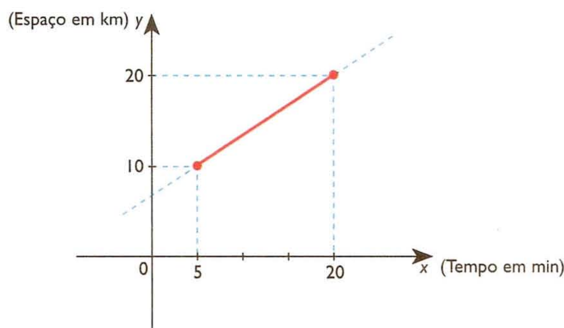
- substituindo x por 1 e y por 2, obtemos $a + b = 2$;
- substituindo x por 2 e y por 5, obtemos $2a + b = 5$.

Resolvendo o sistema $\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 5 \end{cases}$, encontramos $a = 3$ e $b = -1$.

Logo, a função é $y = 3x - 1$.

Exemplo 4

Um automóvel, com velocidade constante, percorre uma trajetória retilínea conforme mostra a figura abaixo:



Calcular o tempo em que o automóvel percorrerá 30 km.

Solução

O gráfico corresponde a uma função do 1º grau, ou seja, uma função do tipo $y = ax + b$.

- Substituindo x por 5 e y por 10, obtemos $5a + b = 10$.
- Substituindo x por 20 e y por 20, obtemos $20a + b = 20$.

Resolvendo o sistema $\begin{cases} 5a + b = 10 \\ 20a + b = 20 \end{cases}$, encontramos $a = \dfrac{2}{3}$ e $b = \dfrac{20}{3}$.

A função é, portanto: $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{20}{3}$.

Para $y = 30$, obtemos: $30 = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{20}{3} \Rightarrow x = 35$.

O automóvel percorrerá 30 km em 35 min.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

13. A tabela refere-se à função do 1º grau $y = ax + b$. Qual é a lei dessa função?

x	y
2	2
3	6

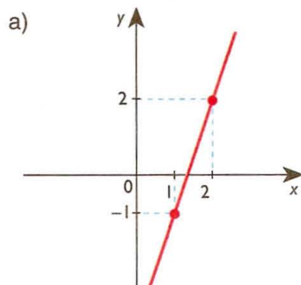
14. Dada a função $f(x) = ax + b$, em que $f(1) = 11$ e $f(-2) = 5$, pede-se o valor de a e de b.

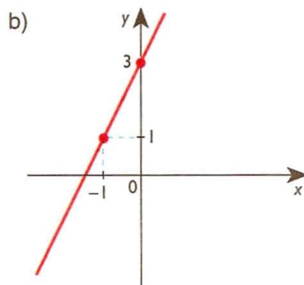
15. Dê a lei da função do 1º grau cujo gráfico passa pelos pontos:

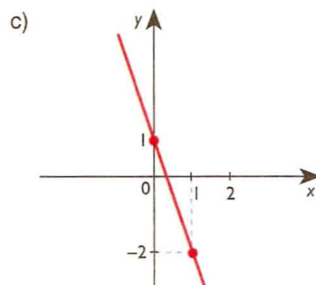
a) $A(2, 8)$ e $B(3, 9)$

b) $A(2, -3)$ e $B(-2, 5)$

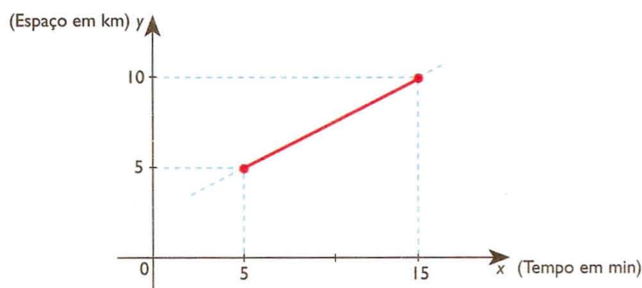
16. Dê a lei das funções determinadas pelos gráficos:

a) 

b) 

c) 

17. Um ciclista, com velocidade constante, percorre uma trajetória retilínea conforme o gráfico abaixo:



Em quanto tempo percorrerá 15 km?

Zero da função do 1º grau

Chama-se **zero** ou **raiz** da função do 1º grau $f(x) = ax + b$ o valor de x para o qual $f(x) = 0$. Assim:

$$f(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

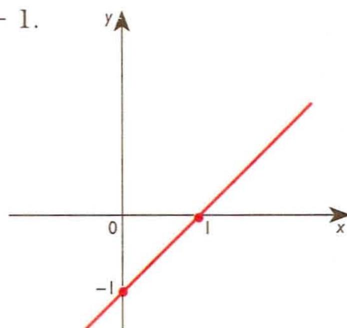
Então a raiz da função $f(x) = ax + b$ é $-\frac{b}{a}$.

Determinemos, como exemplo, a raiz da função $y = x - 1$.

Temos:

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

O número 1 é a raiz da função $y = x - 1$. Observe na figura ao lado que o gráfico da função corta o eixo x no ponto $(1, 0)$.



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

18. Calcule o zero de cada uma das funções:

a) $y = 2x - 8$ b) $y = 3x$ c) $y = -7x + 3{,}5$

19. Determine as coordenadas do ponto onde o gráfico das seguintes funções corta o eixo dos x.

a) $y = 3x - 1$ b) $f(x) = 5 - 4x$ c) $f(x) = \frac{2x - 10}{4}$ d) $f(x) = \frac{-x}{8}$

3. Estudo do sinal da função do 1º grau

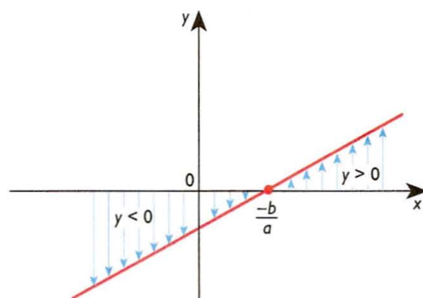
Estudar o sinal da função do 1º grau $y = ax + b$ é determinar os valores reais de x, para os quais se tenha $y < 0$, $y = 0$ ou $y > 0$. Sabemos que $y = 0$ se $x = \frac{-b}{a}$. Para conhecermos os valores reais de x de modo que se tenha $y < 0$ ou $y > 0$, devemos considerar o sinal do termo a.

Se $a > 0$, a função é crescente.

Nesse caso, temos:

$$x < \frac{-b}{a} \Rightarrow y < 0$$

$$x > \frac{-b}{a} \Rightarrow y > 0$$

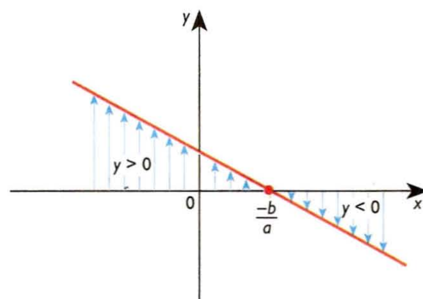


Se $a < 0$, a função é decrescente.

Nesse caso, temos:

$$x < \frac{-b}{a} \Rightarrow y > 0$$

$$x > \frac{-b}{a} \Rightarrow y < 0$$



Vamos resolver, como exemplos, alguns exercícios.

Exemplo 1

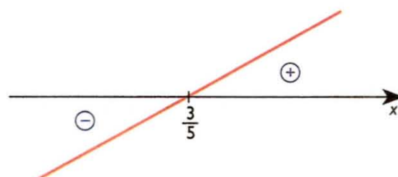
Estudar o sinal da função $y = 5x - 3$.

Solução

Calculemos o zero da função.

$y = 0 \Rightarrow 5x - 3 = 0 \Rightarrow 5x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{5}$.

Como $a = 5 > 0$, temos o seguinte esboço do gráfico:



Então:

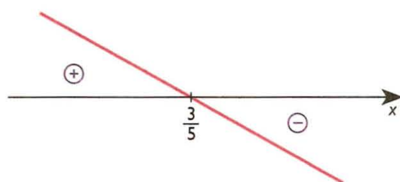
- para $x < \frac{3}{5} \Rightarrow y < 0$;
- para $x = \frac{3}{5} \Rightarrow y = 0$;
- para $x > \frac{3}{5} \Rightarrow y > 0$.

Exemplo 2
Estudar o sinal da função $y = -5x + 3$.

Solução
Calculemos o zero da função.

$y = 0 \Rightarrow -5x + 3 = 0 \Rightarrow -5x = -3 \Rightarrow x = \dfrac{3}{5}$.

Como $a = -5 < 0$, temos o seguinte esboço do gráfico:

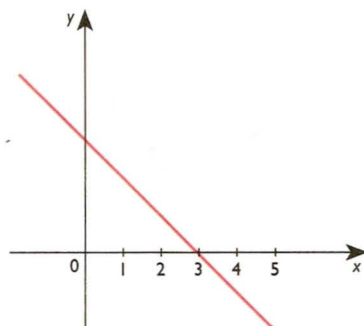


Então:

• para $x < \dfrac{3}{5} \Rightarrow y > 0$;   • para $x = \dfrac{3}{5} \Rightarrow y = 0$;   • para $x > \dfrac{3}{5} \Rightarrow y < 0$.

Exemplo 3
Considerando o gráfico de f_1, ao lado, verificar se y é positivo, negativo ou nulo para os seguintes valores de x:

a) $x = 5$ b) $x = 1$



Solução
Observando o gráfico, nota-se que para $x = 5$ tem-se $y < 0$ e para $x = 1$ tem-se $y > 0$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

20. Faça o estudo do sinal das seguintes funções:

a) $y = 3x - 6$ b) $y = -\dfrac{x}{3}$ c) $y = 5x$ d) $y = -x - \dfrac{2}{3}$

21. Determine o sinal da função $y = 3x - 15$, quando:

a) $x = -2$ b) $x = 2$ c) $x = 5$ d) $x = 7$ e) $x = 9$

4. Inequações do 1º grau

Chama-se **inequação do 1º grau na variável x** toda inequação que se reduz a uma das formas:

$$ax + b \geqslant 0, \quad ax + b > 0, \quad ax + b \leqslant 0, \quad ax + b < 0,$$

em que a e b são números reais quaisquer, com $a \neq 0$.

Resolve-se uma inequação do 1º grau aplicando-se as propriedades da desigualdade.

Exemplo 1

Resolver a inequação $-5x + 10 \geqslant 0$ em $U = \mathbb{R}$.

Solução

$-5x + 10 \geqslant 0 \Rightarrow -5x \geqslant -10 \Rightarrow 5x \leqslant 10 \Rightarrow x \leqslant 2$

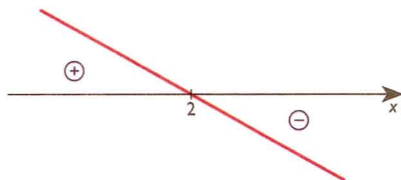
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$.

Também poderíamos resolver a inequação estudando o sinal da função $y = -5x + 10$:

$y = 0 \Rightarrow -5x + 10 = 0 \Rightarrow -5x = -10 \Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = 2$

Como $a = -5 < 0$, a função é decrescente.

Logo, $y \geqslant 0$ para $x \leqslant 2$.



Exemplo 2

Resolver a inequação $2(2x - 1) - 3(4x - 2) \geqslant 3$ em $U = \mathbb{R}$.

Solução

$2(2x - 1) - 3(4x - 2) \geqslant 3$

$4x - 2 - 12x + 6 \geqslant 3$

$4x - 12x \geqslant 3 + 2 - 6$

$-8x \geqslant -1$ (multiplicando por -1)

$8x \leqslant 1 \Rightarrow x \leqslant \dfrac{1}{8}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \dfrac{1}{8}\right\}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

22. Resolva as inequações do 1º grau em $\mathbb{R}$:

a) $3(4x - 9) - 2(x + 2) > -4$

b) $\dfrac{3x}{2} - \dfrac{6x}{5} \leqslant 1$

c) $\dfrac{x + 2}{3} - \dfrac{2x - 5}{4} < 2$

d) $\dfrac{3(2x - 4)}{4} - \dfrac{x + 6}{3} > 0$

Exemplo 3

Resolver a inequação $1 < 3x - 2 \leqslant 10$, considerando:

a) $U = \mathbb{R}$

b) $U = \mathbb{Z}$

Solução

a) $U = \mathbb{R}$

Devemos resolver as inequações $1 < 3x - 2$ e $3x - 2 \leq 10$:

$1 < 3x - 2$
$-3x < -1 - 2$
$-3x < -3$ (multiplicando por -1)
$3x > 3$
$x > 1$



$3x - 2 \leq 10$
$3x \leq 10 + 2$
$3x \leq 12$
$x \leq 4$



A intersecção dessas soluções nos dá a solução procurada:



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 4\}$.

b) Para $U = \mathbb{Z}$, o conjunto solução é $S = \{2, 3, 4\}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

23. Resolva as inequações considerando como conjunto universo $U = \mathbb{R}$.

a) $-3 < 5x + 2 < 7$
b) $2 \leq 6x - 10 \leq 2x$
c) $x \leq 2x - 3 < x + 7$
d) $2x - 5 < 3x + 4 < 6x + 6$

Inequação-produto

Dadas as funções $f(x)$ e $g(x)$, chama-se **inequação-produto** toda inequação do tipo:

$$f(x) \cdot g(x) < 0, \quad f(x) \cdot g(x) \leq 0, \quad f(x) \cdot g(x) > 0 \quad \text{ou} \quad f(x) \cdot g(x) \geq 0$$

Estudando os sinais de $f(x)$ e $g(x)$, determinaremos o sinal do produto $f(x) \cdot g(x)$ e obteremos também o conjunto solução da inequação.

Exemplo 1
Resolver a inequação $(x + 2) \cdot (-2x + 3) \geq 0$.

Solução
Dados $f(x) = x + 2$ e $g(x) = -2x + 3$, estudemos o sinal de cada função.

Zero da função $f(x)$

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

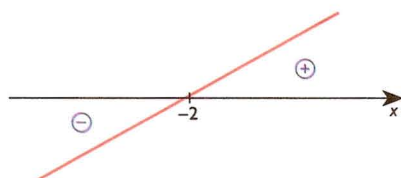
Como $a = 1 > 0$, a função é crescente.

Zero da função $g(x)$

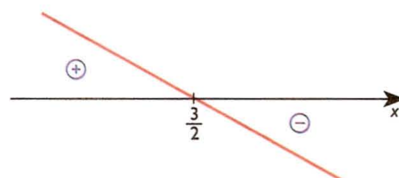
$-2x + 3 = 0 \Rightarrow -2x = -3 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Como $a = -2 < 0$, a função é decrescente.

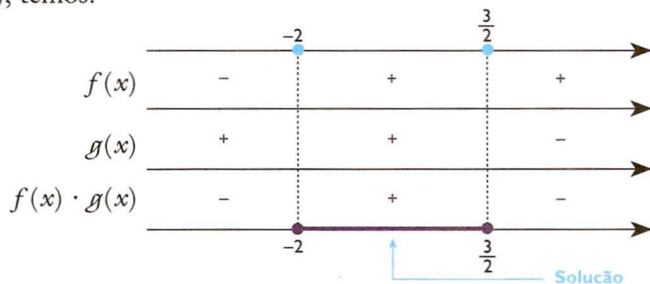
Sinais de $f(x)$



Sinais de $g(x)$



Colocando em um quadro os sinais de cada função e determinando o sinal do produto $f(x) \cdot g(x)$, temos:



Como queremos $f(x) \cdot g(x) \geq 0$, temos:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq \frac{3}{2}\right\}$$

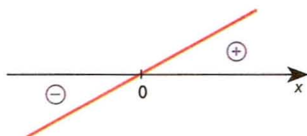
Exemplo 2
Resolver a inequação $x \cdot (-2x + 4) \cdot (x - 3) < 0$.

Solução
Dados $f_1(x) = x$, $f_2(x) = -2x + 4$ e $f_3(x) = x - 3$, estudemos o sinal de cada função.

Zero de $f_1(x)$

$x = 0$

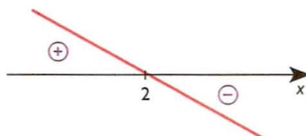
Sinais de $f_1(x)$



Zero de $f_2(x)$

$-2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

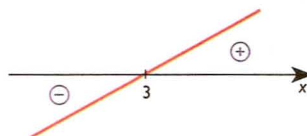
Sinais de $f_2(x)$



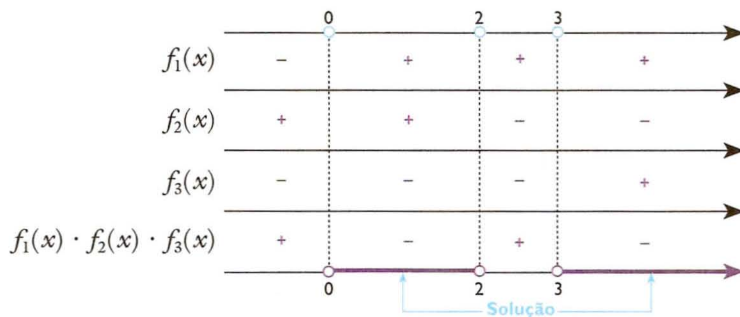
Zero de $f_3(x)$

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

Sinais de $f_3(x)$



Quadro de sinais



Como queremos $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) < 0$, temos:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2 \text{ ou } x > 3\}.$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

24. Resolva as inequações:

a) $(x - 2)(x + 3) > 0$
b) $(x - 2)(-2x + 8) \leqslant 0$
c) $(2x + 10)(-3x + 1) > 0$
d) $(-x - 2)(-3x - 4) < 0$
e) $(-x + 1)(-2x + 10)(x + 3) \geqslant 0$
f) $3x(2x - 1)(-3x + 7) < 0$

Inequação-quociente

Dadas as funções $f(x)$ e $g(x)$, chama-se **inequação-quociente** toda inequação do tipo:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} < 0 \text{ ou } \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0$$

Como a regra de sinais do quociente é igual à regra de sinais do produto, para resolvermos uma inequação-quociente vamos proceder da mesma forma como fizemos na resolução da inequação-produto, tomando-se agora o cuidado de colocar $g(x) \neq 0$.

Exemplo 1

Resolver as inequações:

a) $\dfrac{3x-4}{x-2} > 0$ b) $\dfrac{3x-4}{x-2} \geqslant 0$ c) $\dfrac{3x-4}{x-2} < 0$ d) $\dfrac{3x-4}{x-2} \leqslant 0$

Solução

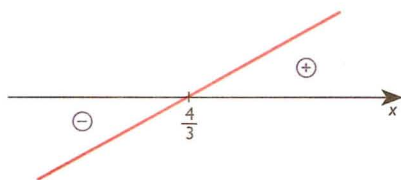
Façamos $f(x) = 3x - 4$ e $g(x) = x - 2$.

Estudando os sinais das funções $f(x)$ e $g(x)$, temos:

Zero de $f(x)$

$$3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

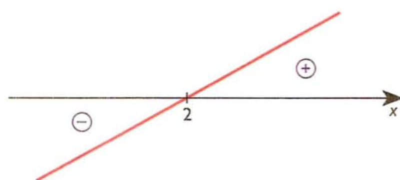
Sinais de $f(x)$



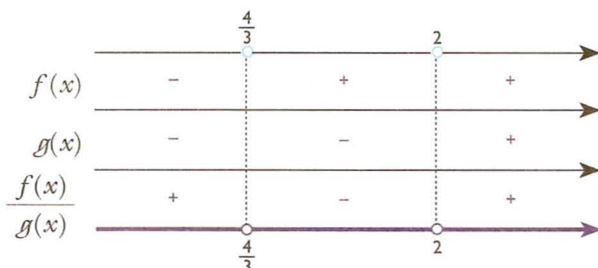
Zero de $g(x)$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Sinais de $g(x)$



Colocando no quadro os sinais de $f(x)$ e $g(x)$, obteremos os sinais de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$:



A última linha do quadro de sinais nos fornece as soluções das inequações dadas.

a) Como $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$, graficamente temos:

Portanto: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \dfrac{4}{3} \text{ ou } x > 2\right\}$.

b) Como $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0$, com $g(x) \neq 0$,
graficamente temos:

Portanto: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \dfrac{4}{3} \text{ ou } x > 2\right\}$.

c) Como $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$, graficamente temos:

Portanto: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{4}{3} < x < 2\right\}$.

d) Como $\dfrac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0$, com $g(x) \neq 0$,
graficamente temos:

Portanto: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{4}{3} \leqslant x < 2\right\}$.

Exemplo 2

Resolver a inequação $\dfrac{3x-2}{x-3} \leqslant 1$.

Solução

$$\frac{3x-2}{x-3} \leqslant 1 \Rightarrow \frac{3x-2}{x-3} - 1 \leqslant 0 \Rightarrow \frac{3x-2-(x-3)}{x-3} \leqslant 0 \Rightarrow \frac{3x-2-x+3}{x-3} \leqslant 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dfrac{2x+1}{x-3} \leqslant 0$, com $x - 3 \neq 0$. Fazendo $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x - 3$, temos:

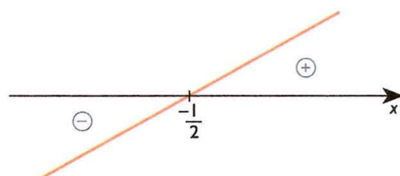
Zero de $f(x)$

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

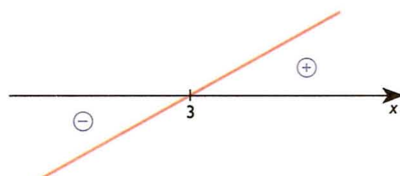
Zero de $g(x)$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

Sinais de $f(x)$



Sinais de $g(x)$



Quadro de sinais

		$-\frac{1}{2}$		3	
$f(x)$	−		+		+
$g(x)$	−		−		+
$\frac{f(x)}{g(x)}$	+		−		+
		$-\frac{1}{2}$	Solução	3	

Como queremos $\frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0$, com $g(x) \neq 0$, temos:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leqslant x < 3\right\}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

25. Resolva as seguintes inequações no conjunto $\mathbb{R}$.

a) $\frac{x-3}{x+2} > 0$

b) $\frac{3x+9}{x-4} \geqslant 0$

c) $\frac{6x-12}{x} > 0$

d) $\frac{3x-4}{x+1} < 2$

e) $\frac{5-2x}{x+2} \geqslant 1$

f) $\frac{x+4}{2x-5} < 2$

26. Resolva as inequações:

a) $\frac{(x-2)(4-x)}{x+3} \geqslant 0$

b) $\frac{x(x-4)}{x+2} < 0$

27. Determine o domínio das funções:

a) $f(x) = \sqrt{(x+1)(x-6)}$

b) $y = \sqrt{\frac{2x+3}{x-2}}$

Exemplo 3

Resolver a inequação $-1 \leqslant \frac{5x-8}{3-x} \leqslant 1$.

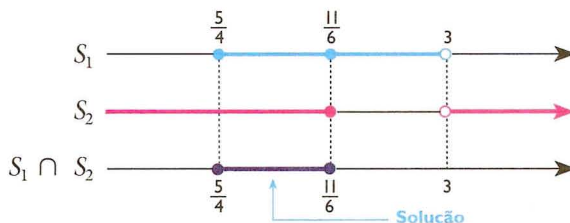
Solução

Devemos ter: $\frac{5x-8}{3-x} \geqslant -1$ (I) e $\frac{5x-8}{3-x} \leqslant 1$ (II)

Resolvendo a inequação (I), encontramos: $S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{4} \leqslant x < 3\right\}$.

Resolvendo a inequação (II), encontramos: $S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{11}{6} \text{ ou } x > 3\right\}$.

Como as condições (I) e (II) devem ocorrer simultaneamente, a solução será: $S = S_1 \cap S_2$.



Então a solução final é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{4} \leqslant x \leqslant \frac{11}{6}\right\}$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

28. Resolva as inequações:

a) $-2 \leqslant \frac{3x - 6}{4 - x} \leqslant 2$

b) $2 \leqslant \frac{4x - 10}{3x - 6} \leqslant 4$

Inequação-potência

Dada a função $f(x)$ e o número natural $n (n \geqslant 2)$, chama-se **inequação-potência** toda inequação do tipo:

$$[f(x)]^n \geqslant 0, \quad [f(x)]^n > 0, \quad [f(x)]^n \leqslant 0 \quad \text{ou} \quad [f(x)]^n < 0$$

Vejamos alguns exemplos de resolução de inequações-potência.

Exemplo 1

Resolver as inequações:

a) $(2x - 6)^4 \geqslant 0$ b) $(2x - 6)^4 < 0$ c) $(2x - 6)^4 > 0$ d) $(2x - 6)^4 \leqslant 0$

Solução

Como $n = 4$ (par), então a potência $(2x - 6)^4$ nunca será negativa. Ela será positiva se $2x - 6 \neq 0$ e nula se $2x - 6 = 0$. Em vista disso, temos:

a) $(2x - 6)^4 \geqslant 0 \Rightarrow S = \mathbb{R}$

b) $(2x - 6)^4 < 0 \Rightarrow S = \varnothing$

c) $(2x - 6)^4 > 0 \Rightarrow 2x - 6 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$. Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$.

d) $(2x - 6)^4 \leqslant 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$. Logo, $S = \{3\}$.

Exemplo 2

Resolver as inequações:

a) $(2x - 6)^3 > 0$ b) $(3x - 5)^{101} < 0$

Solução

A potência de expoente ímpar tem sempre o sinal da base. Então:

a) $(2x - 6)^3 > 0 \Rightarrow 2x - 6 > 0 \Rightarrow x > 3$. Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$.

b) $(3x - 5)^{101} < 0 \Rightarrow 3x - 5 < 0 \Rightarrow x < \frac{5}{3}$. Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{5}{3}\right\}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

29. Determine o conjunto solução das seguintes inequações:

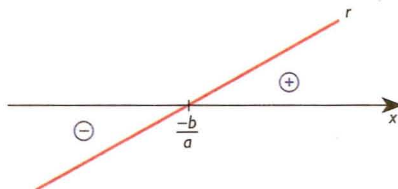
a) $(2x + 7)^4 \geqslant 0$
b) $(5 - 2x)^2 < 0$
c) $(2x + 0{,}8)^6 \leqslant 0$
d) $\left(\dfrac{4x}{5} - 1\right)^8 > 0$
e) $(3x - 6)^5 > 0$
f) $(5x + 1)^3 < 0$
g) $(-0{,}2x + 1{,}8)^7 \leqslant 0$
h) $(0{,}3x + 12)^9 \geqslant 0$

RELEMBRANDO CONCEITOS

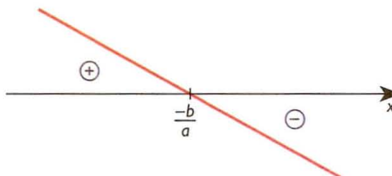
Se $a \neq 0$, $y = ax + b$ é uma função do 1º grau.

O gráfico da função é uma reta r que corta o eixo dos x num único ponto, de abscissa $x = \dfrac{-b}{a}$.

Para $a > 0$, a função é **crescente** e a variação do seu sinal está mostrada na figura:



Para $a < 0$, a função é **decrescente** e a variação do seu sinal está mostrada na figura:



EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

30. Dada a função $f(x) = (-2m + 10)x + m - 4$, determine m de modo que:

a) $f(x)$ seja uma função constante.
b) $f(x)$ seja uma função do 1º grau.
c) $f(x)$ seja uma função crescente.
d) $f(x)$ seja uma função decrescente.

31. Sendo $f(x) = 5x + 4$, pede-se:

a) $f(0)$
b) $f\left(\dfrac{3}{5}\right)$
c) $f(2x - 3)$
d) o zero de $f(x)$
e) o valor de x para que se tenha $f(x) = -16$.

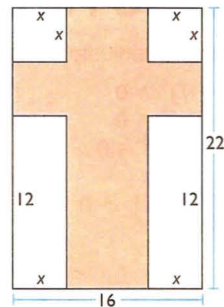
32. Dada a função $f(3x - 1) = 11x - 10$, determine:

a) $f(x)$
b) $f(4)$

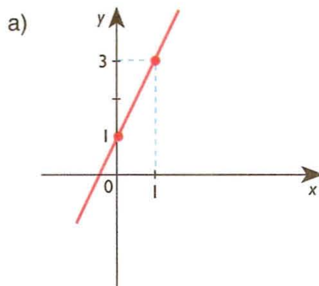
33. No retângulo mostrado na figura, foram retirados:

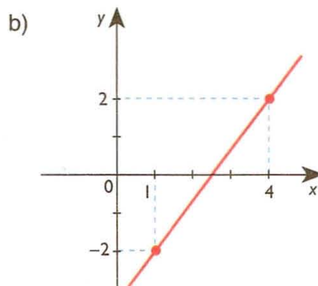
- de cada canto superior, um quadrado de lado x cm;
- de cada canto inferior, um retângulo de x cm por 12 cm.

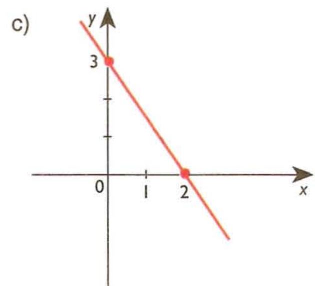
Dessa forma, obteve-se a cruz assinalada. Dê o perímetro y dessa cruz.



34. Determine a raiz de cada uma das funções representadas pelos gráficos:

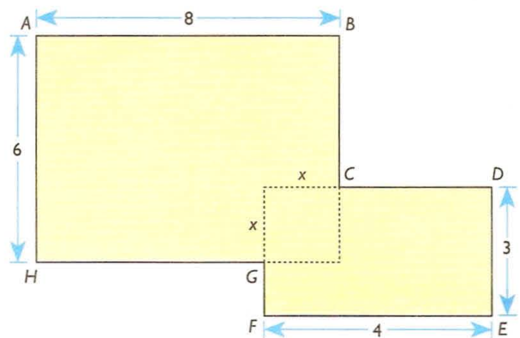
a)


b)


c)


35. Dois pedaços de cartolina retangulares, um de 8 cm por 6 cm e outro de 4 cm por 3 cm, foram colados conforme mostra a figura, de modo que a parte superposta resultou num quadrado de lado x cm ($0 < x < 3$).

a) Dê o perímetro y do polígono $ABCDEFGH$.
b) Dê o perímetro no caso particular de $x = 2$.
c) Dê o valor de x para o qual o perímetro é 36 cm.



36. Resolva a inequação $(x - 5)(-2x - 4) \geqslant 0$ no conjunto universo dado.

a) $U = \mathbb{N}$ b) $U = \mathbb{Z}$ c) $U = \mathbb{R}$

37. Escreva a soma das soluções inteiras do sistema $1 \leqslant \dfrac{2x - 3}{2} \leqslant 7{,}5$.

38. Ache o maior valor inteiro de x que satisfaça a inequação $\dfrac{x(x - 2)}{x + 3} < 0$.

39. (UFMG) Determine o valor de m e n de modo que os pontos $P_1(-2, -1)$ e $P_2(-1, -2)$ pertençam ao gráfico da reta definida por $y = nx + m$.

40. (UFSC) Sabendo que a função $f(x) = mx + n$ admite 5 como raiz e $f(-2) = -63$, calcule o valor de $f(16)$.

41. (EsPCEx) Determine o valor de x pertencente a $\mathbb{Z}$ que satisfaça a inequação $\dfrac{56 - 7x}{5x - 37} \geqslant 0$.

42. (PUC-RJ) Ache todos os números reais x que satisfaçam $\dfrac{x - 1}{2 - x} \leqslant 2$.

43. (Unicamp-SP) Ache os valores reais de x para os quais vale a desigualdade $\dfrac{-4}{x} + \dfrac{3}{2} \geqslant \dfrac{-1}{x}$.

44. (Fatec-SP) Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $\dfrac{x + 3}{x - 2} \leqslant \dfrac{x + 6}{x + 4}$.

45. (Faap-SP) Determine o valor inteiro de x que satisfaz as desigualdades: $\begin{cases} 3x + 1 < 2x + 20 \\ x > 15 \\ \dfrac{x - 1}{x + 3} > \dfrac{4}{5} \end{cases}$.

46. (F. Oswaldo Cruz-SP) Resolva a inequação $(a - 1)x < a - 1$, sendo $a < 1$.

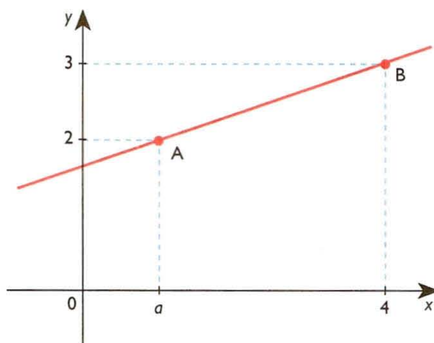
TESTES

47. (U. Sagrado Coração-SP) Para que os pontos $A(1, 2)$ e $B(2, -1)$ pertençam ao gráfico da função $f(x) = ax + b$, o valor de $b - a$ deve ser:

a) 2 b) 8 c) −2 d) −8 e) 4

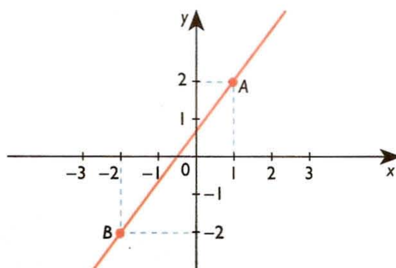
48. (U. E. Ponta Grossa-PR) A reta $\overleftrightarrow{AB}$, representada abaixo, intercepta o eixo x no ponto de abscissa:

a) $8 - 3a$ b) $3a - 8$ c) $5a$ d) $-3a - 8$ e) $-5a$



49. (Fatec/Ceeteps-SP) Seja $P(t, t + 4)$ um ponto da reta AB dada pela figura abaixo. O valor de t é:

a) $\dfrac{35}{4}$ b) $\dfrac{35}{3}$ c) 18 d) 10 e) 14



50. (Unifor-CE) A função *f*, do 1º grau, é definida por $f(x) = 3x + k$. O valor de *k* para que o gráfico de *f* corte o eixo das ordenadas no ponto de ordenada 5 é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

51. (F. Ibero-Americana-SP) O conjunto solução da inequação $\frac{2x-4}{x-2} \geqslant 0$ é:

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$
c) $S = \{\mathbb{R}\}$
d) $S = \varnothing$
e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$

52. (U. Católica de Salvador-BA) O mais amplo domínio real da função definida por $f(x) = \sqrt{\frac{3-x}{x-2}}$ é:

a) $\mathbb{R}$
b) $]-\infty, 2[\cup [3, +\infty[$
c) $[3, +\infty[$
d) $]-\infty, 2[$
e) $]2, 3]$

53. (PUC-MG) O domínio da função $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$ é o conjunto dos números reais *x* tais que:

a) $x \leqslant -3$ ou $x > 2$
b) $x < -2$ ou $x \geqslant 3$
c) $-2 \leqslant x \leqslant 3$
d) $-3 \leqslant x < 2$
e) $x > -2$

54. (UFCE) O domínio da função real $f(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{2} + x}{\sqrt{3} - x}}$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R};\ -\sqrt{2} \leqslant x < \sqrt{3}\}$
b) $\{x \in \mathbb{R};\ \sqrt{2} < x < \sqrt{3}\}$
c) $\{x \in \mathbb{R};\ -\sqrt{3} < x \leqslant -\sqrt{2}\}$
d) $\{x \in \mathbb{R};\ x \leqslant -\sqrt{2}$ ou $x > \sqrt{3}\}$

55. (U. F. Viçosa-MG) O conjunto solução de $\frac{2}{x-5} < 1$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 7\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 7$ e $x \neq 5\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -3$ ou $x > 5\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5$ ou $x > 7\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$

56. (Unirio) O conjunto solução da inequação $\frac{2x-3}{3x-2} \geqslant 1$ é o seguinte intervalo:

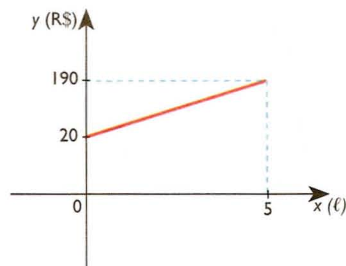
a) $]-\infty, -1]$
b) $\left]-\infty, \frac{2}{3}\right]$
c) $\left[-1, \frac{2}{3}\right[$
d) $[-1, \infty[$
e) $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$

57. (Unifor-CE) Um raio cai a *d* metros de uma pessoa. Ela vê a luz do relâmpago e após *t* segundos ouve o som resultante. Sabendo-se que a luz percorre a distância *d* em um tempo desprezível e que o som percorre 340 m por segundo, a fórmula que dá aproximadamente a distância *d* em função do tempo *t* é:

a) $d = 300\,000 \cdot t$
b) $d = 340 \cdot t$
c) $d = 340 \cdot t^2$
d) $d = (300\,000 - 340) \cdot t$
e) $d = 340 \cdot t + 300\,000$


Kent Wood / SS-Stock Photos

58. (F. Santo André-SP) O gráfico mostra como o dinheiro gasto (*y*), por uma empresa, na produção de óleo varia com a quantidade de óleo produzida (*x*). Assim, podemos afirmar que:



a) quando a empresa não produz nada, não gasta nada.
b) para produzir 2ℓ de óleo a empresa gasta R$ 76,00.
c) para produzir 1ℓ de óleo a empresa gasta R$ 54,00.
d) se a empresa gasta R$ 170,00, então ela produz 5ℓ de óleo.
e) para fabricar o terceiro litro de óleo, a empresa gasta menos do que para fabricar o quinto litro.

59. (Osec-SP) Dada a inequação $(x - 2)^7 \cdot (x - 10)^4 \cdot (x + 5)^3 < 0$, o conjunto solução é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -5\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 10\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 2\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 10\}$
e) $\varnothing$

60. (PUC/Campinas-SP) Em uma certa cidade, os taxímetros marcam, nos percursos sem parada, uma quantia inicial de 4 UT (Unidade Taximétrica) e mais 0,2 UT por quilômetro rodado. Se, ao final de um percurso sem paradas, o taxímetro registrou 8,2 UT, o total de quilômetros percorridos foi:

a) 15,5 b) 21 c) 25,5 d) 27 e) 32,5

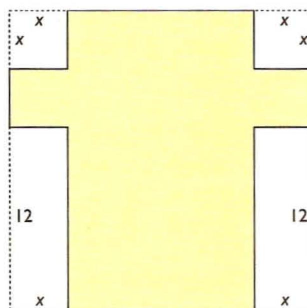
Capítulo

5 Função do 2º grau

1. Introdução

A figura mostra um quadrado com 20 cm de lado. Dele foram retirados:

- de cada canto superior, um quadrado cujo lado mede x cm;
- de cada canto inferior, um retângulo de 12 cm por x cm.



Obteve-se assim uma figura em forma de cruz, cuja área y é função de x, definida por:

$$y = \underbrace{400}_{\text{Área do quadrado}} - \underbrace{2(12x)}_{\text{Área dos retângulos dos cantos inferiores}} - \underbrace{2(x^2)}_{\text{Área dos quadrados dos cantos superiores}}$$

Área dos quadrados dos cantos superiores
Área dos retângulos dos cantos inferiores
Área do quadrado

Portanto: $y = -2x^2 - 24x + 400$.
A função acima definida é um exemplo de **função do 2º grau**.
De um modo geral:

> Dados os números reais a, b e c, com $a \neq 0$, chama-se **função do 2º grau** (ou **função quadrática**) a função:
>
> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

Nas seguintes funções do 2º grau, estamos destacando os valores de a, b e c:

a) $f(x) = 2x^2 + 4x - 10$, em que $a = 2$, $b = 4$ e $c = -10$.
b) $y = -3x^2 - 5x$, em que $a = -3$, $b = -5$ e $c = 0$.
c) $y = x^2 - 12$, em que $a = 1$, $b = 0$ e $c = -12$.
d) $f(x) = 0{,}23x^2$, em que $a = 0{,}23$, $b = 0$ e $c = 0$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Dadas as seguintes funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, identifique aquelas que são do 2º grau.

a) $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$
b) $y = -x^2 + 4x$
c) $f(x) = 2^x - 8$
d) $f(x) = 2x - 6$
e) $y = \frac{5}{x^2} - \frac{4}{x}$
f) $y = \frac{x^2}{8} - \frac{5}{6}$

2. Dada a função $f(x) = (5m - 20)x^2 + 6x - 8$, calcule m de modo que:

a) $f(x)$ seja função do 2º grau.

b) $f(x)$ seja função do 1º grau.

3. Para que valores de m a função $y = (m^2 - 9)x^2 + (m - 3)x + 1$ representa:

a) função do 2º grau?

b) função do 1º grau?

c) função constante?

4. Dada a função $f(x) = 3x^2 - 7x + 3$, determine:

a) $f(0)$

b) $f(-1)$

c) $f\left(\frac{1}{3}\right)$

d) $f(\sqrt{2})$

5. Sendo $f(x) = -4x^2 + \frac{1}{2}$, calcule:

a) $f\left(\frac{1}{2}\right)$

b) $f\left(\frac{-1}{2}\right)$

c) $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

6. Dada a função $f(x) = 6x^2 - 5x + 1$, calcule x de modo que:

a) $f(x) = 0$

b) $f(x) = 1$

c) $f(x) = 15$

7. Uma empresa vende mensalmente x unidades de um determinado artigo. O custo (C), em UV (Unidades de Valor), é dado por $C(x) = 2x^2 - 7x + 10$. Calcule o custo da produção em UV para 100 unidades.

2. Gráfico da função do 2º grau

O gráfico de uma função do 2º grau é uma curva aberta chamada **parábola**.

Exemplo

Construir os gráficos das seguintes funções do 2º grau:

a) $y = x^2 - 4x + 3$

b) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x$

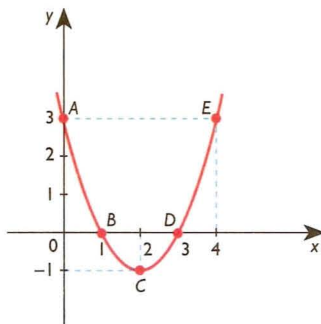
Solução

a) $y = x^2 - 4x + 3$

Tabela

x	y	Ponto (x, y)
0	3	$A(0, 3)$
1	0	$B(1, 0)$
2	–1	$C(2, -1)$
3	0	$D(3, 0)$
4	3	$E(4, 3)$

Gráfico



$a > 0$: concavidade voltada para cima

Observa-se pelo gráfico que:

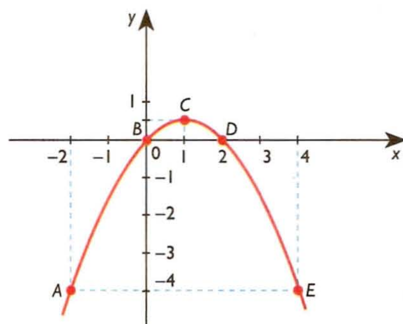
- a imagem da função é $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$;
- os zeros da função são $x = 1$ e $x = 3$;
- a função é decrescente no intervalo $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$ e crescente no intervalo $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$;
- a função tem um valor mínimo $(y = -1)$ para $x = 2$.

b) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x$

Tabela

x	y	Ponto (x, y)
-2	-4	$A(-2, -4)$
0	0	$B(0, 0)$
1	$\frac{1}{2}$	$C\left(1, \frac{1}{2}\right)$
2	0	$D(2, 0)$
4	-4	$E(4, -4)$

Gráfico



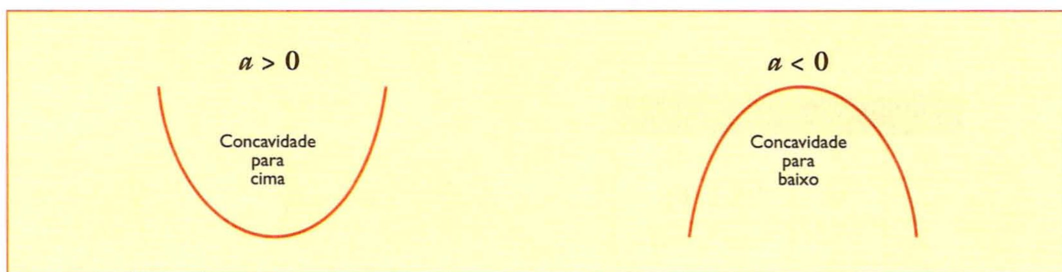
$a < 0$: concavidade voltada para baixo

Observa-se pelo gráfico que:

- a imagem da função é $\text{Im} = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq \frac{1}{2}\right\}$;
- os zeros da função são $x = 0$ e $x = 2$;
- a função é crescente no intervalo $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$ e decrescente no intervalo $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$;
- a função tem um máximo $\left(y = \frac{1}{2}\right)$ para $x = 1$.

Concavidade

Examinando os gráficos das funções do exemplo anterior, podemos observar que aquela que apresenta o coeficiente a do termo em x^2 positivo tem a concavidade da parábola voltada para cima e aquela que apresenta o coeficiente a negativo tem a concavidade da parábola voltada para baixo. Essa característica constitui uma regra geral para toda função do 2º grau $y = ax^2 + bx + c$.



Exemplo 1

Achar os valores de m para os quais o gráfico da função $y = (m + 2)x^2 + (2m - 1)x + 4$ seja uma parábola côncava para cima.

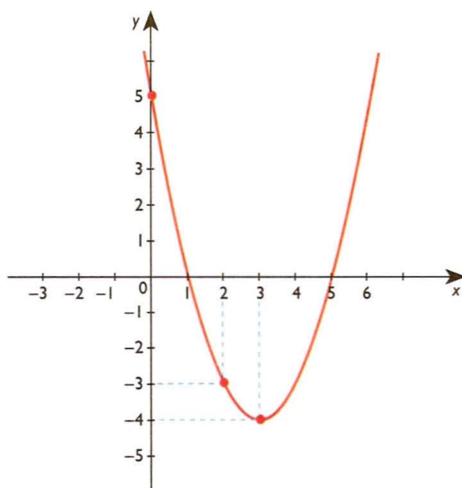
Solução

Uma parábola tem a concavidade voltada para cima quando $a > 0$. Logo, devemos ter:

$$m + 2 > 0 \Rightarrow m > -2$$

Exemplo 2

Escreva a função do 2º grau representada pelo gráfico ao lado.



Solução

Como o gráfico é uma parábola, a função é do tipo $y = ax^2 + bx + c$. Observa-se pela figura que, entre outros, os pontos $(0, 5)$, $(2, -3)$ e $(3, -4)$ pertencem ao gráfico. Substituindo esses valores em $y = ax^2 + bx + c$, obtemos:

$(0, 5) \in f \Rightarrow 5 = a \cdot (0) + b \cdot (0) + c \Rightarrow c = 5$

$(2, -3) \in f \Rightarrow -3 = a \cdot (2)^2 + b \cdot (2) + c \Rightarrow$

$\Rightarrow 4a + 2b + 5 = -3 \Rightarrow 4a + 2b = -8$

$(3, -4) \in f \Rightarrow -4 = a \cdot (3)^2 + b \cdot (3) + c$

$\Rightarrow 9a + 3b + 5 = -4 \Rightarrow 9a + 3b = -9$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} 4a + 2b = -8 \\ 9a + 3b = -9 \end{cases}$, encontramos $a = 1$ e $b = -6$.

Portanto a função é $y = x^2 - 6x + 5$.



Aviões descrevendo arcos de parábolas.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

8. Identifique as funções quadráticas cujo gráfico é uma parábola côncava voltada para baixo.

a) $y = 2x^2 - 3x + 4$ b) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$ c) $f(x) = x^2$ d) $y = -2x^2 + 16$

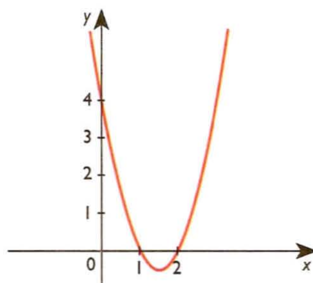
9. Determine m para que o gráfico da função $f(x) = (3m + 1)x^2 + (2m - 3)x + 6$ tenha a concavidade voltada para baixo.

10. Qual deve ser o valor de k para que o gráfico da função $f(x) = (k - 5)x^2 + (2k + 3)x - 1$ tenha a concavidade voltada para cima?

11. Determine a função do 2º grau que passa pelos pontos A, B e C nos seguintes casos:

a) $A(0, 8)$, $B(2, 0)$, $C(3, 11)$
b) $A(0, 0)$, $B(2, 2)$, $C(1, 2)$
c) $A(0, -1)$, $B(4, 3)$, $C(6, 11)$

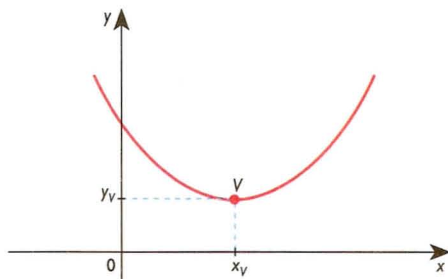
12. Dê a lei da função determinada pelo gráfico ao lado.



3. Vértice da parábola

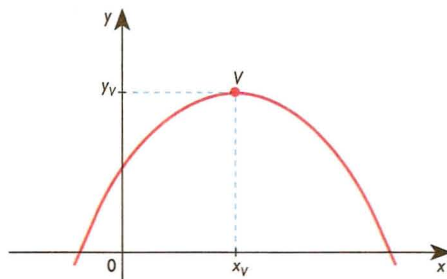
Conforme vimos anteriormente, toda parábola tem um ponto de ordenada máxima ou um ponto de ordenada mínima. A esse ponto chamaremos **vértice da parábola** e o representaremos por $V(x_V, y_V)$.

$a > 0$



V é o ponto de ordenada mínima.

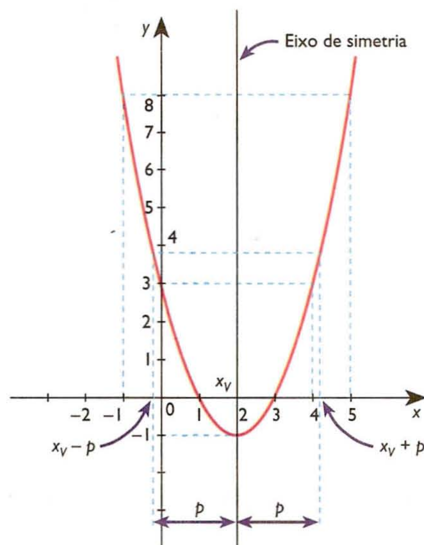
$a < 0$



V é o ponto de ordenada máxima.

Eixo de simetria

Para melhor entendermos o eixo de simetria de uma parábola, vamos voltar ao gráfico da função $y = x^2 - 4x + 3$, observando agora que os pontos de abscissas simétricas em relação à abscissa do vértice possuem ordenadas iguais e vice-versa e os pontos da parábola que têm mesma ordenada possuem abscissas simétricas em relação à abscissa do vértice.



Assim:

$f(-1) = f(5) = 8$
$f(0) = f(4) = 3$
$f(1) = f(3) = 0$

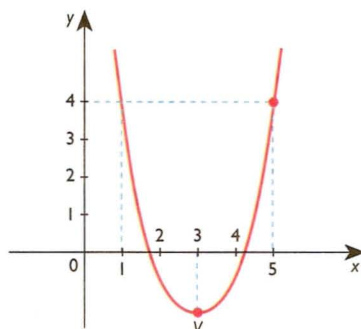
Generalizando:

$f(x_V - p) = f(x_V + p)$, para qualquer p.

Em razão disso podemos dizer que a parábola é simétrica em relação à reta que passa por x_V, paralela ao eixo y. Essa reta é chamada **eixo de simetria**.

Exemplo
Considerando a parábola construída ao lado, pede-se $f(1)$.

Solução
Como 1 e 5 são simétricos em relação ao ponto de abscissa $x_V = 3$, então $f(1) = f(5)$.
Sendo $f(5) = 4 \Rightarrow f(1) = 4$.



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

13. A abscissa do vértice de uma parábola é $x_V = 3$ e $f(0) = 5$. Calcule $f(6)$.

14. Em uma parábola tem-se $x_V = 5$, $f(1) = -9$ e $f(7) = -21$. Pede-se:

a) $f(9)$ b) $f(3)$

15. Em uma função do 2º grau sabe-se que $f(1) = f(3) = -8$. Calcule x_V.

Cálculo da abscissa do vértice

Dada a função do 2º grau $y = ax^2 + bx + c$, sendo x_V a abscissa do vértice da parábola correspondente, os pontos de abscissas $x_V - p$ e $x_V + p$ possuem ordenadas iguais, isto é:

$$a(x_V - p)^2 + b(x_V - p) + c = a(x_V + p)^2 + b(x_V + p) + c$$

$$ax_V^2 - 2ax_Vp + ap^2 + bx_V - bp = ax_V^2 + 2ax_Vp + ap^2 + bx_V + bp$$

$$-2ax_Vp - 2ax_Vp = bp + bp$$

$$-4ax_Vp = 2bp \Rightarrow 2ax_Vp = -bp \Rightarrow x_V = \frac{-b}{2a}$$

Logo, a abscissa do vértice é dada por: $\boxed{x_V = \frac{-b}{2a}}$.

Cálculo da ordenada do vértice

Substituindo x por $x_V = \frac{-b}{2a}$ na função $y = ax^2 + bx + c$, temos:

$$y_V = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

Como na equação do 2º grau $\Delta = b^2 - 4ac$, podemos escrever: $\boxed{y_V = \frac{-\Delta}{4a}}$.

Portanto o vértice V da parábola da função $y = ax^2 + bx + c$ é o ponto:

$$V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right) \quad \text{ou} \quad V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

Valor máximo e valor mínimo da função do 2º grau

Examinando os gráficos abaixo, observa-se que:

$a > 0$

$a < 0$

Se $a > 0$, então para $x = \frac{-b}{2a}$ a função tem o seu valor **mínimo** dado por $y_V = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$.

Se $a < 0$, então para $x = \frac{-b}{2a}$ a função tem o seu valor **máximo** dado por $y_V = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1

Dada a função $y = x^2 - 2x - 3$, pede-se:

a) o vértice;

b) o gráfico;

c) o valor máximo ou mínimo;

d) o conjunto imagem.

Solução

a) $x_V = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-2)}{2(1)} = \dfrac{2}{2} = 1$

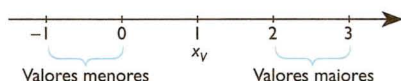
$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$

$y_V = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-16}{4(1)} = \dfrac{-16}{4} = -4$

Logo, o vértice é $V(1, -4)$.

Observação: a ordenada y_V do vértice da parábola poderia ter sido calculada substituindo-se x por $x_V = 1$ em $y = x^2 - 2x - 3$. Assim: $y_V = (1)^2 - 2(1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$.

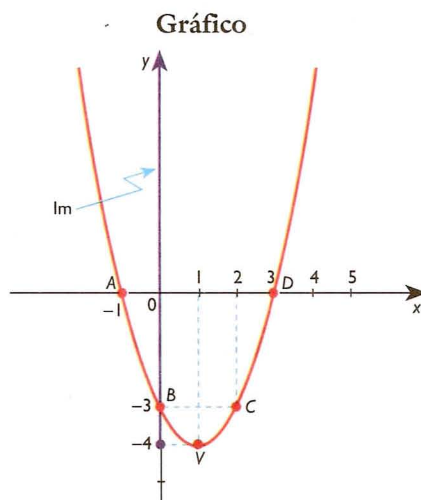
b) Na construção do gráfico atribuiremos a x valores menores e maiores que x_V.



Tabela

x	y	Ponto (x, y)
-1	0	$A(-1, 0)$
0	-3	$B(0, -3)$
1	-4	$V(1, -4)$
2	-3	$C(2, -3)$
3	0	$D(3, 0)$

Gráfico



c) Como $a = 1 > 0$, a função admite um valor mínimo que ocorre para $x = 1$. Esse valor mínimo é -4.

d) O conjunto imagem da função é $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -4\}$.

Exemplo 2

Sabendo-se que o valor mínimo da função do 2º grau $y = (k - 1)x^2 + kx + (k - 2)$ é -1, determinar o valor de k.

Solução

A condição para que uma função do 2º grau admita um valor mínimo é o coeficiente do termo em x^2 ser positivo. Devemos ter: $k - 1 > 0 \Rightarrow k > 1$. (I)

O valor mínimo (ou máximo) de uma função do 2º grau é dado por $y_V = \dfrac{-\Delta}{4a}$. (II)

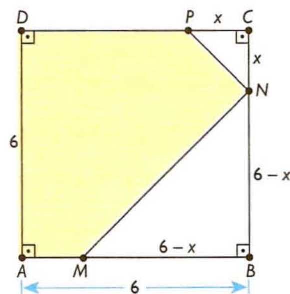
Nas condições do problema, temos: $\dfrac{-\Delta}{4a} = -1 \Rightarrow \Delta = 4a$.

Substituindo Δ por $k^2 - 4(k-1)\cdot(k-2)$ e a por $k - 1$, vem:

$k^2 - 4(k-1)\cdot(k-2) = 4(k-1) \Rightarrow 3k^2 - 8k + 4 = 0$.

Resolvendo a equação, encontramos $k = 2$ ou $k = \dfrac{2}{3}$.

Como em (I) $k > 1$, então $k = 2$.



Exemplo 3

No quadrado *ABCD*, com 6 cm de lado, determinar:

a) a área colorida da figura em função de x;

b) o valor de x para que essa área seja máxima;

c) a área máxima.

Solução

a) A área S da figura colorida é igual à área do quadrado *ABCD*, menos a área do triângulo *PCN* e menos a área do triângulo *MBN*. Então:

$S = A_{\square ABCD} - A_{\triangle PCN} - A_{\triangle MBN}$

Em cm², temos:

$A_{\square ABCD} = 6 \cdot 6 = 36$

$A_{\triangle PCN} = \dfrac{x \cdot x}{2} = \dfrac{x^2}{2}$

$A_{\triangle MBN} = \dfrac{(6-x)\cdot(6-x)}{2} = \dfrac{36 - 12x + x^2}{2} = 18 - 6x + \dfrac{x^2}{2}$

Logo, $S = 36 - \dfrac{x^2}{2} - 18 + 6x - \dfrac{x^2}{2} \Rightarrow S = -x^2 + 6x + 18$.

b) Como $a = -1 < 0$, a função S admite um ponto de máximo quando x assume o valor

$x_V = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-6}{2(-1)} = \dfrac{6}{2} = 3$.

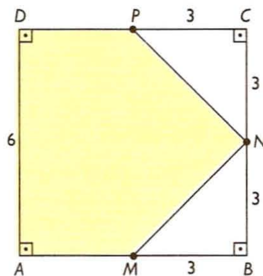
Logo, a maior área possível para a figura colorida é obtida quando $x = 3$.

c) A área máxima é o valor de y_V da função:

$y_V = -(3)^2 + 6\cdot(3) + 18 = -9 + 18 + 18 = 27$

Logo, a área máxima é 27 cm².

Com os dados obtidos podemos agora visualizar a figura de área máxima.



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

16. O gráfico de cada uma das funções abaixo é uma parábola. Determine, em cada caso, o vértice da parábola.

a) $f(x) = x^2 - 9x + 18$
b) $y = x^2 - 14x + 40$
c) $y = 2x^2 - 6x + 4$
d) $f(x) = -3x^2 + 7x - 2$
e) $y = -x^2 + 9$
f) $f(x) = 4x^2 - 16x$

17. Determine o conjunto imagem das funções:

a) $y = x^2 - 12x + 20$
b) $y = -2x^2 + 6x - 4$
c) $f(x) = 5x^2 - 9x$
d) $y = -x^2 + 4$
e) $y = -6x^2$
f) $f(x) = x^2 + 2x + 6$

18. Construa o gráfico cartesiano de cada uma das funções:

a) $y = x^2 - 6x + 8$
b) $y = -x^2 + 4x - 3$
c) $y = x^2 - 1$
d) $y = -x^2 + x$

19. Construa no mesmo plano cartesiano o gráfico das funções $y = x^2 + 2x$ e $y = x + 2$ e a partir deles destaque os pontos de intersecção.

20. Determine graficamente os pontos de intersecção dos gráficos das funções $y = x^2$ e $y = -x^2 + 2x + 3$.

21. Para que valor de x a função $y = x^2 - 14x + 24$ tem o seu valor mínimo?

22. Determine o maximante da função $y = -2x^2 + 12x - 10$.

23. O vértice do gráfico da função $y = x^2 + px + q$ é $V(2, -16)$. Calcule p e q.

24. Determine m de modo que o valor mínimo da função do 2º grau $y = (m - 1)x^2 - (2m + 2)x + 5$ seja -4.

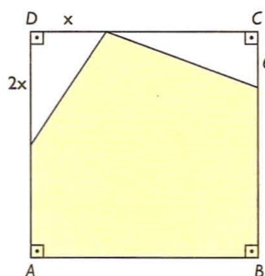
25. O valor máximo da função do 2º grau $y = (m - 1)x^2 + (m + 6)x + m$ é 9. Calcule m.

26. O custo em R$ para a produção de x unidades de certo produto é dado por: $C = x^2 - 30x + 900$. Calcule o valor do custo mínimo.

27. O lucro de uma empresa é dado por $L = -30x^2 + 360x - 600$, em que x é o número de unidades vendidas. Para que valor de x é obtido o lucro máximo?

28. A figura ao lado representa um quadrado com 20 cm de lado. Pede-se:

a) a área y da figura colorida em função de x;
b) o valor de x para que essa área seja máxima;
c) a área máxima.

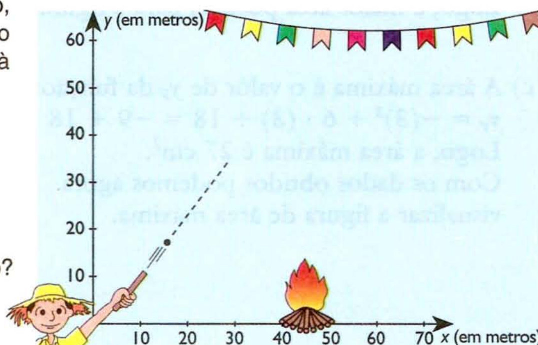


29. Numa festa de São João, a convite de Antônio, Pedro disparou um rojão. No plano cartesiano (ver figura), a trajetória do rojão obedeceu à seguinte lei:

$$y = \frac{-2x^2}{45} + \frac{8x}{3}$$

Pergunta-se:

a) Ele caiu **antes** ou **depois** da fogueira?
b) Qual foi a altura máxima atingida pelo rojão?



4. Raízes da função do 2º grau

Dada a função do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, os valores de x tais que $f(x) = 0$ são chamados **raízes** ou **zeros da função**. Portanto, para se obter os zeros de $f(x)$, basta resolver a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Vamos como exemplo calcular os zeros das seguintes funções:

a) $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$ b) $f(x) = -x^2 + 12x - 36$ c) $f(x) = x^2 + 2x + 2$

Solução

a) $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$

Resolução da equação $2x^2 - 5x - 3 = 0$:

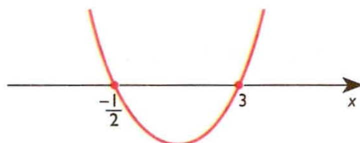
$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) \Rightarrow \Delta = 49 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 7$

$$x = \frac{5 \pm 7}{2 \cdot 2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2} \\[2mm] x_2 = \dfrac{12}{4} = 3 \end{cases}$$

$S = \left\{-\dfrac{1}{2}, 3\right\}$.

O gráfico da função é uma parábola com a concavidade voltada para cima, pois a > 0. Como a função tem dois zeros reais e diferentes, o gráfico da função corta o eixo dos x nos pontos cujas abscissas são $x_1 = \dfrac{-1}{2}$ e $x_2 = 3$.

Veja o esquema:



b) $f(x) = -x^2 + 12x - 36$

Resolução da equação $-x^2 + 12x - 36 = 0$:

$-x^2 + 12x - 36 = 0 \Rightarrow x^2 - 12x + 36 = 0$

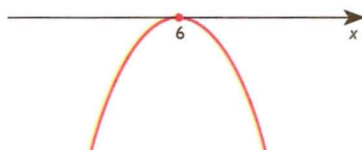
$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 \Rightarrow \Delta = 0$

$$x = \frac{12 \pm 0}{2 \cdot 1} = 6$$

$S = \{6\}$

O gráfico da função é uma parábola com a concavidade voltada para baixo, pois $a < 0$, e é tangente ao eixo dos x no ponto de abscissa $x = 6$.

Veja o esquema abaixo.



c) $f(x) = x^2 + 2x + 2$

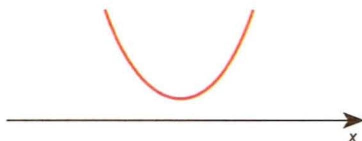
Resolução da equação $x^2 + 2x + 2 = 0$:

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 \Rightarrow \Delta = -4 < 0$

A equação não possui raízes reais.

$S = \varnothing$.

A função não tem raízes reais e portanto a parábola não corta nem "toca" o eixo dos x. Como $a > 0$, a concavidade é voltada para cima, conforme mostra o esquema:



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

30. Determine o conjunto S das raízes das seguintes funções:

a) $y = x^2 - 10x + 9$

b) $f(x) = x^2 - 6x$

c) $f(x) = 9x^2 - 12x + 4$

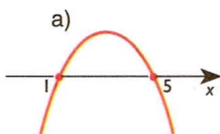
d) $y = -x^2 + 16$

e) $y = -x^2 - 12x - 40$

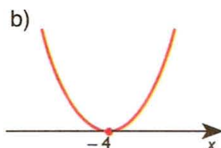
f) $f(x) = x^2 - 9x + 20{,}25$

31. Dê os zeros das funções esboçadas.

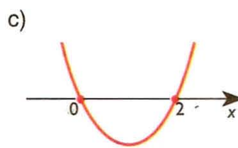
a)



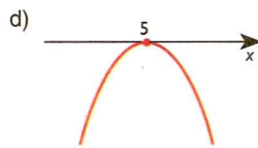
b)



c)



d)



5. Estudo do sinal da função do 2º grau

O estudo do sinal da função do 2º grau é feito determinando-se os seus zeros (se existirem) e analisando o esboço do gráfico.

Vamos como exemplo estudar o sinal das seguintes funções do 2º grau:

a) $y = 3x^2 - 4x + 1$

b) $y = -x^2 + 6x - 9$

c) $y = x^2 + 2x + 3$

Solução

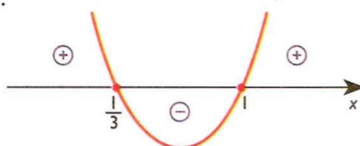
a) $y = 3x^2 - 4x + 1$

Zeros da função

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 16 - 12 = 4 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2$

$$x = \frac{-(-4) \pm 2}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm 2}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3} \text{ e } x_2 = 1$$

A parábola corta o eixo x nos pontos de abscissas $\frac{1}{3}$ e 1. Como $a = 3 > 0$, sua concavidade está voltada para cima.



Estudo do sinal

Examinando o esboço do gráfico podemos afirmar que:

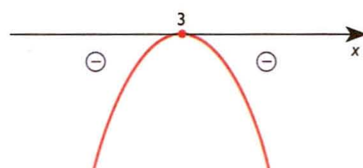
- para $x < \frac{1}{3}$ ou $x > 1 \Rightarrow y > 0$;
- para $x = \frac{1}{3}$ ou $x = 1 \Rightarrow y = 0$;
- para $\frac{1}{3} < x < 1 \Rightarrow y < 0$.

b) $y = -x^2 + 6x - 9$

Zeros da função

$\Delta = 6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9) = 36 - 36 = 0 \;\therefore\; x = \frac{-6}{2(-1)} = \frac{-6}{-2} = 3$

A parábola tangencia o eixo x no ponto de abscissa 3; como $a = -1 < 0$, sua concavidade está voltada para baixo.



Estudo do sinal

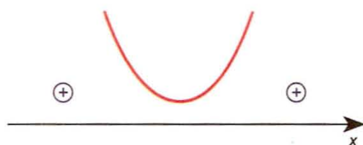
Para $x \neq 3 \Rightarrow y < 0$. Para $x = 3 \Rightarrow y = 0$.

c) $y = x^2 + 2x + 3$

Zeros da função

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8$

A equação não possui raízes reais. A parábola não corta nem tangencia o eixo x. Como $a = 1 > 0$, sua concavidade está voltada para cima.

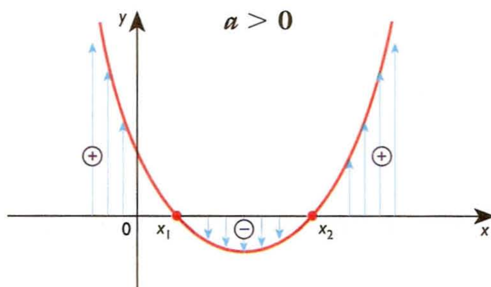


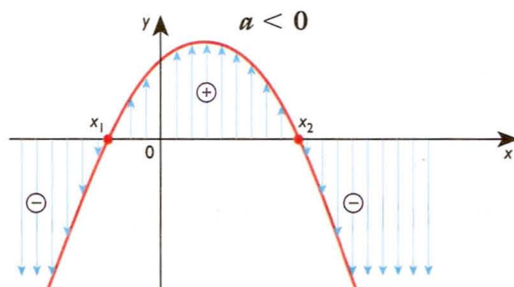
Estudo do sinal

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y > 0$

Tendo em vista os exemplos feitos, podemos resumir o estudo do sinal de uma função do 2º grau da seguinte forma:

- Se $\Delta > 0$, a função tem duas raízes reais e distintas, dadas por $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ com a parábola cortando o eixo dos x nos pontos de abscissas x_1 e x_2.





Estudo do sinal

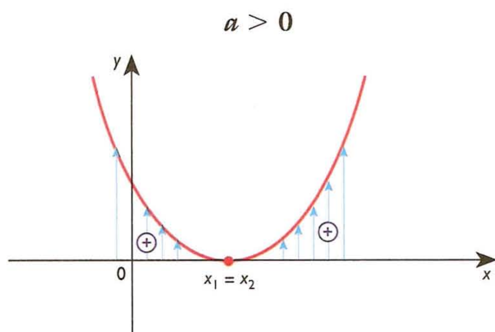
Para $x < x_1$ ou $x > x_2 \Rightarrow f(x) > 0$.
Para $x_1 < x < x_2 \Rightarrow f(x) < 0$.
Para $x = x_1$ ou $x = x_2 \Rightarrow f(x) = 0$.

Estudo do sinal

Para $x < x_1$ ou $x > x_2 \Rightarrow f(x) < 0$.
Para $x_1 < x < x_2 \Rightarrow f(x) > 0$.
Para $x = x_1$ ou $x = x_2 \Rightarrow f(x) = 0$.

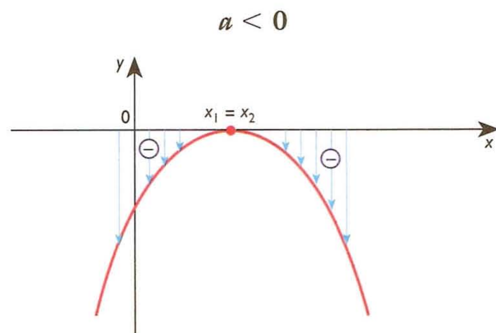
- Se $\Delta = 0$, a função tem duas raízes reais e iguais, dadas por $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$, com a parábola tangenciando o eixo dos x no ponto de abscissa x_1.

$a > 0$



Estudo do sinal
Para $x \neq x_1 \Rightarrow f(x) > 0$.
Para $x = x_1 \Rightarrow f(x) = 0$.

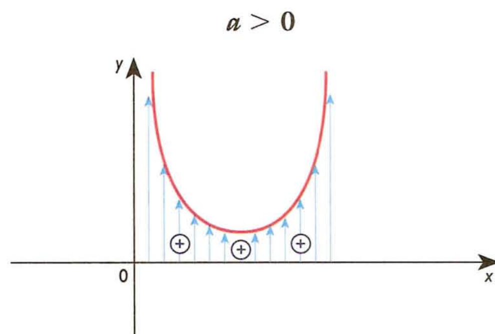
$a < 0$



Estudo do sinal
Para $x \neq x_1 \Rightarrow f(x) < 0$.
Para $x = x_1 \Rightarrow f(x) = 0$.

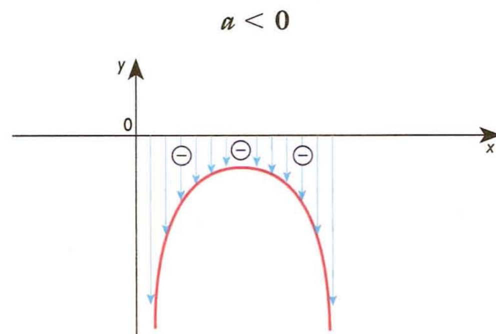
- Se $\Delta < 0$, a função não admite raízes reais e a parábola não tem ponto comum com o eixo dos x.

$a > 0$



Estudo do sinal
$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) > 0$

$a < 0$



Estudo do sinal
$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) < 0$

EXERCÍCIO PROPOSTO

32. Estude o sinal de cada uma das funções do 2º grau, assim definidas:

a) $y = x^2 - 8x + 15$
b) $y = -x^2 + 2x + 8$
c) $y = 2x^2 - 5x$
d) $y = -x^2 + 4x$
e) $y = x^2 - 9$
f) $y = 3x^2 - 2x + 1$
g) $y = -x^2 - 4x - 4$
h) $y = -x^2 + 3x - 5$
i) $y = -x^2 + x + 2$
j) $y = x^2$

6. Inequações do 2º grau

Chama-se **inequação do 2º grau**, na variável x, toda inequação que se reduz a uma das formas:

$$ax^2 + bx + c \geqslant 0, \quad ax^2 + bx + c > 0, \quad ax^2 + bx + c \leqslant 0 \text{ ou } ax^2 + bx + c < 0,$$

em que a, b e c são números reais quaisquer, com $a \neq 0$.

Para resolvermos essas inequações, estudamos primeiramente o sinal da função $y = ax^2 + bx + c$. Em seguida determinamos os valores reais de x para os quais se tenha, respectivamente:

$$y \geqslant 0, \quad y > 0, \quad y \leqslant 0 \quad \text{ou} \quad y < 0$$

Vejamos alguns exemplos de resolução de inequações do 2º grau em $\mathbb{R}$.

Exemplo 1

Resolver as inequações:

a) $x^2 - 5x + 4 \geqslant 0$

b) $x^2 - 5x + 4 > 0$

c) $x^2 - 5x + 4 \leqslant 0$

d) $x^2 - 5x + 4 < 0$

Solução

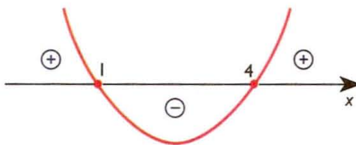
Em primeiro lugar, estudemos os sinais da função $y = x^2 - 5x + 4$.

Zeros da função

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3$

$$x = \frac{-(-5) \pm 3}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = 1 \text{ e } x_2 = 4$$

Façamos um esboço do gráfico da função:



Levando em conta o estudo dos sinais feito no gráfico acima, daremos a solução de cada uma das inequações propostas:

a) $x^2 - 5x + 4 \geqslant 0 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 4\}$

b) $x^2 - 5x + 4 > 0 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 4\}$

c) $x^2 - 5x + 4 \leqslant 0 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 4\}$

d) $x^2 - 5x + 4 < 0 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$

Exemplo 2

Resolver as inequações:

a) $x^2 - 4x + 4 \geqslant 0$

b) $x^2 - 4x + 4 > 0$

c) $x^2 - 4x + 4 \leqslant 0$

d) $x^2 - 4x + 4 < 0$

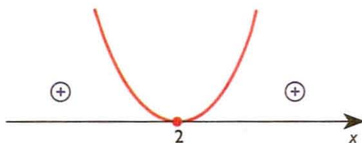
Solução

Estudemos o sinal da função $y = x^2 - 4x + 4$.

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$

$$x = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$$

Façamos um esboço do gráfico da função:



Levando em conta o estudo dos sinais feito no gráfico acima, daremos a solução de cada uma das inequações propostas:

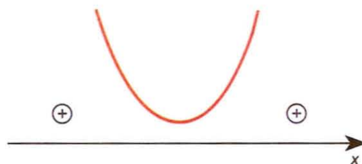
a) $x^2 - 4x + 4 \geqslant 0 \Rightarrow S = \mathbb{R}$
b) $x^2 - 4x + 4 > 0 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$
c) $x^2 - 4x + 4 \leqslant 0 \Rightarrow S = \{2\}$
d) $x^2 - 4x + 4 < 0 \Rightarrow S = \varnothing$

Exemplo 3
Resolver as inequações:

a) $2x^2 + x + 2 > 0$

b) $2x^2 + x + 2 < 0$

Solução
Estudemos o sinal da função $y = 2x^2 + x + 2$.
$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 1 - 16 = -15 < 0$
Façamos um esboço do gráfico da função:



Levando em conta o estudo dos sinais feito no gráfico acima, daremos a solução de cada uma das inequações propostas:

a) $2x^2 + x + 2 > 0 \Rightarrow S = \mathbb{R}$
b) $2x^2 + x + 2 < 0 \Rightarrow S = \varnothing$

EXERCÍCIO PROPOSTO

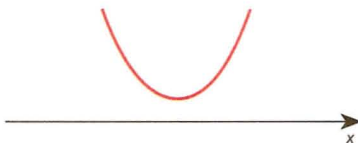
33. Resolva as inequações tendo por conjunto universo $U = \mathbb{R}$.

a) $x^2 - 4x - 12 > 0$
b) $x^2 + 7x + 10 < 0$
c) $-x^2 + x + 20 \leqslant 0$
d) $-9x^2 + 18x \geqslant 0$
e) $x^2 \geqslant 25$
f) $2x^2 \geqslant 4 - 7x$
g) $5x^2 - 4x > -1$
h) $3x^2 + 12x + 12 < 0$
i) $-x^2 + 2x - 1 \leqslant 0$
j) $9x^2 > 6x - 1$
l) $x^2 - 6x + 9 \leqslant 0$
m) $-x^2 - 10 \geqslant 0$
n) $x^2 + 7x < x - 8$
o) $x(x + 2) \geqslant 3(2x - 1)$

Exemplo 4
Determinar os valores de m de modo que a função $f(x) = x^2 - 6x + 2m + 1$ seja positiva para todo x real.

Solução

O gráfico de f é uma parábola côncava para cima. Como se deseja $f(x) > 0$ para todo x real, temos o seguinte esboço do gráfico:



Então devemos ter $\Delta < 0$.

$\Delta < 0 \Rightarrow (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2m + 1) < 0 \Rightarrow 36 - 8m - 4 < 0 \Rightarrow -8m < -32 \Rightarrow m > 4$

Logo, para $m > 4$, tem-se $f(x) > 0$ para $\forall x \in \mathbb{R}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

34. Determine os valores de m de modo que a função $f(x) = x^2 - 8x + 3m - 2$ seja positiva para todo valor de x.

35. Determine os valores de k de modo que a função $y = -3x^2 + (k - 1)x + k - \dfrac{1}{12}$ seja negativa para todo valor de x.

36. Para que valores reais de m a função $y = -x^2 + (2m - 1)x + m - 2{,}5$ é sempre negativa?

Exemplo 5

Resolver o sistema $\begin{cases} x^2 - 2x < 3 \\ 2x^2 \geq 5x - 2 \end{cases}$

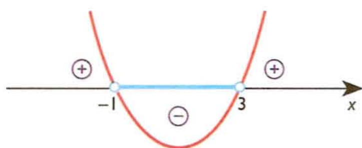
Solução

Vamos resolver cada inequação separadamente.

(I) $x^2 - 2x < 3$

$x^2 - 2x - 3 < 0$

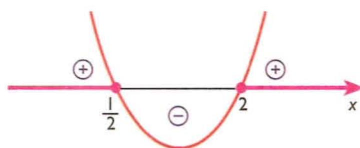
Raízes: -1 e 3



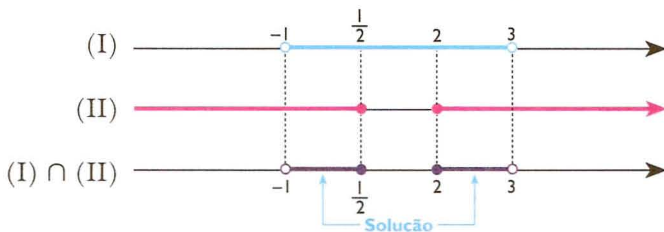
(II) $2x^2 \geq 5x - 2$

$2x^2 - 5x + 2 \geq 0$

Raízes: $\dfrac{1}{2}$ e 2



Agora determinemos a intersecção das soluções de cada inequação.



O conjunto solução do sistema é: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq \dfrac{1}{2} \text{ ou } 2 \leq x < 3\right\}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

37. Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \leqslant 0 \\ x^2 - 9x + 14 < 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 - 4x < 0 \\ x^2 - 6x + 5 \geqslant 0 \end{cases}$

Exemplo 6

Resolver as inequações:

a) $(x^2 - 5x + 4)(2 - x)(-x^2 + 3x) > 0$

b) $\dfrac{-2x^2 + 5x - 2}{x^2 - 4} \geqslant -1$

Solução

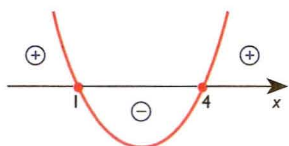
a) $(x^2 - 5x + 4)(2 - x)(-x^2 + 3x) > 0$

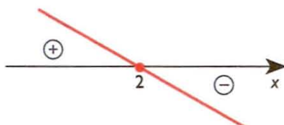
Estudemos os sinais das funções.

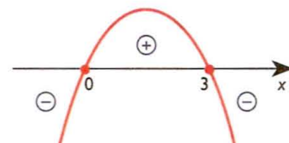
$y_1 = x^2 - 5x + 4$
Raízes: 1 e 4.

$y_2 = 2 - x$
Raiz: 2.

$y_3 = -x^2 + 3x$
Raízes: 0 e 3.







Montemos o quadro de sinais de $y_1 \cdot y_2 \cdot y_3$.

	$x<0$	$0<x<1$	$1<x<2$	$2<x<3$	$3<x<4$	$x>4$
y_1	+	+	–	–	–	+
y_2	+	+	+	–	–	–
y_3	–	+	+	+	–	–
$y_1 \cdot y_2 \cdot y_3$	–	+	–	+	–	+

Solução: $0 < x < 1$, $2 < x < 3$, $x > 4$

Como devemos ter $y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 > 0$, a solução é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \text{ ou } 2 < x < 3 \text{ ou } x > 4\}$$

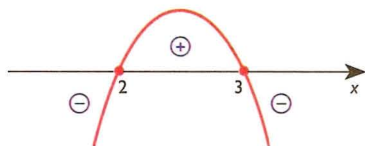
b) $\dfrac{-2x^2 + 5x - 2}{x^2 - 4} \geqslant -1 \Rightarrow \dfrac{-2x^2 + 5x - 2}{x^2 - 4} + 1 \geqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{-2x^2 + 5x - 2 + x^2 - 4}{x^2 - 4} \geqslant 0 \Rightarrow \dfrac{-x^2 + 5x - 6}{x^2 - 4} \geqslant 0$

Estudemos os sinais das funções.

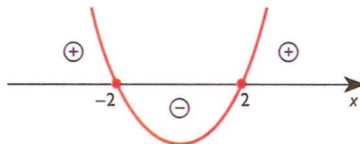
$y_1 = -x^2 + 5x - 6$

Raízes: 2 e 3.

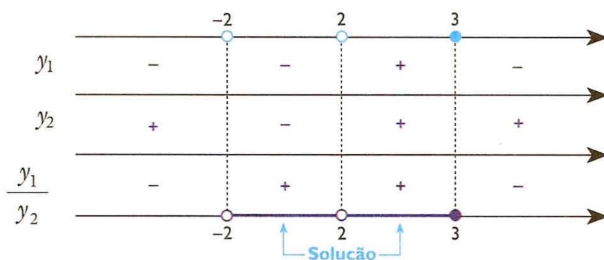


$y_2 = x^2 - 4$

Raízes: −2 e 2.



Montemos o quadro de sinais de $\dfrac{y_1}{y_2}$.



Como devemos ter $\dfrac{y_1}{y_2} \geqslant 0$, o conjunto solução é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2 \text{ ou } 2 < x \leqslant 3\}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

38. Resolva as inequações considerando $U = \mathbb{R}$.

a) $(x^2 + x - 2)(x^2 - 5x) > 0$

b) $(x^2 + 2x - 3)(-x^2 + x + 2) \geqslant 0$

c) $(x - 2)(-2x^2 + 5x - 2) \leqslant 0$

d) $(x^2 - 3x)(x - 1)(-x^2 + 4) < 0$

e) $\dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 6x + 5} \geqslant 0$

f) $\dfrac{x^2 - 8x + 16}{-x^2 + 7x - 10} < 0$

g) $\dfrac{(x - 3)(x^2 - 8x + 12)}{x^2 - 5x + 6} \geqslant 0$

h) $\dfrac{(-x + 4)(x^2 - 10x + 25)}{-2x^2 + 3x - 10} < 0$

39. Dê o domínio das funções seguintes:

a) $f(x) = \sqrt{12x^2 - 7x + 1}$

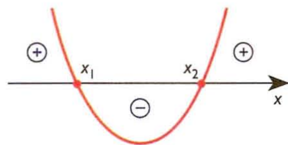
b) $f(x) = \sqrt{(x - 2)(x^2 + 3x)}$

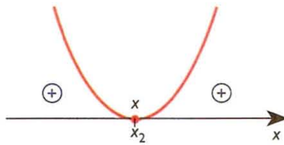
c) $y = \sqrt{\dfrac{x(x^2 - 4x)}{x^2 - 5x + 4}}$

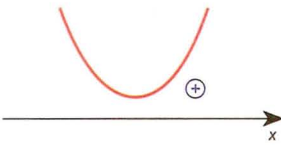
RELEMBRANDO CONCEITOS

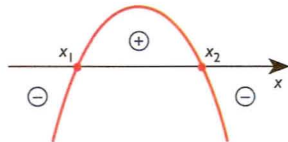
Se $a \neq 0$, $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma função do 2º grau.

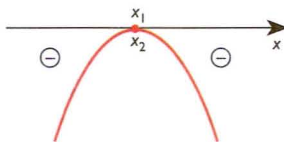
O gráfico é uma parábola que tem a concavidade voltada para cima quando $a > 0$ e voltada para baixo quando $a < 0$, e o sinal da função varia conforme o resumo abaixo:

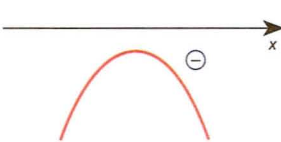












O vértice da parábola tem por coordenadas $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ ou $V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

40. Dada a função $f(x) = (m^2 - 25)x^2 + (m - 5)x + m + 5$, calcule m de modo que:

a) $f(x)$ seja função do 2º grau.
b) $f(x)$ seja função do 1º grau.
c) O gráfico da função seja uma parábola côncava para cima.
d) O gráfico da função seja uma reta paralela ao eixo dos x.

41. Sendo $f(x) = 5x^2 - 11x + 2$, determine:

a) $f(-1)$ b) $f(0)$ c) $f\left(\frac{1}{5}\right)$ d) x, de modo que $f(x) = 0$

42. Dada a função $f: A \to \mathbb{R}$ definida por $y = x^2 - 6x + 8$, determine o conjunto imagem de f, sabendo que $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

43. Dada a função $y = x^2 - 10x$, pede-se:

a) o vértice da parábola.
b) os zeros da função.
c) o valor mínimo da função.
d) a imagem da função.

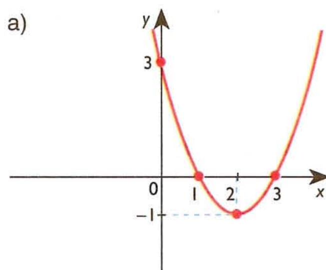
44. Considere a função $y = -x^2 + 11x - 18$. Determine:

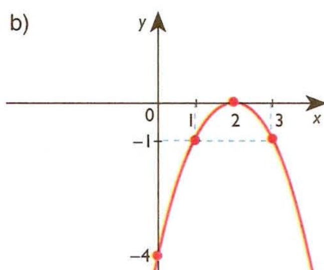
a) as coordenadas do ponto máximo da função.
b) a imagem da função.

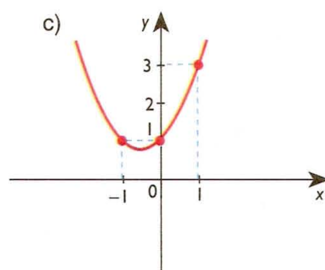
45. Sabendo-se que o valor mínimo da função $y = (k - 1)x^2 + 3kx - 16$ é -25, calcule o valor de k.

46. O valor mínimo da função $f(x) = x^2 - mx + 15$ é -1. Sendo m um número positivo, calcule seu valor.

47. Escreva a função do 2º grau correspondente à parábola:

a) 

b) 

c) 

48. Determine o vértice de cada uma das funções do exercício anterior.

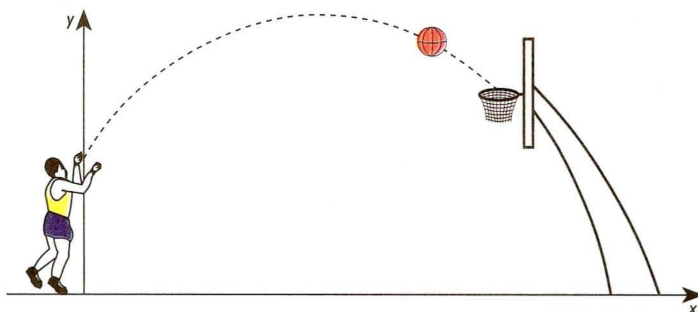
49. (EsPCEx) A parábola representativa da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -2x^2 + bx + c$ passa pelo ponto (1, 0) e seu ponto máximo é o ponto (3, *v*). Determine ***v***.

50. (Faap-SP) Qual o número de números inteiros estritamente positivos menores ou iguais a 9 que verificam a desigualdade $(x^2 - 8x + 7)(x^2 - 13x + 30) \leqslant 0$?

51. (Mackenzie-SP) Resolva a inequação $-x^3 + 6x^2 - 9x \leqslant 0$.

52. (Vunesp) Tomando como conjunto universo o conjunto $U = \mathbb{R} - \{1\}$, resolva a inequação $\frac{x+1}{2} < \frac{x+2}{1-x}$.

53. (UFRJ) Oscar arremessa uma bola de basquete cujo centro segue uma trajetória plana vertical de equação $y = -\frac{1}{7}x^2 + \frac{8}{7}x + 2$, na qual os valores de *x* e *y* são dados em metros.



Oscar acerta o arremesso e o centro da bola passa pelo centro da cesta, que está a 3 m de altura. Determine a distância do centro da cesta ao eixo *y*.

54. (IME-RJ) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função quadrática tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Sabendo que $x_1 = -1$ e $x_2 = 5$ são as raízes e que $f(1) = -8$:

a) determine *a*, *b*, *c*.
b) calcule $f(0)$.
c) verifique se $f(x)$ apresenta máximo ou mínimo, justificando a resposta.
d) dê as coordenadas do ponto extremo.
e) faça o esboço do gráfico.

55. (Fesp-SP) Qual é o domínio da função $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x^2-9}}$?

56. (Faap-SP) Seja a função $f(x) = mx^2 + nx + 1$, $x \in \mathbb{R}$, onde m e n são constantes reais. Sabendo-se que $f(x + 1) = f(x) + 2x + 1$ para qualquer x real, pede-se:

a) determinar m e n após analisar $f(0)$ e $f(1)$.
b) calcular $f(2)$.

TESTES

57. (PUC-MG) Com relação à função do 2º grau $f(x) = x^2 - 2x - 15$, é incorreto afirmar que:

a) se $-3 < x < 5$, então $f(x) < 0$.
b) se $x < -3$ ou $x > 5$, então $f(x) > 0$.
c) $f(x) \geqslant -16$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
d) se $x > 1$, então $f(x)$ é decrescente.
e) se $x = -3$ ou $x = 5$, então $f(x) = 0$.

58. (U. Católica de Salvador-BA) Quantos números inteiros e estritamente positivos satisfazem a inequação $\dfrac{x+2}{x-2} < \dfrac{x-2}{x+2}$?

a) Nenhum
b) Um
c) Dois
d) Três
e) Infinitos

59. (UFSE) Se k é uma solução inteira da inequação $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4x} \leqslant 0$, então k é igual a:

a) 1
b) 1 ou 4
c) 2 ou 3
d) 1, 2, 3 ou 4
e) 5, 6, 7, 8 ou 9

60. (UFSE) A soma das soluções inteiras da desigualdade $x^2 - 4 < 2 - x$ é:

a) -2
b) -1
c) 0
d) 1
e) 2

61. (UFRN) O domínio da função definida por $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ e } x \neq 0\}$
b) $\mathbb{R}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1 \text{ e } x \neq 0\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

62. (UFPE) Considere a equação $x^2 + (k - 4)x - 2k + 4 = 0$. Indique os valores de k para os quais o número real 3 está compreendido entre as raízes dessa equação.

a) $k = 0$
b) $k > -1$
c) $k = -1$
d) $k < -1$
e) $k = 1$ ou $k = 2$

63. Considere a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = ax^2 + bx$, $a \neq 0$. Admita que a imagem de h é o intervalo $]-\infty, 4]$. Analise as seguintes afirmações:

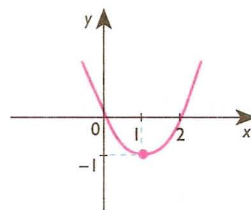
a) $h\left(\dfrac{-b}{2a}\right) = 4$
b) $a > 0$
c) 4 é o valor mínimo de h.
d) O gráfico de h intercepta a reta $y = \dfrac{-b^2}{2a}$.
e) O gráfico de h não passa pela origem.

64. (Faap-SP) O valor máximo da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^2 + 6x + 7$ é:

a) 7
b) 6
c) 3
d) 16
e) 64

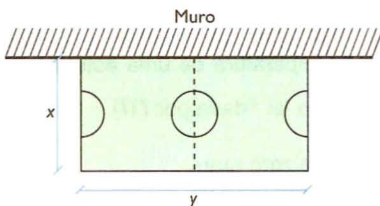
65. (Esal-MG) O gráfico ao lado corresponde a:

a) $y = x^2 - 6x + 8$
b) $y = 2x^2 - 8x$
c) $y = x^2 - 1$
d) $y = 2x^2 - 2x$
e) $y = x^2 - 2x$



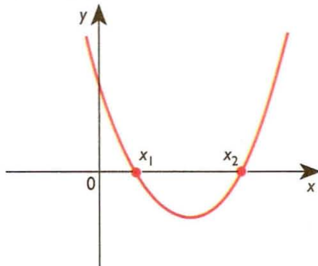
66. (Fuvest-SP) Quero construir uma quadra de futebol de salão retangular. Para cercá-la, disponho de 60 m de alambrado pré-fabricado e, por uma questão de economia, devo aproveitar o muro do quintal (figura abaixo). Quais devem ser as dimensões dessa quadra para que sua área seja máxima?

a) $x = 20$ m, $y = 10$ m
b) $x = 15$ m, $y = 30$ m
c) $x = 12$ m, $y = 18$ m
d) $x = 10$ m, $y = 20$ m
e) $x = 8$ m, $y = 30$ m



67. (U. F. Santa Maria-RS) A figura representa graficamente, no plano cartesiano, a função polinomial do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são constantes reais e $f(x_1) = f(x_2) = 0$.
Então, de acordo com a figura, a afirmação correta é:

a) $a \cdot b \cdot c < 0$
b) $a < 0$ e $c > 0$
c) $4ac > b^2$
d) $b < 0$ e $c < 0$
e) $b > 0$ e $c > 0$



68. (UEBA) Uma função quadrática possui as raízes 1 e $\frac{5}{3}$. Além disso, sabe-se que o seu gráfico contém o ponto (0, 3). Essa função possui um valor mínimo igual a:

a) -1 b) $-\frac{1}{5}$ c) $-\frac{3}{2}$ d) -2 e) $-\frac{1}{9}$

69. (Vunesp) O gráfico da função quadrática definida por $y = x^2 - mx + (m - 1)$, em que $m \in \mathbb{R}$, tem um único ponto em comum com o eixo das abscissas. Então o valor de y que essa função associa a $x = 2$ é:

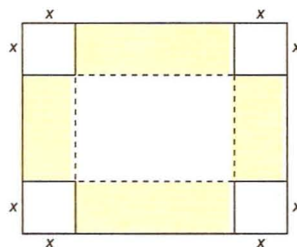
a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

70. (UFRS) Uma bola colocada no chão é chutada para o alto, percorrendo uma trajetória descrita por $y = -2x^2 + 12x$, em que y é a altura, dada em m. A altura máxima atingida pela bola é de:

a) 36 m b) 18 m c) 12 m d) 6 m e) 3 m

71. (Unifor-CE) Dispõe-se de uma folha de papel retangular, medindo 20 cm de largura por 24 cm de comprimento. Deseja-se recortar em cada quina da folha quatro quadrados iguais, conforme mostra a figura. Quanto deve medir o lado de cada quadrado para que a área da região colorida seja máxima?

a) 4,5 cm
b) 5 cm
c) 5,5 cm
d) 6 cm
e) 6,5 cm



72. (U. Estácio de Sá-RJ) O lucro L de uma empresa é dado por $L = -x^2 + 7x - 6$, em que x é a quantidade vendida. O lucro será positivo se, e somente se:

a) $3 < x < 4$
b) $x < 1$ ou $x > 6$
c) $1 < x < 6$
d) $0 < x < 10$
e) $x > 8$

73. Um objeto é lançado no espaço, em um local onde o solo é plano e horizontal. A sua altura, em relação ao solo, é dada pela fórmula: $h(t) = -2t^2 + 12t$ (h é a altura em metros e t é o tempo em segundos). A altura máxima que o objeto atinge é:

a) 12 m b) 24 m c) 9 m d) 30 m e) 18 m

74. (U. F. Viçosa-MG) A temperatura de uma estufa, em graus centígrados, é regulada em função do tempo t de acordo com a lei f dada por $f(t) = -\frac{t^2}{2} + 4t + 10$, sendo $t \geqslant 0$. Pode-se afirmar que:

a) a estufa nunca atinge zero grau.
b) a temperatura é sempre positiva.
c) a temperatura mais alta é atingida para $t = 2$.
d) o valor da temperatura máxima é 18 graus.
e) a temperatura é positiva só para $0 < t < 5$.

75. (UFMG) O conjunto de todos os valores reais de x que satisfazem à desigualdade

$\frac{-x^2 + 2}{-x^2 + 2x - 2} \leqslant 1$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 2\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geqslant 1\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leqslant \sqrt{2}\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1\}$

76. (Unifor-CE) Se o número real m é solução do sistema $\begin{cases} x^2 - 7x + 10 < 0 \\ x^2 - 1 \geqslant 0 \end{cases}$, então é verdade que:

a) $m > 5$
b) $2 < m < 5$
c) $1 \leqslant m < 2$
d) $-1 \leqslant m \leqslant 1$
e) $m \leqslant -1$

77. (UFMG) Seja $b > 0$. Se o sistema $\begin{cases} y = bx - x^2 \\ y = 4 \end{cases}$ tem solução única, conclui-se que o vértice da parábola de equação $y = -bx + x^2$ é:

a) $(-2, -4)$ b) $(-2, 4)$ c) $(2, 0)$ d) $(2, -4)$ e) $(0, 4)$

Capítulo

6 Função modular

1. Introdução

As funções estudadas até o momento foram definidas por uma única sentença, mas isso nem sempre ocorre.

Neste capítulo, iremos estudar funções que, em um subconjunto D_1 do domínio, são definidas por uma lei e, em um subconjunto D_2, mudam de comportamento, obedecendo a uma outra lei, e assim por diante.

Consideremos, por exemplo, a seguinte situação:

O preço, em reais, cobrado por uma transportadora de pianos, por seus serviços, é calculado da seguinte forma:

- para qualquer distância até 20 km, um valor fixo de 500 reais;
- para distâncias maiores, $500 + 22 \cdot x$, em que x é o número de quilômetros acima de 20.



Roberto Loffel / Abril Imagens

Essas duas sentenças mostram que o preço a ser cobrado é função do número de quilômetros rodados, podendo ser representado assim:

$$f(x) = \begin{cases} 500, \text{ para } x \leq 20 \\ 500 + 22 \cdot x, \text{ para } x > 20 \end{cases}$$

2. Função definida por duas ou mais sentenças

A situação anterior nos mostrou um exemplo de função definida por duas sentenças. Vejamos outros exemplos.

Exemplo 1

Considere as seguintes funções:

$f_1(x) = x$, definida para $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

$f_2(x) = -2$, definida para $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

Construir o gráfico e dar o conjunto imagem.

Solução

Podemos indicar as funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$ por uma única função $f(x)$ do seguinte modo:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -2, \text{ se } x < 0 \end{cases}, \text{ em que } D(f) = \mathbb{R}$$

A função $f(x)$ assim indicada constitui-se num exemplo de função definida por duas sentenças.

Vejamos o gráfico e o conjunto imagem dessa função.

Gráfico da função
$f(x) = x$, se $x \geqslant 0$

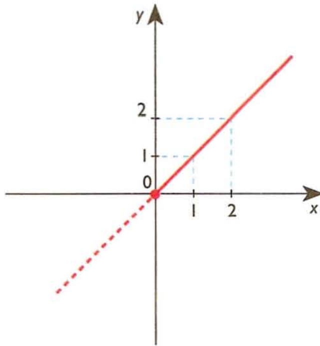
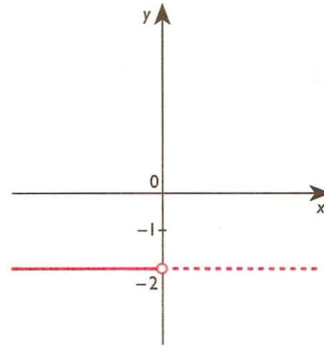
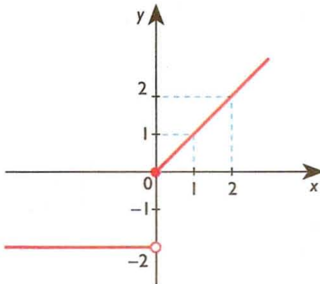


Gráfico da função
$f(x) = -2$, se $x < 0$



O gráfico da função $f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -2, \text{ se } x < 0 \end{cases}$ é a reunião das duas semi-retas.



Observando o gráfico, verificamos que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+ \cup \{-2\}$.

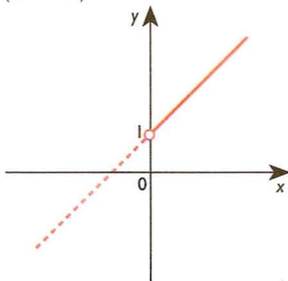
Exemplo 2
Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ se } x > 0 \\ 1, \text{ se } -2 < x \leqslant 0 \\ -x - 1, \text{ se } x \leqslant -2 \end{cases}$$

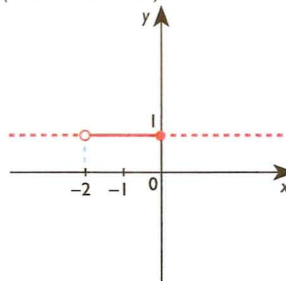
construir o gráfico e dar o conjunto imagem de f.

Solução
Vamos construir separadamente o gráfico de cada sentença:

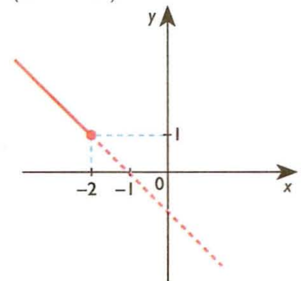
$f(x) = x + 1$
$(x > 0)$



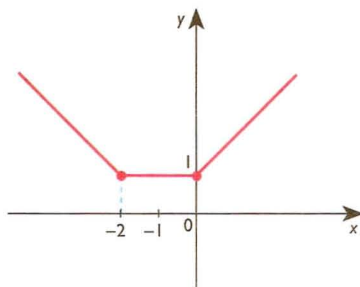
$f(x) = 1$
$(-2 < x \leqslant 0)$



$f(x) = -x - 1$
$(x \leqslant -2)$



Reunindo os três gráficos, obteremos o gráfico de f:



O conjunto imagem é $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 1\}$.

Exemplo 3

Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

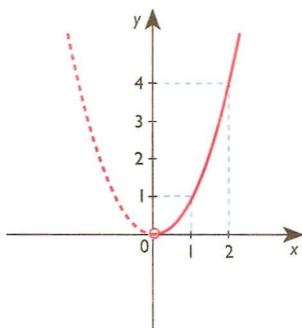
$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x > 0 \\ -1, \text{ se } -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ -x - 2, \text{ se } x < -2 \end{cases}$$

construir o gráfico, dar o domínio e o conjunto imagem de f.

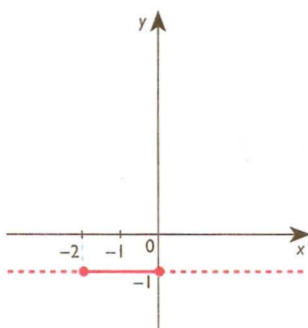
Solução

Vamos construir separadamente o gráfico de cada sentença:

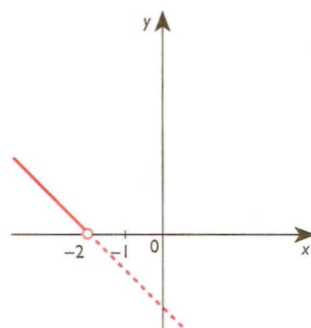
$f(x) = x^2$
$(x > 0)$



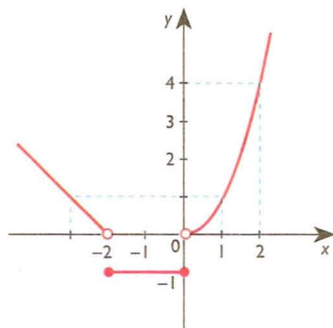
$f(x) = -1$
$(-2 \leqslant x \leqslant 0)$



$f(x) = -x - 2$
$(x < -2)$



Reunindo os três gráficos, obteremos o gráfico de f:



O domínio é $D(f) = \mathbb{R}$.

O conjunto imagem é $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+^* \cup \{-1\}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Construa o gráfico e dê o conjunto imagem das seguintes funções de ℝ em ℝ:

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ se } x \geqslant 0 \\ 1, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -2x + 4, \text{ se } x \leqslant 2 \\ x - 2, \text{ se } x > 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -3x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 2x - 2, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -2, \text{ se } -2 < x < 0 \\ -2x - 6, \text{ se } x \leqslant -2 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, \text{ se } x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2 \\ -x^2 + 4, \text{ se } -2 < x < 2 \end{cases}$

2. Dada a função real $f(x) = \begin{cases} -x + 3, \text{ se } x > 1 \\ 2, \text{ se } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x + 3, \text{ se } x < -1 \end{cases}$, pede-se:

a) $f(5)$

b) $f(0)$

c) $f(-2)$

3. Função modular

Chama-se **função modular** a função de ℝ em ℝ definida por $f(x) = |x|$. Como, por definição, $|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$, temos: $f(x) = |x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$.

A função modular é, portanto, definida por duas sentenças:

$$f(x) = x, \text{ se } x \geqslant 0 \text{ e } f(x) = -x, \text{ se } x < 0$$

Vamos construir no plano cartesiano o gráfico da função $f(x) = |x|$.

$f(x) = x$, se $x \geqslant 0$	$f(x) = -x$, se $x < 0$	$f(x) = \|x\|$
O gráfico é uma semi-reta fechada com origem no ponto $O(0, 0)$. Ela é bissetriz do 1º quadrante.	O gráfico é uma semi-reta aberta com origem no ponto $O(0, 0)$. Ela é bissetriz do 2º quadrante.	O gráfico é a reunião das duas semi-retas.

O domínio da função é $D(f) = \mathbb{R}$.
O conjunto imagem da função é $Im(f) = \mathbb{R}_+$.

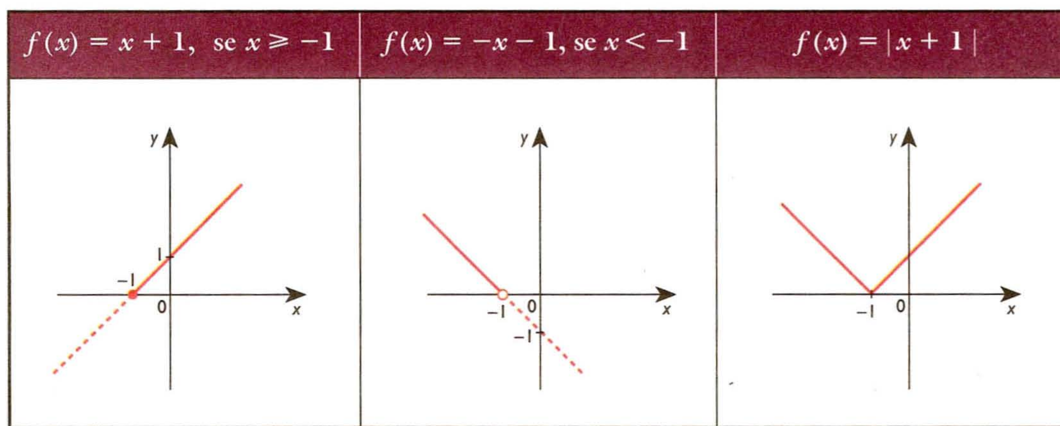
Exemplo 1

Sabendo que $f(x) = |x + 1|$, construir o gráfico, dar o domínio e conjunto imagem de f.

Solução

De acordo com a definição, temos:

$$f(x) = |x+1| = \begin{cases} x+1, \text{ se } x+1 \geqslant 0 \\ -(x+1), \text{ se } x+1 < 0 \end{cases}, \text{ ou seja: } |x+1| = \begin{cases} x+1, \text{ se } x \geqslant -1 \\ -x-1, \text{ se } x < -1 \end{cases}.$$



O domínio é $D(f) = \mathbb{R}$.

O conjunto imagem é $Im(f) = \mathbb{R}_+$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

3. Dada a função $f(x) = |x + 2|$, pede-se:

a) o gráfico da função

b) o conjunto imagem de f

4. Sendo $f(x) = |2x + 1|$, determine:

a) $f(-2)$

b) o gráfico de f

c) o conjunto imagem de f

5. Construa o gráfico da função $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$.

(Sugestão: lembre que $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x - 2|$.)

Exemplo 2

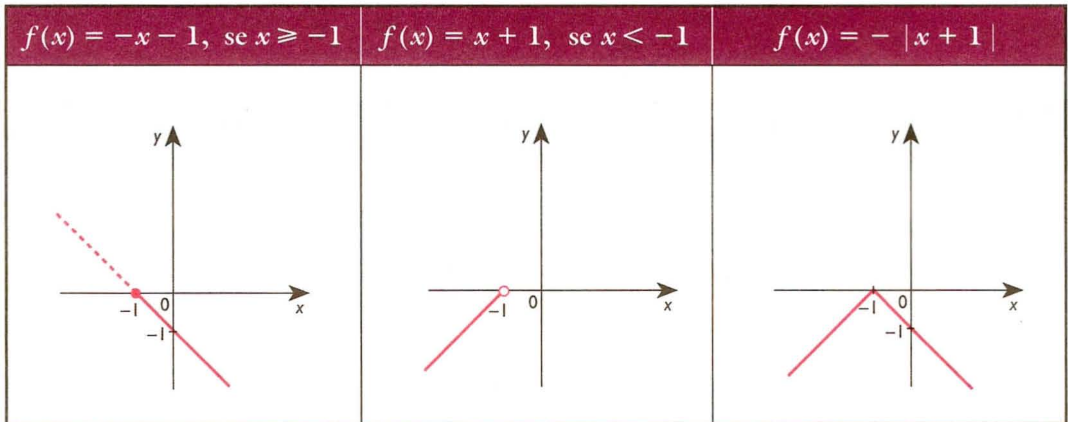
Sabendo que $f(x) = -|x + 1|$, construir o gráfico, dar o domínio e o conjunto imagem de f.

Solução

De acordo com a definição, temos:

$$f(x) = -|x+1| = \begin{cases} -(x+1), \text{ se } x+1 \geqslant 0 \\ -[-(x+1)], \text{ se } x+1 < 0 \end{cases},$$

ou seja: $f(x) = -|x+1| = \begin{cases} -x-1, \text{ se } x \geqslant -1 \\ x+1, \text{ se } x < -1 \end{cases}$.



O domínio é $D(f) = \mathbb{R}$.
O conjunto imagem é $Im(f) = \mathbb{R}_-$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

6. Dada a função modular $f(x) = -|-x+2|$, pede-se:

a) $f(-4)$ b) o gráfico de f c) o conjunto imagem de f

7. Sendo $f(x) = -|x-2|$ e $g(x) = x + 5$, pede-se:

a) $h(x) = f(g(x))$ b) $h(5)$ c) o conjunto imagem de $h(x)$

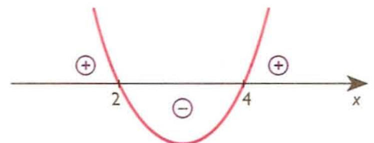
Exemplo 3

Sendo $f(x) = |x^2 - 6x + 8|$, construir o gráfico e dar o conjunto imagem de f.

Solução

$$f(x) = |x^2 - 6x + 8| = \begin{cases} x^2 - 6x + 8, \text{ se } x^2 - 6x + 8 \geqslant 0 \\ -(x^2 - 6x + 8), \text{ se } x^2 - 6x + 8 < 0 \end{cases}$$

Estudemos o sinal da função $h(x) = x^2 - 6x + 8$:
$h(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \text{ e } x_2 = 4$



Então $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 8, \text{ se } x \leqslant 2 \text{ ou } x \geqslant 4 \\ -x^2 + 6x - 8, \text{ se } 2 < x < 4 \end{cases}$

$f(x) = x^2 - 6x + 8$, se $x \leqslant 2$ ou $x \geqslant 4$.	$f(x) = -x^2 + 6x - 8$, se $2 < x < 4$.	$f(x) = \lvert x^2 - 6x + 8 \rvert$
Zeros da função: 2 e 4. Vértice: $\begin{cases} x_V = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ y_V = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-4}{4} = -1 \end{cases}$	Zeros da função: 2 e 4. Vértice: $\begin{cases} x_V = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-6}{-2} = 3 \\ y_V = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-4}{-4} = +1 \end{cases}$	

O conjunto imagem é $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

8. Sendo $f(x) = |x^2 - 4x|$, construa o gráfico de $f(x)$.

9. Sendo $f(x) = |x^2 + 2x|$ e $g(x) = x + 1$, determine:

a) $h(x) = f(g(x))$

b) $h(-1)$

c) $h(-3)$

d) o conjunto imagem de $h(x)$

Exemplo 4

Dada a função $f(x) = |x - 2| - 1$, construir o gráfico, dar o conjunto imagem de f e, a partir dele, determinar:

a) os zeros da função

b) o conjunto imagem

c) os valores de x para os quais $f(x) > 0$

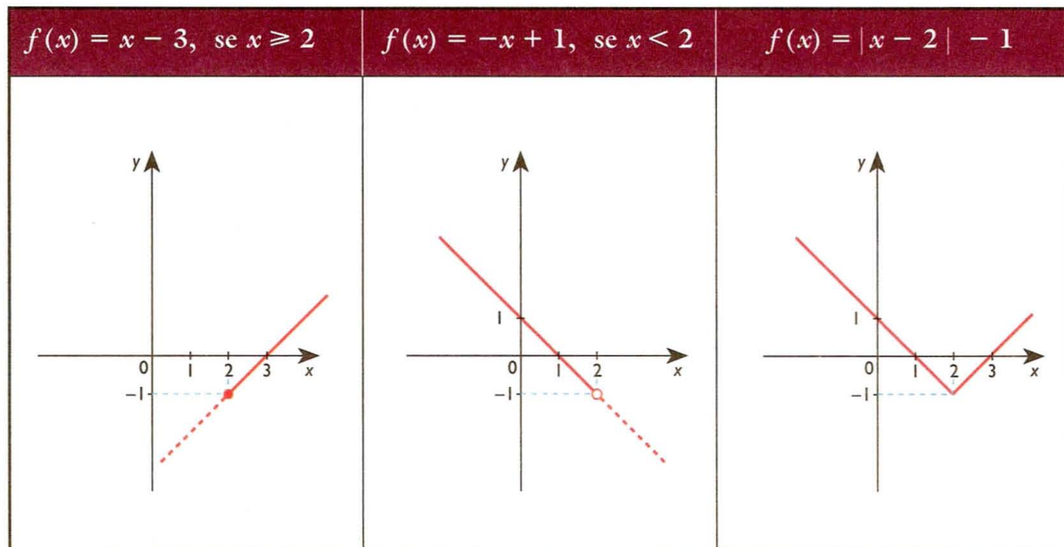
d) os valores de x para os quais $f(x) < 0$

Solução

De acordo com a definição, temos:

$$f(x) = |x - 2| - 1 = \begin{cases} (x-2) - 1, \text{ se } x - 2 \geqslant 0 \\ -(x-2) - 1, \text{ se } x - 2 < 0 \end{cases},$$

ou seja: $f(x) = \begin{cases} x - 3, \text{ se } x \geqslant 2 \\ -x + 1, \text{ se } x < 2 \end{cases}$.



O gráfico nos mostra que:

a) os zeros da função são $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$
b) o conjunto imagem da função é $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$
c) $f(x) > 0$ para $x < 1$ ou $x > 3$
d) $f(x) < 0$ para $1 < x < 3$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

10. Dada a função $f(x) = |x + 1| - 2$:

a) calcule $f(-3)$.
b) construa o gráfico.
c) dê o conjunto imagem.

11. Determine o conjunto imagem da função $f(x) = |x - 3| + 4$.

Exemplo 5

Sendo $f(x) = |x| + |x - 3|$, construir o gráfico de f e dar o conjunto imagem.

Solução

De acordo com a definição, temos:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad |x - 3| = \begin{cases} x - 3, \text{ se } x \geqslant 3 \\ -x + 3, \text{ se } x < 3 \end{cases}$$

Então:

Para $x < 0 \Rightarrow \begin{cases} |x| = -x \\ |x - 3| = -x + 3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -x + (-x + 3) \Rightarrow f(x) = -2x + 3.$

Para $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} |x| = 0 \\ |x - 3| = 3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 0 + 3 \Rightarrow f(x) = 3.$

4. Equações modulares

A resolução de equações modulares está baseada nas seguintes propriedades:

- Se $|x| = a$ e $a > 0$, então $x = a$ ou $x = -a$.
- Se $|x| = a$ e $a = 0$, então $x = 0$.

Vejamos alguns exemplos, considerando o universo $U = \mathbb{R}$.

Exemplo 1
Resolver a equação $|2x + 1| = 5$.

Solução
De acordo com as propriedades, temos:

$2x + 1 = 5$ ou $2x + 1 = -5$
$2x = 4$ ou $2x = -6$
$x = 2$ ou $x = -3$

Logo, o conjunto solução é $S = \{-3, 2\}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

14. Resolva as equações:

a) $|x - 4| = 1$
b) $|3 - 5x| = 2$
c) $\left|4x + \frac{3}{2}\right| = 1$
d) $|3x - 2| = \frac{1}{2}$
e) $|3x + 5| = 0$
f) $\left|\frac{4 - 2x}{5}\right| = \frac{2}{3}$
g) $\left|\frac{x - 1}{3}\right| = 5$
h) $\left|\frac{0,2 - x}{3}\right| = 0$

Exemplo 2
Resolver a equação $|x^2 - 10x + 20| = 4$.

Solução
Temos: $x^2 - 10x + 20 = 4$ ou $x^2 - 10x + 20 = -4$
$x^2 - 10x + 16 = 0$ ou $x^2 - 10x + 24 = 0$
$x = 2$ ou $x = 8$; $x = 4$ ou $x = 6$

Logo, o conjunto solução é $S = \{2, 4, 6, 8\}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

15. Resolva as equações:

a) $|x^2 - 5x + 5| = 1$
b) $|x^2 - 3x| = 4$
c) $|x^2 - 6x| = 7$
d) $|x^2 - 8x + 13| = 1$

Exemplo 3
Resolver a equação $|5x - 7| = 5x - 7$.

Solução
Observe que a expressão entre barras é igual à expressão do segundo membro. Isso pode nos dar a falsa idéia de que qualquer valor de x real venha a ser solução da equação.
No entanto, como o módulo de um número real é sempre positivo ou nulo, então a equação dada só tem sentido se $5x - 7 \geqslant 0$, ou seja, $x \geqslant \frac{7}{5}$.

Portanto o conjunto solução é $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{7}{5}\right\}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

16. Resolva as seguintes equações:

a) $|3x + 2| = 3x + 2$ b) $|4 - 8x| = 4 - 8x$ c) $\left|5x - \frac{1}{4}\right| = 5x - \frac{1}{4}$

Exemplo 4
Resolver a equação $|3x + 2| = 5x - 8$.

Solução
A equação dada só é possível quando $5x - 8 \geqslant 0$, ou seja, $x \geqslant \frac{8}{5}$. (I)

Por definição de módulo, temos:

$$|3x + 2| = 5x - 8 \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2 = 5x - 8 & \text{(II)} \\ \text{ou} \\ 3x + 2 = -(5x - 8) & \text{(III)} \end{cases}$$

De (II), temos:

$3x + 2 = 5x - 8$
$3x - 5x = -8 - 2$
$-2x = -10$
$2x = 10 \Rightarrow x = 5$

(Serve, pois satisfaz a condição (I).)

De (III), temos:

$3x + 2 = -(5x - 8)$
$3x + 2 = -5x + 8$
$3x + 5x = 8 - 2$
$8x = 6 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$

(Não serve, pois não satisfaz a condição (I).)

Portanto o conjunto solução é $S = \{5\}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

17. Resolva as equações:

a) $|2x - 4| = x - 1$ b) $|x + 2| = 3x - 6$ c) $|3x - 4| = x - 2$

Exemplo 5
Resolver a equação $|2x - 1| = |3x - 8|$.

Solução

De acordo com a definição, temos: $2x - 1 = \begin{cases} 3x - 8 \\ \text{ou} \\ -(3x - 8) \end{cases}$

$2x - 1 = 3x - 8$		$2x - 1 = -(3x - 8)$
$2x - 3x = -8 + 1$	ou	$2x - 1 = -3x + 8$
$-1x = -7$		$2x + 3x = 8 + 1$
$x = 7$		$5x = 9 \Rightarrow x = \dfrac{9}{5}$

O conjunto solução é $S = \left\{7, \dfrac{9}{5}\right\}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

18. Resolva as equações:

a) $|4x - 6| = |3x + 2|$

b) $|2x + 1| = |x - 3|$

Exemplo 6
Resolver a equação $|x|^2 - 3|x| - 10 = 0$.

Solução
Façamos $|x| = y$, com $y \geqslant 0$.

Podemos escrever: $y^2 - 3y - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -2 \text{ (Não serve, pois } y \geqslant 0.) \\ y = 5 \end{cases}$

Como $|x| = y$, vem
$|x| = 5 \Rightarrow x = -5$ ou $x = 5$
O conjunto solução é $S = \{-5, 5\}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

19. Resolva as equações:

a) $|x|^2 - 10|x| + 24 = 0$

b) $|x|^2 + 3|x| - 10 = 0$

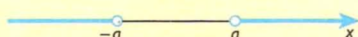
c) $|x|^2 - 9|x| + 20 = 0$

d) $|x|^2 + 4|x| + 5 = 0$

5. Inequações modulares

A resolução de inequações modulares está baseada nas seguintes propriedades, válidas para todo número a real e positivo:

P_1) $|x| > a \iff x < -a$ ou $x > a$; graficamente, temos:



P_2) $|x| < a \iff -a < x < a$; graficamente, temos:



Aplicando essas propriedades, vamos resolver algumas inequações modulares.

Exemplo 1
Resolver a inequação $|2x + 1| > 5$.

Solução
De acordo com P_1, podemos escrever:

$2x + 1 < -5 \Rightarrow 2x < -6 \Rightarrow x < -3$ (I)
ou
$2x + 1 > 5 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > 2$ (II)

Efetuando a **união**, temos:



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 2\}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

20. Resolva as inequações:

a) $|x + 3| > 5$ b) $\left|\frac{2x-6}{2}\right| \geqslant 4$ c) $|3x - 2| > 7$

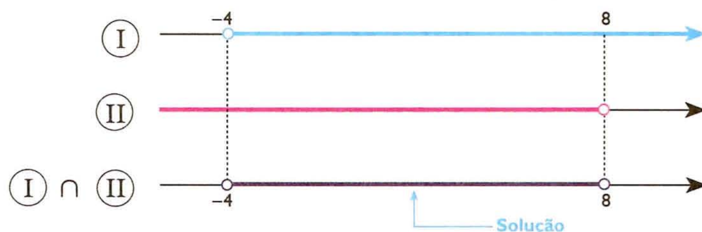
21. Ache o domínio das funções:

a) $y = \sqrt{|x|-2}$ b) $f(x) = \sqrt{|x-4|-1}$

Exemplo 2
Resolver a inequação $|x - 2| < 6$.

Solução
De acordo com P_2, podemos escrever: $-6 < x - 2 < 6 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 > -6 \Rightarrow x > -4 \text{ (I)} \\ \text{e} \\ x - 2 < 6 \Rightarrow x < 8 \text{ (II)} \end{cases}$

Efetuando a **intersecção**, temos:



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 8\}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

22. Resolva as inequações:

a) $|x + 4| \leqslant 10$ b) $|3x + 9| \leqslant 12$ c) $\dfrac{2x - 4}{2} < 6$ d) $\left|\dfrac{1-x}{3}\right| < \dfrac{1}{2}$

Exemplo 3

Resolver a inequação $|x^2 - 10x + 20| < 4$.

Solução

Devemos ter $-4 < x^2 - 10x + 20 < 4$, ou seja:

$$\underbrace{x^2 - 10x + 20 > -4}_{} \qquad \text{e} \qquad x^2 - 10x + 20 < 4$$

$$\underbrace{x^2 - 10x + 24}_{f(x)} > 0 \ \text{(I)} \qquad\qquad \underbrace{x^2 - 10x + 16}_{g(x)} < 0 \ \text{(II)}$$

Raízes de $f(x)$

$x^2 - 10x + 24 = 0$

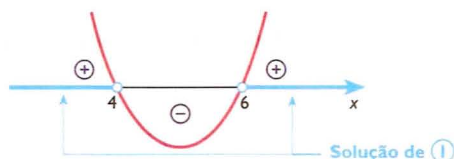
$x = 4$ ou $x = 6$

Raízes de $g(x)$

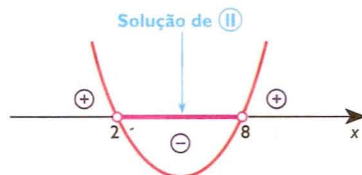
$x^2 - 10x + 16 = 0$

$x = 2$ ou $x = 8$

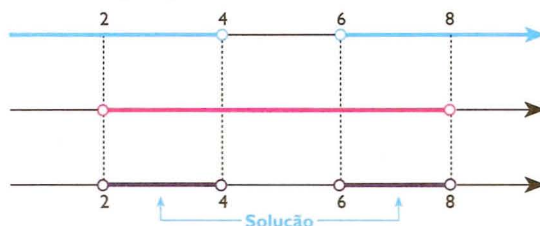
Sinais de $f(x)$



Sinais de $g(x)$



Efetuando a intersecção das soluções, temos:



Logo, a solução é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4 \ \text{ou}\ 6 < x < 8\}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

23. Resolva as inequações:

a) $|x^2 - 6x + 4| < 4$ b) $|x^2 - 4x| \leqslant 3$ c) $|x^2 - 6x| > 5$

24. Ache o domínio das funções:

a) $f(x) = \sqrt{4 - |x^2|}$ b) $y = \sqrt{|x^2 - 10x + 8| - 8}$

Exemplo 4

Resolver a inequação $\left|\dfrac{x-2}{2x+3}\right| \geqslant 1$.

Solução

De acordo com P_1, temos:

$$\frac{x-2}{2x+3} \geqslant 1 \quad \text{(I)}$$

$$\frac{x-2}{2x+3} - 1 \geqslant 0$$

$$\frac{x-2-2x-3}{2x+3} \geqslant 0$$

$$\frac{-x-5}{2x+3} \geqslant 0$$

Estudando separadamente os sinais das funções $f(x) = -x - 5$ e $g(x) = 2x + 3$, temos:

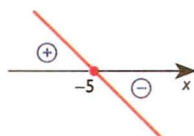
Raiz de $f(x)$

$-x - 5 = 0$
$-x = 5$
$x = -5$

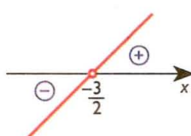
Raiz de $g(x)$

$2x + 3 = 0$
$2x = -3$
$x = -\frac{3}{2}$

Sinal de $f(x)$



Sinal de $g(x)$



ou

$$\frac{x-2}{2x+3} \leqslant -1 \quad \text{(II)}$$

$$\frac{x-2}{2x+3} + 1 \leqslant 0$$

$$\frac{x-2+2x+3}{2x+3} \leqslant 0$$

$$\frac{3x+1}{2x+3} \leqslant 0$$

Estudando separadamente os sinais das funções $h(x) = 3x + 1$ e $g(x) = 2x + 3$, temos:

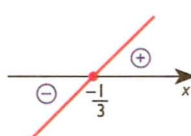
Raiz de $h(x)$

$3x + 1 = 0$
$3x = -1$
$x = -\frac{1}{3}$

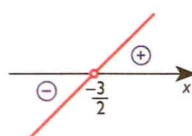
Raiz de $g(x)$

$2x + 3 = 0$
$2x = -3$
$x = -\frac{3}{2}$

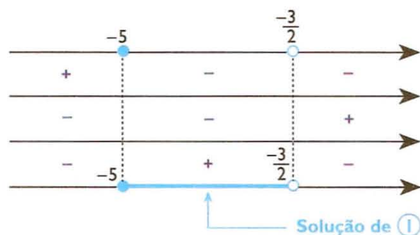
Sinal de $h(x)$



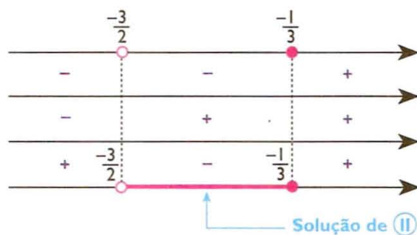
Sinal de $g(x)$



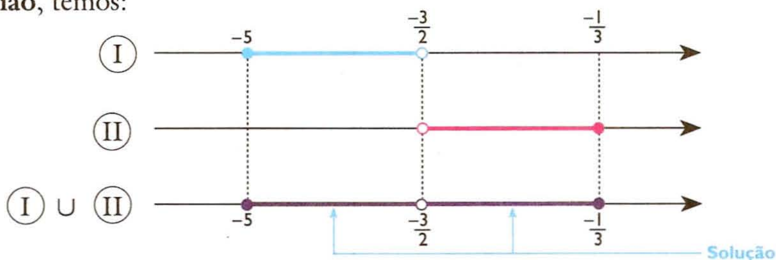
A solução de (I) é mostrada no quadro de sinais abaixo:



A solução de (II) é mostrada no quadro de sinais abaixo:



Efetuando a **união**, temos:



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leqslant x < -\dfrac{3}{2} \text{ ou } -\dfrac{3}{2} < x \leqslant -\dfrac{1}{3}\right\}$.

Exemplo 5
Resolver a inequação $\left|\dfrac{x-2}{x-1}\right| < 3$.

Solução
De acordo com P_2, temos: $-3 < \dfrac{x-2}{x-1} < 3$, ou seja:

$\dfrac{x-2}{x-1} > -3$ (I)

$\dfrac{x-2+3x-3}{x-1} > 0 \Rightarrow \dfrac{4x-5}{x-1} > 0$

Vamos estudar separadamente os sinais das funções $f(x) = 4x - 5$ e $g(x) = x - 1$.

Raiz de $f(x)$

$4x - 5 = 0$

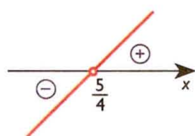
$4x = 5 \Rightarrow x = \dfrac{5}{4}$

Raiz de $g(x)$

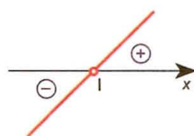
$x - 1 = 0$

$x = 1$

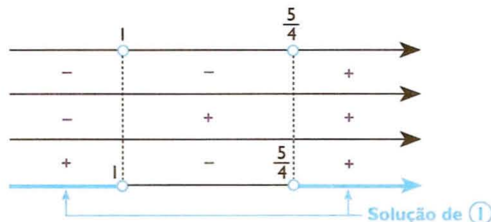
Sinal de $f(x)$



Sinal de $g(x)$



Quadro de sinais



e

$\dfrac{x-2}{x-1} < 3$ (II)

$\dfrac{x-2-3x+3}{x-1} < 0 \Rightarrow \dfrac{-2x+1}{x-1} < 0$

Vamos estudar separadamente os sinais das funções $h(x) = -2x + 1$ e $g(x) = x - 1$.

Raiz de $h(x)$

$-2x + 1 = 0$

$-2x = -1$

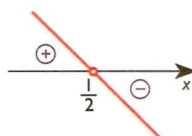
$2x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

Raiz de $g(x)$

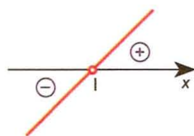
$x - 1 = 0$

$x = 1$

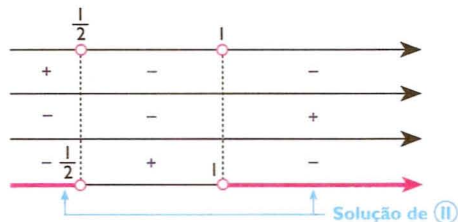
Sinal de $h(x)$



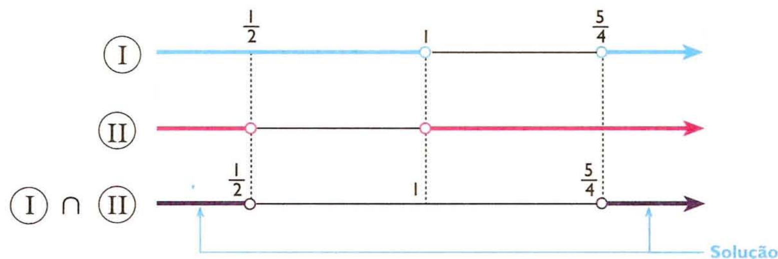
Sinal de $g(x)$



Quadro de sinais



Efetuando a **intersecção** das soluções, temos:



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \dfrac{1}{2} \text{ ou } x > \dfrac{5}{4}\right\}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

25. Resolva as inequações:

a) $\left|\dfrac{3x+2}{x-3}\right| \geqslant 2$

b) $\left|\dfrac{3x-2}{2x+1}\right| > 3$

26. Resolva as inequações:

a) $\left|\dfrac{x-4}{x-2}\right| < 3$

b) $\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right| \leqslant 4$.

RELEMBRANDO CONCEITOS

$$y = |x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Para resolução de equações, considerar que:

- se $|x| = a$ e $a > 0$, então $x = a$ ou $x = -a$;
- se $|x| = a$ e $a = 0$, então $x = 0$.

Para resolução de inequações, considerando $a > 0$, temos que:

- $|x| > a \iff x < -a$ ou $x > a$;
- $|x| < a \iff -a < x < a$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

27. Dada a função $f(x) = \begin{cases} 3x + 2, \text{ se } x > 0 \\ 2, \text{ se } -3 \leqslant x \leqslant 0 \\ -x - 1, \text{ se } x < -3 \end{cases}$, pede-se:

a) $f(-10)$

b) $f(0)$

c) $f(-3)$

d) $f(4)$

e) o gráfico da função

f) o conjunto imagem

g) os valores de x para os quais $f(x)$ é crescente

h) os valores de x para os quais $f(x)$ é decrescente

28. Dada a função $f(x) = \frac{2x}{|x|}$, calcule:

a) $f(-3)$ b) $f(3)$ c) $f(-2)$ d) $f(2)$

29. Sendo $f(x) = x - 1$ e $g(x) = |x - 3|$, pede-se:

a) $h(x) = f(g(x))$ b) o gráfico de h

30. Dada a função real definida por $y = |x^2 - 1| - 3$, construa o seu gráfico. Em face do gráfico, pode-se afirmar que são verdadeiras as sentenças:

a) o conjunto imagem da função é $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -3\}$.
b) a função é positiva para $x < -2$ ou $x > 2$.
c) o eixo dos y é eixo de simetria do gráfico da função.
d) a função é crescente para $-1 < x < 1$.
e) os zeros da função são -1 e 1.
f) o gráfico intercepta o eixo dos y no ponto $(0, -2)$.

31. Resolva as equações:

a) $|x^2 - 17x| = 30$ b) $|x + 6| + 5 = 2x$ c) $\left|\frac{x^2 - 4x + 4}{x + 3}\right| - \frac{1}{6} = 0$

32. Resolva as inequações:

a) $|0{,}2x - 10| < 20$ b) $|x^2 - 5x| > 6$ c) $\left|\frac{2x - 5}{x - 1}\right| \leqslant 3$

33. Dê o domínio das funções:

a) $y = \frac{x-1}{|x-2|}$ b) $f(x) = \sqrt{|x - 2| - 3}$ c) $y = \sqrt{|x^2 - 9x + 9| - 9}$

34. (UFRJ) Considere a função $y = f(x)$ definida por:

$$\begin{cases} y = 4x, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ y = -x^2 + 6x, \text{ se } 2 < x \leqslant 6 \end{cases}$$

a) Esboce o gráfico de $y = f(x)$ no intervalo $0 \leqslant x \leqslant 6$.
b) Para que valores de x temos $f(x) = 5$?

35. (Vunesp) Resolva a equação $x^2 - 3|x| + 2 = 0$, tomando como universo o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

36. (E. E. Mauá-SP) Resolva a equação $\left|\frac{x - 3}{x + 1}\right| = \frac{x - 3}{x + 1}$.

37. (Fatec-SP) Resolva a equação $|3x^2 - 4| = x^2 - 4$ em $\mathbb{R}$.

38. (Fuvest-SP) Seja $f(x) = |2x^2 - 1|$, $x \in \mathbb{R}$. Determine os valores de x para os quais $f(x) < 1$.

39. (Fuvest-SP) Resolva a inequação $x \cdot |x| > x$.

40. (FEI-SP) Construa o gráfico da função $f(x) = \frac{x + |x|}{|x|}$.

41. Esboce o gráfico da função $f(x) = |1 - x^2|$ no intervalo $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

42. (PUC/Campinas-SP) Na fabricação de até 500 unidades por mês de certo produto, o gasto de uma empresa é composto por um valor fixo de 750 dólares mais um custo, por unidade, de 5,50 dólares. Quando a produção supera 500 unidades, o valor fixo não muda, mas o custo por unidade cai para 4,00 dólares. A relação entre o gasto mensal G da empresa e o número u de unidades produzidas no mês é dada por:

a) $\begin{cases} G(u) = 750 + 5{,}50, \text{ se } 0 \leqslant u \leqslant 500 \\ G(u) = 750 + 4{,}00, \text{ se } u > 500 \end{cases}$

b) $\begin{cases} G(u) = 750 + 5{,}50 \cdot u, \text{ se } u \leqslant 500 \\ G(u) = 4{,}00 \cdot u, \text{ se } u > 500 \end{cases}$

c) $\begin{cases} G(u) = 750 + 5{,}50 \cdot u, \text{ se } 0 \leqslant u \leqslant 500 \\ G(u) = 4{,}00 \cdot u, \text{ se } u > 500 \end{cases}$

d) $G(u) = 750 + \dfrac{5{,}50 + 4{,}00}{2} \cdot u$, se $u \geqslant 0$

e) $\begin{cases} G(u) = 750 + 5{,}50 \cdot u, \text{ se } 0 \leqslant u \leqslant 500 \\ G(u) = 750 + 4{,}00 \cdot u, \text{ se } u > 500 \end{cases}$

43. (Unifor-CE) Relativamente à função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x - 1| + 1$, é correto afirmar que:

a) é crescente, qualquer que seja x.
b) é decrescente, se $x > 1$.
c) tem um valor mínimo para $x = 1$.
d) tem um valor máximo para $x = 1$.
e) admite raízes reais.

44. (F. Ibero-Americana-SP) Considere a equação $|x| = x - 6$. Com respeito à solução real dessa equação, podemos afirmar que:

a) a equação não tem solução.
b) a solução pertence ao intervalo fechado $[1, 2]$.
c) a solução pertence ao intervalo fechado $[-2, -1]$.
d) a solução pertence ao intervalo aberto $]-1, 1[$.
e) a solução pertence ao complementar da união dos intervalos anteriores.

45. (PUC-MG) A soma das raízes da equação $|2x - 1| = 3$ é igual a:

a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

46. (Mackenzie-SP) O número de soluções reais da equação $\left|4 - \sqrt[4]{x^4}\right| = 4$ é:

a) 3 b) 4 c) 0 d) 1 e) 2

47. O conjunto solução em $\mathbb{R}$ da equação $|2x^2 - 5| = x^2 - 4$ é:

a) $\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ b) $\{-\sqrt{3}, -1, 1, \sqrt{3}\}$ c) $\{-1, 1\}$ d) $\varnothing$

48. (FEI-SP) Os valores reais de x, que satisfazem à inequação $|2x - 1| < 3$, são tais que:

a) $x < 2$
b) $x > -1$
c) $\dfrac{1}{2} < x < 2$
d) $x > 2$
e) $-1 < x < 2$

49. (FURRN) O domínio da função $f(x) = \sqrt{|x| + 5}$ é:

a) $x \leqslant -5$
b) $x \neq 0$
c) todos os reais
d) $x \geqslant 2$
e) todos os reais positivos

50. (Mackenzie-SP) Seja S o conjunto solução da inequação $x \cdot |x| < x$. Então $\mathbb{R}_- \cap S$ é o conjunto:

a) $]-\infty, -1[$ b) S c) $\mathbb{R}_-$ d) $\varnothing$ e) $\{-1\}$

51. (UEBA) A desigualdade $1 < |x - 2| < 2$ se verifica para todos os números reais x tais que:

a) $1 < x < 3$
b) $x < 3$ ou $x > 4$
c) $0 < x < 4$
d) $0 < x < 1$ ou $3 < x < 4$
e) $x < 1$ ou $x > 3$

52. (UECE) Sejam $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros, $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid |2x - 3| = |x - 2|\}$, $P = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x + 2| = |3x - 4|\}$, e $T = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - 3| \leqslant 2\}$. O conjunto $(T - M) \cap (T - P)$ é:

a) $\{1, 2, 4\}$
b) $\{2, 4, 5\}$
c) $\{3, 4, 5\}$
d) $\{1, 2, 3\}$

53. (UFRN) O conjunto solução de $1 < |x - 1| < 2$ é o conjunto dos números reais x tais que:

a) $-1 < x < 0$ ou $2 < x < 3$
b) $-1 < x < 0$
c) $x < 0$ ou $x > 2$
d) $-1 < x < 3$
e) $0 < x < 2$

54. (UFPE) Indique qual das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ pode ser representada pelo gráfico abaixo.

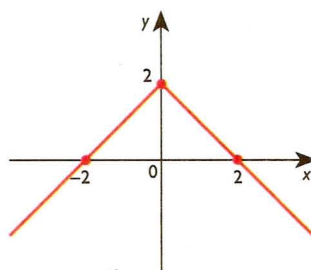
a) $y = 2 + \sqrt{|x|}$

b) $y = 2 + |x|$

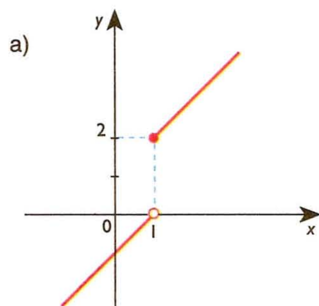
c) $y = \begin{cases} 2 + x, \text{ se } x > 0 \\ 2 - x, \text{ se } x \leqslant 0 \end{cases}$

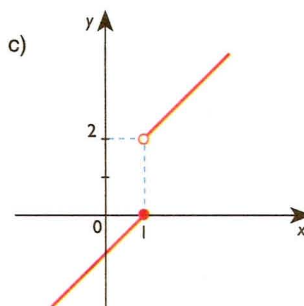
d) $y = 3 - |x - 1|$

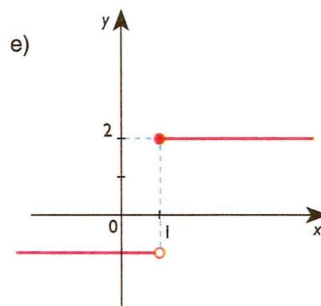
e) $y = \begin{cases} 2 - x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ 2 + x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

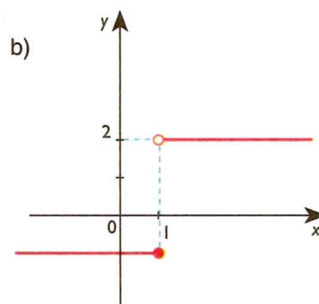


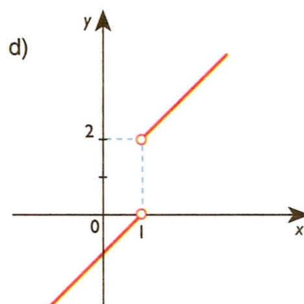
55. (F. C. Contábeis) O esboço gráfico da função $f(x) = \dfrac{|x - 1|}{x - 1} + x$, $x \neq 1$, é dado por:

a)


c)


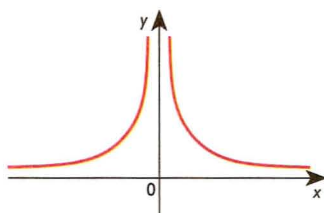
e)


b)


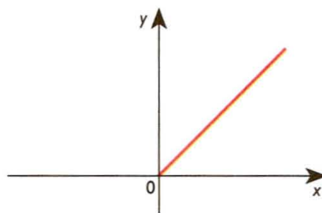
d)


56. (F. Ibero-Americana-SP) O gráfico que melhor representa a função definida por $y = \frac{|x|}{x^2}$, $x \neq 0$, é:

a)

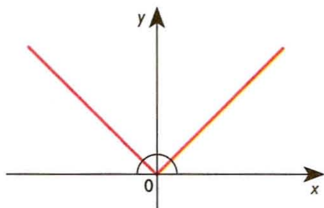


c)

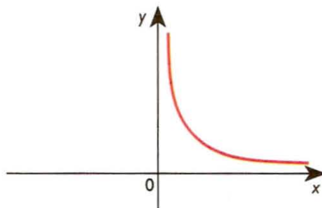


e) n.d.a.

b)

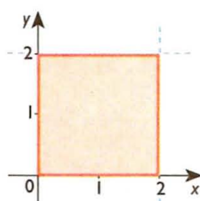


d)

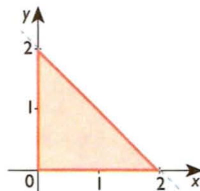


57. (U. São Francisco-SP) O conjunto dos pontos (x, y) que satisfazem o sistema $\begin{cases} |x| \leq 2 \\ |y| \leq 2 \end{cases}$ é:

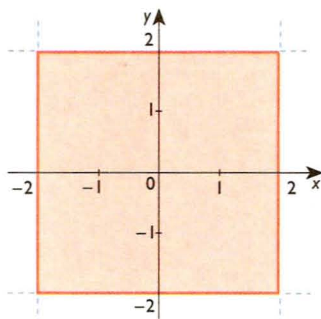
a)



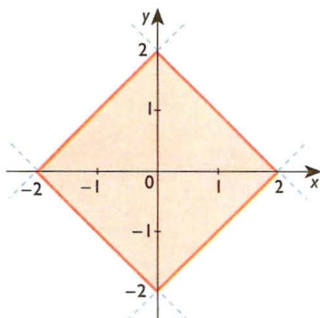
c)



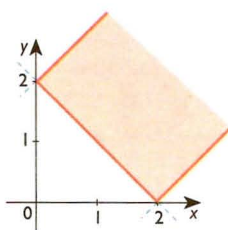
e)



b)



d)



58. Qual das funções $f(x)$ está melhor representada no gráfico?

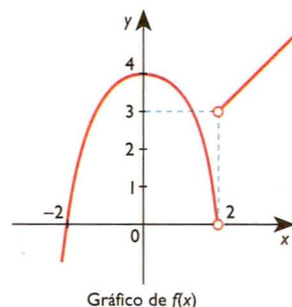


Gráfico de $f(x)$

a) $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, \text{ para } x > 2 \\ x + 1, \text{ para } x < 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, \text{ para } x > 2 \\ x^2 - 4, \text{ para } x \leq 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, \text{ para } x \leq 2 \\ x - 1, \text{ para } x > 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, \text{ para } x < 2 \\ x + 1, \text{ para } x > 2 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, \text{ para } x < 2 \\ x + 1, \text{ para } x > 2 \end{cases}$

59. (Mackenzie-SP) Na figura, temos o gráfico da função de $\mathbb{R} - \{-1\}$ em $\mathbb{R}$ definida por

$f(x) = \dfrac{1}{|x + 1|}$. A área da região colorida vale:

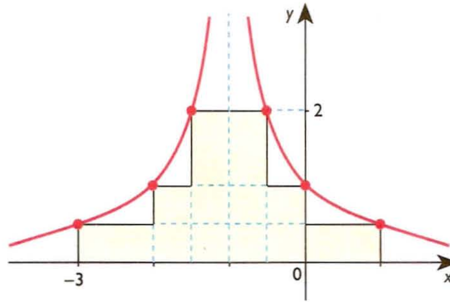
a) 4

b) 5

c) $\dfrac{7}{2}$

d) $\dfrac{9}{2}$

e) $\dfrac{11}{2}$



Capítulo

7 Função exponencial

1. Revisão de potência de expoente racional

No curso de 1º grau, você estudou e trabalhou com potências.

Agora, iremos estudar assuntos que envolvem conceitos já aprendidos e em especial aqueles sobre potências de base positiva.

Antes de iniciarmos esses novos estudos, é conveniente rever alguns conceitos através da resolução de exercícios.

Para facilitar o seu trabalho, mostramos no quadro as principais informações sobre potências de base positiva e expoente racional.

Definição	Propriedades
Sendo $a \in \mathbb{R}_+^*$, $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}_+^*$, temos:	Sendo a e b números reais e positivos, com m e n números racionais, são válidas as seguintes propriedades:
• se $m > 1$, então $a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{m fatores}}$;	• $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
• se $m = 1$, então $a^m = a$;	• $a^m : a^n = a^{m-n}$
• se $m = 0$, então $a^m = 1$;	• $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
• se $m = -1$, então $a^m = \dfrac{1}{a}$;	• $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$
• se $m < -1$, então $a^m = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{-m}$;	• $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
• $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$.	

Observação: as considerações feitas para potência de expoente racional são válidas para potência de expoente real.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Calcule o valor das potências:

a) 5^3

b) 10^4

c) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^2$

d) $\left(1\dfrac{1}{2}\right)^4$

e) $(0{,}22)^2$

f) $(0{,}22\ldots)^2$

g) $(\sqrt{2})^2$

h) $\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)^4$

i) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^4$

j) 2^{-3}

l) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-1}$

m) $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-2}$

n) $\left(\dfrac{5}{4}\right)^0$

o) $(0{,}85)^1$

p) $(0{,}3)^{-2}$

2. Considerando $a > 0$ e $b > 0$, reduza a uma só potência:

a) $a^2 \cdot a \cdot a^4$

b) $a^3 \cdot a^{-1} \cdot a^2$

c) $a^{m+2} \cdot a^{5-m}$

d) $a^6 : a^4$

e) $a^3 : a^5$

f) $a^6 : a^6$

g) $a^5 : a^{-2}$

h) $(a^2)^3$

i) $(a^3)^x$

j) $(a^x)^{x+1}$

l) $a^2 \cdot b^2$

m) $\frac{a^3}{b^3}$

n) $3^x \cdot 2^x$

o) $\frac{3^x}{5^x}$

p) $\frac{a^5 \cdot a^3}{a^2}$

3. Escreva na forma de potência de expoente fracionário:

a) $\sqrt[5]{2^4}$

b) $\sqrt{2}$

c) $\sqrt{10^{x+1}}$

d) $\sqrt[3]{2^x}$

e) $\sqrt[5]{3^{2x+1}}$

f) $\sqrt[x]{\left(\frac{3}{4}\right)^{x+4}}$

4. Escreva:

a) 2^{x+3} como produto de duas potências de base 2.
b) 5^{2x+1} como produto de duas potências de base 5.
c) 3^{x-2} como quociente de duas potências de base 3.
d) 10^{2x-1} como quociente de duas potências de base 10.
e) 1 como potência de base 10.

2. Conceito de função exponencial

Considere a seguinte situação:

Numa certa cultura de bactérias, observou-se que o número de indivíduos duplicava a cada hora. Considerando uma população inicial de 4 bactérias, teremos:

- após a 1ª hora, o número de bactérias será de: $y_1 = 4 \cdot 2 = 8$ bactérias;
- após a 2ª hora, o número de bactérias será de: $y_2 = (4 \cdot 2) \cdot 2 = 4 \cdot 2^2 = 16$ bactérias;
- após a 3ª hora, o número de bactérias será de: $y_3 = (4 \cdot 2^2) \cdot 2 = 4 \cdot 2^3 = 32$ bactérias.

Procedendo dessa forma, é fácil concluir que a lei que expressa o número de bactérias (y) em função do tempo em horas (x) é definida por:

$$y = 4 \cdot 2^x$$

Estamos pois diante de um novo tipo de função, chamada **função exponencial** pelo fato de apresentar variável como expoente.

São muitos os acontecimentos que ocorrem obedecendo a leis expressas por funções exponenciais. Assim, por exemplo:

- o total de dinheiro existente numa caderneta de poupança que rende 5% ao mês é calculado pela lei:

$$M = C \cdot (1 + 0{,}05)^x,$$

em que C é o capital empregado e a variável x é o número de meses de aplicação;

- o processo de desintegração radioativa de uma massa m de carbono 14 que é reduzida a uma massa y em t anos segundo a lei:

$$y = m \cdot 2^{\left(\frac{-1}{5\,400}\right)}$$

De um modo geral:

> Dado um número real a, positivo e diferente de $1 (a \in \mathbb{R}_+^* \text{ e } a \neq 1)$, chama-se **função exponencial de base a** a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por:
>
> $$f(x) = a^x$$

Assim, são exemplos de funções exponenciais:

a) $f(x) = 2^x$ (nesse caso a base é 2).

b) $f(x) = (0,4)^x$ (nesse caso a base é 0,4).

c) $f(x) = (\sqrt{2} + 1)^x$ (nesse caso a base é $\sqrt{2} + 1$).

EXERCÍCIO PROPOSTO

5. Nas funções definidas pelas sentenças abaixo, identifique aquelas que são exponenciais e indique a base correspondente:

a) $y = 5x$ b) $y = 5^x$ c) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ d) $y = x^5$

3. Gráfico da função exponencial

Analisemos a representação gráfica das funções exponenciais por meio de alguns exemplos.

Exemplo 1

$y = f(x) = 3^x$ (nesse caso a base é 3).

Vamos construir uma tabela de pontos pertencentes ao gráfico cartesiano da função, atribuindo valores arbitrários a x e, em seguida, calculando o valor de $f(x)$ para cada um desses valores.

Tabela

x	y	(x, y)
-2	$\frac{1}{9}$	$\left(-2, \frac{1}{9}\right)$
-1	$\frac{1}{3}$	$\left(-1, \frac{1}{3}\right)$
0	1	(0, 1)
1	3	(1, 3)
2	9	(2, 9)

$x = -2 \Rightarrow y = 3^{-2} \Rightarrow y = \frac{1}{9}$

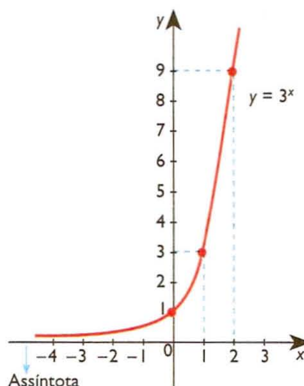
$x = -1 \Rightarrow y = 3^{-1} \Rightarrow y = \frac{1}{3}$

$x = 0 \Rightarrow y = 3^0 \Rightarrow y = 1$

$x = 1 \Rightarrow y = 3^1 \Rightarrow y = 3$

$x = 2 \Rightarrow y = 3^2 \Rightarrow y = 9$

Gráfico



Observe que a função é crescente.

Observe que, quanto menor for o valor de x, mais os pontos do gráfico da função se aproximam da reta suporte do eixo x, sem no entanto atingi-la. Quando isso ocorre, a reta é chamada **assíntota** à curva.

Exemplo 2

$y = f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ $\left(\text{Agora a base é } \frac{1}{3}.\right)$

Procedendo do mesmo modo que no exemplo anterior, temos:

Tabela

x	y	(x, y)
-2	9	$(-2, 9)$
-1	3	$(-1, 3)$
0	1	$(0, 1)$
1	$\frac{1}{3}$	$\left(1, \frac{1}{3}\right)$
2	$\frac{1}{9}$	$\left(2, \frac{1}{9}\right)$

$x = -2 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \Rightarrow y = 3^2 \Rightarrow y = 9$

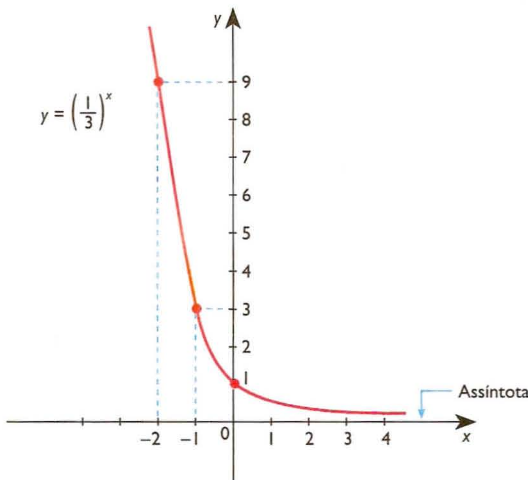
$x = -1 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \Rightarrow y = 3^1 \Rightarrow y = 3$

$x = 0 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{3}\right)^{0} \Rightarrow y = 1$

$x = 1 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{3}\right)^{1} \Rightarrow y = \frac{1}{3}$

$x = 2 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{3}\right)^{2} \Rightarrow y = \frac{1}{9}$

Gráfico



Observe que a função é decrescente.
Observe que, quanto maior for o valor de x, mais os pontos do gráfico da função se aproximam da reta suporte do eixo x, sem no entanto atingi-la. A reta suporte do eixo x é, por esse motivo, assíntota à curva.

Assim, podemos classificar uma função definida por $y = a^x$ em:

> **crescente** quando $\mathbf{a > 1}$;
> **decrescente** quando $\mathbf{0 < a < 1}$.

Resumindo o estudo da função $y = a^x$, temos:

1) O domínio da função é $\mathbb{R}$, ou seja: $D(f) = \mathbb{R}$.
2) O conjunto imagem da função é $\mathbb{R}_+^*$, ou seja: $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$ (note que para $\forall x \in \mathbb{R}$ temos $a^x > 0$). Então o gráfico da função fica todo acima do eixo x.
3) Em qualquer dos casos, o ponto $P(0, 1)$ pertence ao gráfico da função.
4) A função é injetora, pois se $x_1 \neq x_2$, então $a^{x_1} \neq a^{x_2}$.
5) A função é sobrejetora, pois para $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$ existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = a^x$.
6) A função é bijetora, pois é injetora e sobrejetora.
7) No caso de $a > 1$, a função é crescente, pois se $x_1 > x_2$, então $a^{x_1} > a^{x_2}$.
8) No caso de $0 < a < 1$, a função é decrescente, pois se $x_1 > x_2$, então $a^{x_1} < a^{x_2}$.

Exemplo

Verificar se as funções exponenciais abaixo são crescentes ou decrescentes (em $\mathbb{R}$):

a) $f(x) = 5^x$ b) $y = (0,85)^x$ c) $f(x) = \left(\frac{3}{8}\right)^{-x}$

Solução

a) $f(x) = 5^x$ é crescente, pois $5 > 1$.

b) $y = (0,85)^x$ é decrescente, pois $0 < 0,85 < 1$.

c) Quanto a $f(x) = \left(\frac{3}{8}\right)^{-x}$, como $\left(\frac{3}{8}\right)^{-x} = \left(\frac{3}{8}\right)^{x}$, a função é crescente, pois $\frac{8}{3} > 1$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

6. Verifique em cada caso se a função é crescente ou decrescente e justifique:

a) $f(x) = (3, 1)^x$
b) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$
c) $y = (2^{-3})^x$
d) $h(x) = (0,23)^x$
e) $y = \pi^x$
f) $f(x) = (\sqrt{3})^x$
g) $y = (\sqrt{2} + 2)^x$
h) $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^x$

7. Faça a representação gráfica das funções:

a) $f(x) = 2^x$ b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ c) $f(x) = 2^x + 1$ d) $y = 2^{x+1}$

4. Equações exponenciais

Considere a equação $2^x = 8$. Nela, a variável x aparece como expoente. Uma equação em que isso ocorre é chamada **equação exponencial**.

Veja outros exemplos de equações exponenciais:

a) $5^x = 1$ b) $3^{x-2} = 9^{x+1}$ c) $5 \cdot 2^{3x-1} = 20$

Resolver uma equação significa achar os valores da variável que a tornem uma sentença numérica verdadeira. Assim, na equação $2^x = 8$, temos que $x = 3$ é uma raiz, pois $2^3 = 8$.

Muitas das equações exponenciais podem, através das propriedades, serem transformadas em outras equivalentes que possuam nos dois membros potências de mesma base (maior que zero e diferente de um). Obtido isso e lembrando que a função $y = a^x$ é injetora, chegamos a uma equação que envolve somente os expoentes dos dois membros.

Dessa forma, voltando à equação $2^x = 8$, como $8 = 2^3$, temos que:

$$2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3 \text{ (pois a função é injetora)}$$

Observação: neste capítulo estaremos estudando apenas equações em que é possível proceder da forma citada. Para equações nas quais tal procedimento não seja possível, usam-se outros métodos. No próximo capítulo, veremos algumas dessas equações.

Acompanhe com atenção os exemplos de resolução de equações exponenciais no conjunto dos números reais.

Exemplo 1

Determinar o valor de m nos casos:

a) $2^m \cdot 2^4 = 2^{10}$ b) $6^{2m-1} : 6^{m-3} = 6^4$

Solução

a) $2^m \cdot 2^4 = 2^{10}$

Como $2^m \cdot 2^4 = 2^{m+4}$, temos:

$2^{m+4} = 2^{10} \Rightarrow m + 4 = 10 \Rightarrow m = 6$

O conjunto solução é $S = \{6\}$.

b) $6^{2m-1} : 6^{m-3} = 6^4$

Como $6^{2m-1} : 6^{m-3} = 6^{2m-1-(m-3)} = 6^{2m-1-m+3} = 6^{m+2}$, temos:

$6^{m+2} = 6^4 \Rightarrow m + 2 = 4 \Rightarrow m = 2$

O conjunto solução é $S = \{2\}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

8. Calcule o valor de x nas equações:

a) $3^x \cdot 3^3 = 3$

b) $2^{2x} \cdot 2^2 = 2^5$

c) $5^{4x+1} \cdot 5^{x-1} = 5^{10}$

d) $(5^x)^3 = 5^7$

e) $7^{2x-4} : 7^{x+1} = 7^2$

f) $\left(\frac{5}{2}\right)^2 : \left(\frac{5}{2}\right)^{x-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^8$

Exemplo 2

Resolver as equações:

a) $3^x = 243$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{5x} = \left(\frac{27}{8}\right)$

Solução

a) $3^x = 243$

Como $243 = 3^5$, temos:

$3^x = 3^5 \Rightarrow x = 5$

mesma base

O conjunto solução é $S = \{5\}$.

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{5x} = \left(\frac{27}{8}\right)$

Como $\frac{27}{8} = \frac{3^3}{2^3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \Rightarrow \frac{27}{8} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$, então:

$\left(\frac{2}{3}\right)^{5x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \Rightarrow 5x = -3 \Rightarrow x = \frac{-3}{5}$

mesma base

O conjunto solução é $S = \left\{-\frac{3}{5}\right\}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

9. Resolva as equações:

a) $2^x = 16$

b) $5^x - 125 = 0$

c) $2^{3x} = 512$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{27}{64}$

e) $5^{4x} = \frac{1}{25}$

f) $10^{3-2x} = 1$

g) $7^{5x-2} = \left(\frac{1}{7}\right)^{x-1}$

h) $4^x - 8 = 0$

i) $9^{x+3} = 243$

Exemplo 3
Resolver a equação $\sqrt{3} = 27^x$.

Solução

Como $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$ e $27 = 3^3$, temos:

$$3^{\frac{1}{2}} = (3^3)^x \Rightarrow 3^{\frac{1}{2}} = 3^{3x} \Rightarrow 3x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{6}$$

mesma base

O conjunto solução é $S = \left\{\frac{1}{6}\right\}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

10. Resolva as equações:

a) $11^x = \sqrt{11}$

b) $8^{x-1} = \sqrt[3]{2}$

c) $32^{2x+1} = \sqrt{8}$

d) $\sqrt[4]{3^{x-2}} = 9$

e) $\sqrt[3]{2^x} = \sqrt[5]{2^{3x-4}}$

f) $\sqrt[4]{9^{x-2}} = \sqrt[3]{27^{x+3}}$

Exemplo 4
Resolver a equação $9^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2 - x}$.

Solução
Como $9 = 3^2$ e $\frac{1}{3} = 3^{-1}$, então:

$$(3^2)^x = (3^{-1})^{x^2 - x} \Rightarrow 3^{2x} = 3^{x - x^2} \Rightarrow 2x = x - x^2 \Rightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ e } x_2 = -1$$

mesma base

(O problema admite duas soluções.)
O conjunto solução é $S = \{-1, 0\}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

11. Resolva as equações:

a) $4^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2 - x}$

b) $(2^x)^x = 4^{4x-6}$

c) $(3^x)^{x+3} = (9)^{x+12}$

d) $\left[\left(\frac{5}{3}\right)^x\right]^x = \frac{625}{81}$

Exemplo 5
Resolver a equação $2^x + 2^{x+1} = 24$.

Solução
A equação também pode ser escrita assim: $2^x + 2^x \cdot 2 = 24$.

Fazendo $2^x = y$, (I) obtemos:
$y + 2y = 24 \Rightarrow y = 8$
Então $2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$.
mesma base

O conjunto solução é $S = \{3\}$.

Observação: quando houver uma troca de variáveis do tipo $a^x = y$, com ***a* positivo**, como foi feita em (I), todos os valores negativos de y que ocorrerem deverão ser descartados, pois nessas condições $\forall x \in \mathbb{R}$ temos $a^x > 0$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

12. Resolva as equações:

a) $5^x + 5^{x+1} = 150$

b) $2^x + 2^{x-1} = 48$

c) $2^{x+4} - 2^{x+1} = 56$

d) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x-1} = \dfrac{13}{27}$

Exemplo 6
Resolver as equações:

a) $3 \cdot 2^{x+1} - 4 \cdot 2^{x-2} - 6 \cdot 2^x = -4$

b) $25^{|x|} - 4 \cdot 5^{|x|} - 5 = 0$

Solução
a) $3 \cdot 2^{x+1} - 4 \cdot 2^{x-2} - 6 \cdot 2^x = -4$

Como $2^{x+1} = 2^x \cdot 2$ e $2^{x-2} = \dfrac{2^x}{2^2} = \dfrac{2^x}{4}$, então: $3 \cdot 2^x \cdot 2 - 4 \cdot \dfrac{2^x}{4} - 6 \cdot 2^x = -4$

Fazendo $2^x = y$, obtemos:

$6 \cdot y - y - 6 \cdot y = -4 \Rightarrow -y = -4 \Rightarrow y = 4$

Como $y = 2^x \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$.
mesma base

O conjunto solução é $S = \{2\}$.

b) $25^{|x|} - 4 \cdot 5^{|x|} - 5 = 0$

Como $25^{|x|} = (5^2)^{|x|} = (5^{|x|})^2$, fazendo $5^{|x|} = y$ (I), temos:
$y^2 - 4y - 5 = 0$
Resolvendo essa equação encontramos $y = -1$ ou $y = 5$.
Voltando em (I):
para $y = -1 \Rightarrow 5^{|x|} = -1$, sentença falsa para qualquer valor de x;
para $y = 5 \Rightarrow 5^{|x|} = 5 \Rightarrow 5^{|x|} = 5^1 \Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 1$.
O conjunto solução é $S = \{-1, 1\}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

13. Resolva as equações:

a) $2 \cdot 5^x + 3 \cdot 5^{x+1} = 17$

b) $2 \cdot 6^x + 3 \cdot 6^{x+1} - 4 \cdot 6^{x-1} = \dfrac{29}{9}$

c) $3 \cdot 2^{x-2} + 5 \cdot 2^{x-1} = 2^{x+1} + 20$

d) $9^{|x|} - 4 \cdot 3^{|x|} + 3 = 0$

Exemplo 7
Resolver a equação $4^x - 3 \cdot 2^{x-1} = 52$.

Solução
Temos:
$4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$

$2^{x-1} = \dfrac{2^x}{2}$

Substituindo na equação dada, temos:

$(2^x)^2 - 3 \cdot \dfrac{2^x}{2} = 52$

Fazendo $2^x = y\,(y > 0)$ (I), vem:

$y^2 - \dfrac{3y}{2} = 52 \Rightarrow 2y^2 - 3y - 104 = 0 \Rightarrow y = 8$ ou $y = \dfrac{-13}{2}$ (Esse valor não serve.)

Voltando em (I):

$2^x = y \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$

O conjunto solução é $S = \{3\}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

14. Resolva as equações:

a) $2 \cdot 3^{x-1} = 9^x - 7$

b) $5 + 25^x = 6 \cdot 5^x$

5. Inequações exponenciais

Considere a inequação $2^x > 8$. Nela, a variável x aparece como expoente. Uma inequação em que isso ocorre é chamada **inequação exponencial**.

Veja outros exemplos de inequações exponenciais:

a) $5^x > 25$ b) $2^{x-1} \geqslant 4$ c) $3^{x-2} < 9^{x+1}$ d) $5 \cdot 2^{3x-1} \leqslant 20$

Resolver uma inequação significa achar os valores da variável que a tornem uma sentença numérica verdadeira. Assim, na inequação $2^x > 8$, temos que $x = 4$, por exemplo, é uma solução, pois $2^4 > 8$.

Muitas das inequações exponenciais podem, através das propriedades, ser transformadas em outras equivalentes que possuam nos dois membros potências de mesma base (maior que zero e diferente de um). Obtido isso e lembrando que a função $y = a^x$ é:

- **crescente quando $a > 1$;**
- **decrescente quando $0 < a < 1$;**

recaímos numa inequação que envolve apenas os expoentes.

Dessa forma, voltando à inequação $2^x > 8$ e sendo $8 = 2^3$, temos que:

$$2^x > 2^3$$

Como nos dois membros as bases são iguais e maiores que 1, o sinal > será mantido para os expoentes, pois, nessas condições, a função exponencial é crescente. Então $x > 3$.

O conjunto solução é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$.

Observação: neste capítulo estaremos estudando apenas inequações em que é possível proceder da forma citada. Para inequações nas quais tal procedimento não seja possível, usam-se outros métodos. No próximo capítulo, veremos algumas dessas inequações.

Acompanhe com atenção os exemplos de resolução de inequações exponenciais no conjunto dos números reais.

Exemplo 1

Resolver a inequação $(0{,}7)^x \leqslant \dfrac{7}{10}$.

Solução

Como $\dfrac{7}{10} = (0{,}7)^1$, temos:

$(0{,}7)^x \leqslant (0{,}7)^1$

mesma base

Sendo as bases iguais, positivas e menores que 1, o sinal $\leqslant$ será trocado por $\geqslant$, pois, nessas condições, a função exponencial é decrescente. Então $x \geqslant 1$.
O conjunto solução é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

15. Resolva as inequações:

a) $5^x > 625$

b) $2^x < 64$

c) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \leqslant \dfrac{1}{16}$

d) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^x > \dfrac{8}{125}$

e) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^x < \dfrac{16}{9}$

f) $(0{,}1)^x \geqslant 0{,}001$

g) $2^{x^2 + 20} > 2^{9x}$

h) $(3^x)^x \geqslant 3$

Exemplo 2

Resolver a inequação $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-1} < \dfrac{9}{4}$.

Solução

Como $\dfrac{9}{4} = \dfrac{3^2}{2^2} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$, temos: $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-1} < \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$

mesma base

As bases são iguais, positivas e menores que 1. Então $x - 1 > -2 \Rightarrow x > -1$.
O conjunto solução é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

16. Resolva as inequações:

a) $2^x > \dfrac{1}{8}$

b) $\left(\dfrac{2}{7}\right)^x \leqslant \dfrac{7}{2}$

c) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x < 8$

d) $(0{,}1)^x < 100$

Exemplo 3
Resolver a inequação $(\sqrt[3]{0,5})^x \leqslant 8$.

Solução

Temos: $\sqrt[3]{0,5} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\left(-\frac{1}{3}\right)}$. Então: $\left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^x \leqslant 2^3 \Rightarrow 2^{-\frac{x}{3}} \leqslant 2^3$.

Como as bases são iguais e maiores que 1, temos:

$$\frac{-x}{3} \leqslant 3 \Rightarrow -x \leqslant 9 \Rightarrow x \geqslant -9$$

Observação: lembre-se de que, ao multiplicar os dois membros de uma inequação por um **número negativo, ela muda de sentido**. No nosso caso, multiplicamos os dois membros por -1.
O conjunto solução é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -9\}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

17. Resolva as inequações:

a) $\sqrt{3^x} > 9$ b) $\sqrt[3]{2^x} < \dfrac{1}{4}$ c) $5^x \geqslant \sqrt[3]{25}$ d) $\sqrt{0,1^x} > 10$

Exemplo 4
Resolver a inequação $36^{\left(\frac{x}{3}-1\right)} > 6^{x+1}$.

Solução

Temos: $(6^2)^{\left(\frac{x}{3}-1\right)} > 6^{x+1} \Rightarrow 6^{\frac{2x}{3}-2} > 6^{x+1}$.

mesma base

Como as bases são iguais e maiores que 1, temos:

$$\frac{2x}{3} - 2 > x + 1 \Rightarrow 2x - 6 > 3x + 3 \Rightarrow x < -9$$

O conjunto solução é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -9\}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

18. Resolva as inequações:

a) $7^{3x-2} < 49$

b) $5^{x-1} > 125$

c) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{x+2} > 0,4$

d) $\left[\left(\dfrac{3}{4}\right)^x\right]^{\frac{x}{2}} \geqslant \dfrac{9}{16}$

e) $8^{\frac{x}{3}+\frac{2}{3}} \leqslant 32^{x-2}$

f) $\sqrt[3]{2^{x+1}} < 16$

g) $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{x^2+10} \geqslant \left(\dfrac{5}{3}\right)^{7x}$

h) $0,1^{x^2} > 0,1$

Exemplo 5
Resolver a inequação $\underbrace{\frac{1}{3} \leqslant 3^{-x}}_{\text{I}} \overbrace{ < 9^{x+1}}^{\text{II}}$.

Solução

Devemos ter simultaneamente:

$$\underbrace{\frac{1}{3} \leqslant 3^{-x}}_{\text{(I)}} \quad \text{e} \quad \underbrace{3^{-x} < 9^{x+1}}_{\text{(II)}}$$

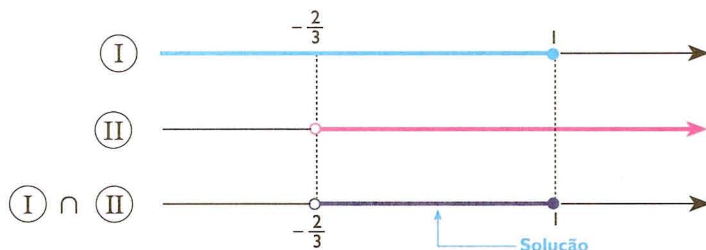
(I) $\frac{1}{3} \leqslant 3^{-x} \Rightarrow 3^{-1} \leqslant 3^{-x} \Rightarrow -1 \leqslant -x \Rightarrow x \leqslant 1$, pois as bases são iguais e maiores que 1.

(II) $3^{-x} < 9^{x+1} \Rightarrow 3^{-x} < (3^2)^{x+1} \Rightarrow 3^{-x} < 3^{2x+2} \Rightarrow -x < 2x + 2 \Rightarrow 3x > -2 \Rightarrow x > -\frac{2}{3}$

(pelo mesmo motivo)

A solução é (I) ∩ (II).

Esboço gráfico



O conjunto solução é $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2}{3} < x \leqslant 1\right\}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

19. Sendo $U = \mathbb{R}$, resolva as inequações:

a) $3 \leqslant 3^x < 27$

b) $\frac{1}{5} < 5^x \leqslant 25$

c) $\frac{1}{9} < 3^{-x} < 9^{x+2}$

d) $\left(\frac{5}{3}\right)^{3x+1} < \left(\frac{5}{3}\right)^{x-1} < \frac{5}{3}$

e) $\frac{1}{4} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^x \leqslant 4$

f) $\left(\frac{1}{27}\right)^3 \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3}$

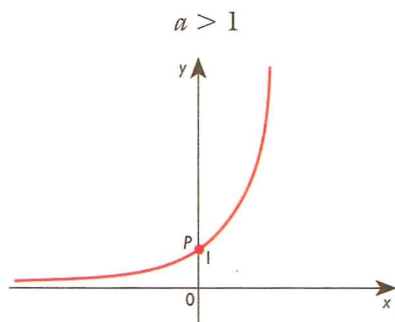
RELEMBRANDO CONCEITOS

$y = a^x$, com $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \neq 1$ é uma função exponencial de base a.

O domínio é $\mathbb{R}$ e a imagem é $\mathbb{R}_+^*$.

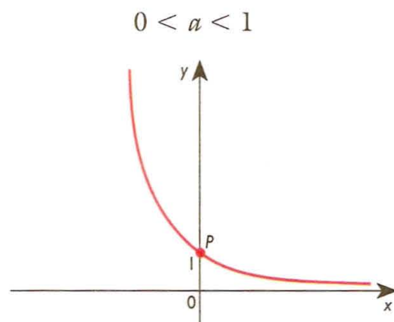
A função é **injetora e sobrejetora**, portanto, **bijetora**.

$a > 1$



O ponto $P(0, 1)$ pertence ao gráfico.
A função é crescente.

$0 < a < 1$



O ponto $P(0, 1)$ pertence ao gráfico.
A função é decrescente.

Para resolver **equações exponenciais** procure transformar (se possível) os dois membros em potências de mesma base e "trabalhar" só com os expoentes, pois a função é injetora.

Para resolver **inequações exponenciais** procure transformar (se possível) os dois membros em potências de mesma base e "trabalhar" só com os expoentes:

- mantendo o sinal que a inequação apresentar quando $a > 1$, pois a função é crescente;
- invertendo o sinal que a inequação apresentar quando $0 < a < 1$, pois a função é decrescente.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

20. Identifique com V as sentenças verdadeiras e com F as falsas.

a) $2^{-5} > \left(\frac{1}{2}\right)^3$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} > \left(\frac{1}{3}\right)^2$

c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-4} > 5$

d) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3} < \left(\frac{5}{3}\right)^{-1}$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{-3}{4}} > \left(\frac{3}{2}\right)^{0,75}$

f) $(\sqrt{2})^{\frac{3}{2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

21. Reconheça, entre as sentenças abaixo, aquelas que são verdadeiras.

a) Se $a > 1$ e $a^m > a^n$, então $m > n$.

b) Se $0 < a < 1$ e $a^m > a^n$, então $m < n$.

c) Se $m > n$ e $a^m < a^n$, então $a > 1$.

d) Se $m > n$ e $a^m < a^n$, então $0 < a < 1$.

e) Se $m > n$ e $0 < a < 1$, então $a^m < a^n$.

f) Se $m < n$ e $a > 1$, então $a^m < a^n$.

22. Dada a função $f(x) = 2^x$, pede-se:

a) $f(3)$

b) $f(-1)$

c) o valor de x para que se tenha $f(x) = 1$

d) o valor de x para que se tenha $f(x) = \frac{1}{16}$

23. Dadas as funções $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2 + 7}$ e $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{5x + 1}$, determine x real de modo que:

a) $f(x) = g(x)$

b) $f(x) < g(x)$

c) $f(x) > g(x)$

d) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{11}$

24. Resolva as equações, considerando $U = \mathbb{R}$.

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9^{-2}$

b) $2^{3x-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

c) $(\sqrt{3})^{x+2} = 27$

d) $5 \cdot 2^x = 40$

e) $3 \cdot 5^{2x+3} = 15$

f) $\sqrt[3]{10^{2x+3}} = 100$

g) $(0,5)^{\frac{3x-1}{4}} = \frac{1}{8}$

h) $(3^x)^{x-3} = \frac{1}{9}$

i) $(0,7)^{2x^2} = \left(\frac{10}{7}\right)^{2-5x}$

j) $\left[(0,4)^{\frac{2}{5}}\right]^{\frac{x}{2}} = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^3}$

l) $\sqrt[4]{(0,1)^{x^2-x}} = \sqrt{10^{x-1}}$

m) $10 \cdot (0,2)^x = 2 \cdot (0,2)^3$

n) $5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x = 2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{2-x}$

o) $(0,1)^{3x-\frac{2}{3}} = 100^{1-2x}$

25. Determine o conjunto solução das equações, sendo $U = \mathbb{R}$.

a) $2^{x+2} + 2^{x-3} = 132$

b) $3^{x+2} - 3^x = 24$

c) $5^{x+1} + 5^{x-2} = 630$

d) $2^{x+1} - 2^{2-x} = -7$

e) $5 \cdot 2^{x+2} - 3 \cdot 2^{x-2} - 308 = 0$

f) $2 \cdot 3^x + 5 \cdot 3^{x-1} = 4 \cdot 3^{x+1} - 75$

g) $2^x + 4^x = 20$

h) $9^x - 3^{x+2} = 3^x - 9$

26. Resolva as inequações no conjunto universo $U = \mathbb{R}$.

a) $10^x - 1 \leqslant 0$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^x < \left(\frac{3}{4}\right)^5$

c) $\left(\frac{5}{2}\right)^{x+1} < \frac{8}{125}$

d) $(\sqrt{3})^{x-5} > 9^x$

e) $2^{x-8} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+x}$

f) $(2^x)^{x-2} \leqslant \frac{1}{2}$

g) $4^{x+2} < 8^{-x+3}$

h) $\left(\frac{5}{9}\right)^{x^2+24} \geqslant \left(\frac{9}{5}\right)^{11x}$

i) $2^{x^2+16} \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{10x}$

27. Determine os valores reais de x para os quais sejam válidas as sentenças:

a) $2^{2x} < 4^{2x-1} < 16^{2x+3}$

b) $3^{x-1} < (\sqrt{3})^x \leqslant 9^x$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-2} < 2^{2x} < 8$

d) $5^2 < 5^{2x+1} < 5^{\frac{x}{2}+3}$

28. Sendo $U = \mathbb{R}$, resolva o sistema $\begin{cases} 2 < 2^{3x+1} < 8 \\ \frac{1}{5} \leqslant 5^x < 125^{3x-1} \end{cases}$.

29. (Fuvest-SP) Resolva o sistema $\begin{cases} 8^x \cdot 4^y = \frac{1}{4} \\ 4^x \cdot 2^{-y} = 2 \end{cases}$.

30. (UFSC) Dado o sistema $\begin{cases} 5^{x-y} = \frac{1}{125} \\ 3^{x+y} = 243 \end{cases}$, calcule o valor de $(x \cdot y)^3$.

31. (E. E. Mauá-SP) Resolva o sistema $\begin{cases} 5^{2x+3y} = 5 \\ 3^{x+y} = 1 \end{cases}$

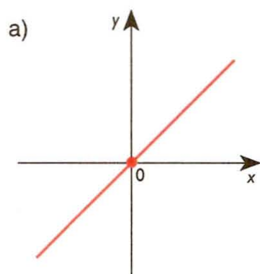
32. (Unifor-CE) Mensalmente a produção em toneladas de certa indústria é dada pela expressão $y = 100 - 100 \cdot 4^{-0,05x}$, na qual x é o número de meses contados a partir de uma certa data. Após quantos meses a produção atingirá a marca de 50 toneladas?

33. (UFMG) Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $((1\,024^x)^x)^x = 2^{1,25}$.

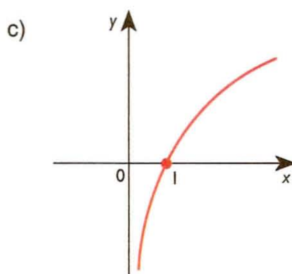
TESTES

34. (Unifor-CE) Das figuras abaixo, a que melhor representa o gráfico da função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^x$ é:

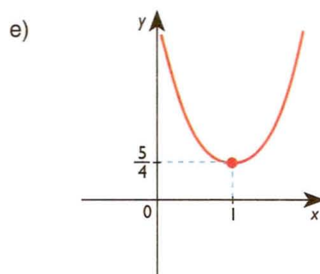
a)



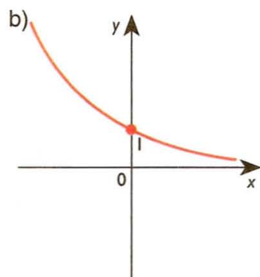
c)



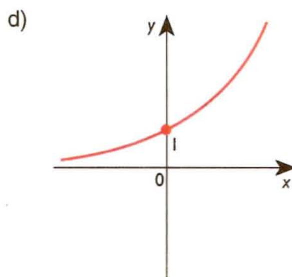
e)



b)

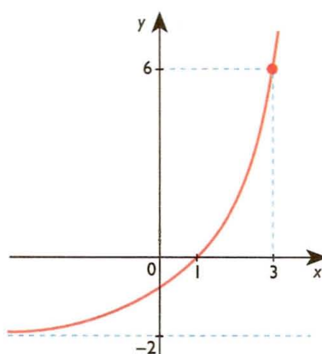


d)



35. O gráfico abaixo representa a função $y = a^x + b$. Então $a + b$ é igual a:

a) −2
b) 1
c) 2
d) 3
e) 0



36. (UFMG) Seja $f(x) = 3^x - \frac{9^x}{4}$ uma função real de variável real. O conjunto que contém todos os valores reais de x para os quais $f(x) = f(x - 1)$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 2\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x < 3\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant x \leqslant 4\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x \leqslant 5\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x \leqslant 6\}$

37. (UFMA) Resolva a equação $2^{x-1} + 2^{x+3} + 2^{x-2} + 2^{x} = 2\,496$.

a) $x = 8$
b) $x = 6$
c) $x = 7$
d) $x = 9$
e) $x = -7$

38. (FURRN) A solução da equação $2^{x+1} - 2^{3-x} - 6 = 0$ pertence ao intervalo:

a) $-1 \leqslant x < 2$
b) $-2 < x < 2$
c) $2 < x < 4$
d) $2 < x \leqslant 4$
e) $-2 < x \leqslant 2$

39. (F. C. Contábeis) Da solução da equação $3^{x-1} + 3^{x+1} + 3^{x} = 351$ resulta um número:

a) múltiplo de 2.
b) divisor de 3.
c) equivalente a $\frac{13}{3}$.
d) primo.
e) recíproco de 13.

40. (Vunesp) A soma das soluções da equação $2^{6\sqrt{x}} + 8 = 9 \cdot 2^{3\sqrt{x}}$ é igual a:

a) 1 b) 2 c) 0 d) 4 e) 3

41. (U. F. Ouro Preto-MG) A soma das soluções da equação $100(10^{x}) = \sqrt[x]{1\,000^{5}}$ é:

a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

42. (Mackenzie-SP) A solução real da equação $4^{x} - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}$ está no intervalo:

a) $[-2, -1]$ b) $]2, 3]$ c) $]0, 1]$ d) $]-1, 0]$ e) $]1, 2]$

43. (Faap-SP) O conjunto solução da equação exponencial $2^{2x} - 12 \cdot 2^{x} + 32 = 0$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = -2 \text{ ou } x = 3\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = 2 \text{ ou } x = -3\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = -2 \text{ ou } x = -3\}$
d) $\varnothing$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = 2 \text{ ou } x = 3\}$

44. (UFRN) A equação $4^{2x-2} - 17 \cdot 4^{x-2} + 1 = 0$ tem soluções no intervalo:

a) $[0, 2]$ b) $[4, 5]$ c) $[6, 7]$ d) $[8, 13]$ e) $[-2, -1]$

45. A raiz da equação $(7^{x} - 2\sqrt{10}) \cdot (7^{x} + 2\sqrt{10}) = 9$ é um número:

a) irracional positivo.
b) inteiro negativo.
c) real negativo.
d) inteiro positivo.

46. (Osec-SP) O valor de $f(x) = 2^{(3x-2)}$, sendo que $4^{x} - 2 \cdot 2^{x} - 8 = 0$, é:

a) 4 b) 8 c) 16 d) 128 e) -2

47. (U. Uberaba-MG) Se a equação $\frac{(25^{x} + 125)}{6} = 5^{x+1}$ admite como soluções os números reais a e b, podemos afirmar que:

a) $\frac{a}{b} = 1$
b) $a + b = 0$
c) $a \cdot b = 2$
d) $a \cdot b = 1$
e) $a - b = 0$

48. (UFSE) Sejam x e y os números reais que tornam verdadeiras as sentenças $\begin{cases} 2^{x+y} - 2 = 30 \\ 2^{x-y} - 2 = 0 \end{cases}$.

Nessas condições, o valor de x^y é:

a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{1}{8}$ c) 1 d) 8 e) 9

49. (Unifor-CE) Se x e y são números reais tais que $\begin{cases} 3^{2x+y} = 1 \\ 3^{x-2y} = \frac{1}{9} \end{cases}$, então $x - y$ é igual a:

a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{6}{5}$ d) $-\frac{4}{5}$ e) $-\frac{6}{5}$

50. (F. Ibero-Americana-SP) Se (x, y) é solução do sistema $\begin{cases} 2^x + 3^y = 11 \\ 2^x - 3^y = 5 \end{cases}$, então $x + y$ é igual a:

a) 11 b) 3 c) 6 d) 4 e) 5

51. O conjunto solução em $\mathbb{R}$ da inequação $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]^{\frac{x}{2}} \geqslant \frac{4}{9}$ é:

a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{1}{2}\right\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{4}{9}\right\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 2\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\}$

52. (U. Católica de Salvador-BA) O número real x é tal que $3^{-x} \cdot 9^x > 27^{x+1}$ se, e somente se:

a) $x = 0$

c) $x = 1$

e) $x < -\frac{3}{2}$

b) $x < \frac{3}{2}$

d) $-3 < x < 3$

53. (PUC/Campinas-SP) Considere a sentença $a^{2x+3} > a^8$, na qual x é uma variável real e a é uma constante real positiva. Essa sentença é verdadeira se, por exemplo:

a) $x = 3$ e $a = 1$

b) $x = -3$ e $a > 1$

c) $x = 3$ e $a < 1$

d) $x = -2$ e $a < 1$

e) $x = 2$ e $a > 1$

54. (UEBA) Uma população de bactérias no instante t é definida pela função $f(t) = C \cdot 4^{kt}$, em que t é dado em minutos. Se a população depois de 1 minuto era de 64 bactérias e depois de 3 minutos, de 256, conclui-se que a população inicial era de:

a) 32 bactérias.

b) 16 bactérias.

c) 8 bactérias.

d) 2 bactérias.

e) 1 bactéria.

55. (U. São Francisco-SP) O censo realizado numa cidade apontou uma população de 250 mil habitantes e um crescimento populacional de 2% ao ano. Chamando de y a população em milhares de habitantes e de x o tempo em anos a partir da data do censo, a função que permite projetar a população futura dessa cidade em função do tempo é:

a) $y = 250 + 1{,}02^x$

b) $y = 250 + 1{,}02x$

c) $y = 250 \cdot 1{,}02^x$

d) $y = 250 + 0{,}02x$

e) $y = 250 + 2x$

Capítulo 8 Logaritmos

1. Introdução

Ao estudar função exponencial, vimos como resolver uma equação exponencial quando é possível obter potências de mesma base nos dois membros da equação. Isso, no entanto, nem sempre ocorre, como por exemplo na equação:

$$5^x = 12$$

São muitos os acontecimentos em que aparecem equações como essa. Vejamos a seguinte situação:

O número de indivíduos de uma população de bactérias no instante t é definido pela função:

$$f(t) = 30 \cdot 3^{1\,095t},$$

em que t é o tempo em minutos.

Deseja-se saber após quantos minutos essa população chegará a 11 100 bactérias.

De acordo com os dados do problema, temos:

$$11\,100 = 30 \cdot 3^{1\,095t} \Rightarrow 3^{1\,095t} = 370$$

E agora? Veja que não é possível obter potências de bases iguais nos dois membros. Que fazer? Estudar logaritmos, pois um dos objetivos desse estudo é justamente fornecer condições para a resolução de equações desse tipo.


Hank Morgan/SS-Stock Photos

Cultura de bactérias.

2. Definição de logaritmo

Sejam a e b números reais, positivos, com $a \neq 1$. Chamamos **logaritmo de b na base a** o número real x tal que $a^x = b$.

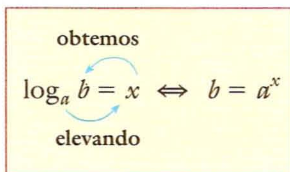
Indicaremos que x é logaritmo de b na base a escrevendo $x = \log_a b$, em que:

- b é o logaritmando (ou antilogaritmo);
- x é o logaritmo;
- a é a base do logaritmo.

Então, lembrando que somente os números positivos e diferentes de 1 podem ser base, temos:

> Logaritmo de um número positivo, em uma certa base positiva e diferente de 1, é o expoente ao qual se deve elevar a base, de modo a se obter o número.

Guarde bem isto:



Assim:

a) $\log_5 25 = 2$, pois $5^2 = 25$;

b) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$, pois $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$.

Vejamos alguns exemplos onde estaremos aplicando a definição de logaritmos.

Exemplo 1
Calcular o valor de:

a) $\log_2 16$ b) $\log_{36} 6$ c) $\log_{\frac{1}{27}} 9$ d) $\log_9 \sqrt{3}$

Solução
Indicando o valor procurado por x, temos:

a) $\log_2 16 = x \Rightarrow 2^x = 16 \Rightarrow 2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4$
Portanto $\log_2 16 = 4$.

b) $\log_{36} 6 = x \Rightarrow 36^x = 6 \Rightarrow (6^2)^x = 6 \Rightarrow 6^{2x} = 6^1 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Portanto $\log_{36} 6 = \frac{1}{2}$.

c) $\log_{\frac{1}{27}} 9 = x \Rightarrow \left(\frac{1}{27}\right)^x = 9 \Rightarrow \left[\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]^x = 3^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -\frac{2}{3}$

Portanto $\log_{\frac{1}{27}} 9 = -\frac{2}{3}$.

d) $\log_9 \sqrt{3} = x \Rightarrow 9^x = \sqrt{3} \Rightarrow (3^2)^x = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

Portanto $\log_9 \sqrt{3} = \frac{1}{4}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Usando a definição de logaritmos, calcule o valor de x nos seguintes casos:

a) $\log_2 32 = x$ b) $x = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$ c) $\log_{25} 5 = x$ d) $x = \log_{0,1} 0,01$

2. Determine o logaritmo do número 8 na base 0,5.

3. Encontre o valor do logaritmo do número 49 na base $\sqrt{7}$.

4. Calcule o valor das somas:

a) $\log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{2} + \log_3 \sqrt{243}$

b) $\log_8 \sqrt{2} + \log_4 \sqrt[3]{2}$

5. Ache o valor de y nos seguintes casos:

a) $y = 2 \log_5 25 - 4 \log_2 \frac{1}{8} + \log_{0,01} 100$

b) $y = \frac{1}{2} \log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27} + \frac{2}{3} \log_{16} 64 - \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{4}$

c) $y = [\log_5 (\log_3 243)]^2$

Nos próximos exemplos, iremos fazer uso da definição de logaritmos para resolver equações logarítmicas, que são aquelas que apresentam a variável na base, no logaritmando ou no logaritmo.

Exemplo 2
Resolver as equações:

a) $\log_3 (2x + 31) = 4$

b) $\log_2 (x^2 - 7x) = 3$

c) $(\log_4 x)^2 - 4 \log_4 x + 3 = 0$

d) $\log_2 [2 + \log_2 (x - 1)] = 1$

Solução

a) $\log_3 (2x + 31) = 4$

De acordo com a definição de logaritmos, o logaritmando deve ser positivo, razão pela qual devemos impor a seguinte restrição: $2x + 31 > 0 \Rightarrow 2x > -31 \Rightarrow x > -\frac{31}{2}$.

Por definição, temos:

$$\log_3 (2x + 31) = 4 \Rightarrow 2x + 31 = 3^4 \Rightarrow 2x + 31 = 81 \Rightarrow 2x = 50 \Rightarrow x = 25$$

Como esse valor satisfaz a restrição imposta, temos:

$$S = \{25\}$$

b) $\log_2 (x^2 - 7x) = 3$

Restrição: $x^2 - 7x > 0 \Rightarrow x < 0$ ou $x > 7$

A definição de logaritmos nos garante que:

$\log_2 (x^2 - 7x) = 3 \Rightarrow x^2 - 7x = 2^3 \Rightarrow x^2 - 7x = 8 \Rightarrow x^2 - 7x - 8 = 0 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 8$

Como -1 e 8 satisfazem a restrição, temos:

$$S = \{-1, 8\}$$

c) $(\log_4 x)^2 - 4 \log_4 x + 3 = 0$

Restrição: $x > 0$

Fazendo $\log_4 x = y$ (I), podemos escrever:

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$

Resolvendo essa equação, encontramos $y = 1$ ou $y = 3$.
Voltando em (I):
Para $y = 1$, temos: $\log_4 x = 1 \Rightarrow x = 4$.
Para $y = 3$, temos: $\log_4 x = 3 \Rightarrow x = 4^3 \Rightarrow x = 64$.
Como os dois valores de x encontrados satisfazem a restrição, temos:

$$S = \{4, 64\}$$

d) $\log_2 [2 + \log_2 (x - 1)] = 1$

Restrições: $x - 1 > 0$ (I) e $2 + \log_2 (x - 1) > 0$ (II)

Temos: $\log_2 [2 + \log_2 (x - 1)] = 1 \Rightarrow 2 + \log_2 (x - 1) = 2^1 \Rightarrow \log_2 (x - 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 1 = 2^0 \Rightarrow x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$.

Verificação das restrições para $x = 2$:

(I) $x - 1 > 0$
$2 - 1 > 0$ (verdadeiro)

(II) $2 + \log_2 (x - 1) > 0$
$2 + \log_2 (2 - 1) > 0$
$2 + \log_2 1 > 0$
$2 + 0 > 0$ (verdadeiro)
Logo, 2 é raiz e o conjunto solução é $S = \{2\}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

6. Use a definição de logaritmos para calcular o valor de x nos seguintes casos:

a) $\log_2 x = 6$

b) $\log_{\frac{1}{3}} x = 4$

c) $\log_{\sqrt{2}} x = 6$

d) $\log_{0,01} x = -2$

e) $\log_{\frac{3}{4}} x = \frac{1}{2}$

f) $\log_{\frac{5}{8}} x = -\frac{1}{2}$

g) $\log_2 (2x + 3) = 1$

h) $\log_4 (x - 1) = \frac{1}{2}$

i) $\log_5 (x^2 - 12x + 52) = 2$

j) $\log_2 (2 - x^2) = -1$

l) $\log_{10} (x^2 + 3x) = 1$

m) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 8x + 14) = -1$

7. Determine o conjunto solução das equações:

a) $(\log_2 x)^2 - 5 \log_2 x + 4 = 0$

b) $(\log_3 x)^2 - 2 \log_3 x - 3 = 0$

c) $(\log_8 x)^2 - 2 \log_8 x = 0$

d) $16 (\log_2 x)^2 - 17 \log_2 x + 1 = 0$

8. Resolva as equações:

a) $\log_3 [3 + \log_2 (x + 1)] = 1$

b) $\log_5 \left[5 + \log_2 \left(\frac{1}{8} - \frac{x}{4}\right)\right] = 1$

c) $\log_4 [15 + \log_2 (x - 3)] = 2$

d) $\log_{\frac{1}{2}} \left[2 + \log_{\frac{1}{2}} \left(x + \frac{1}{4}\right)\right] = -2$

e) $\log_2 \{\log_3 [2 + \log_4 (x - 4)]\} = 0$

f) $\log_2 [\log_3 (x + 21)] = 2$

Exemplo 3

Resolver as equações:

a) $\log_x 10 = 3$ b) $\log_{(x-2)} 9 = 2$ c) $\log_{(x+5)} 64 = 3$

Solução

a) $\log_x 10 = 3$

Por definição, a base de um logaritmo deve ser positiva e diferente de 1. Devemos então impor as seguintes restrições:

$\boxed{x > 0}$ (I) e $\boxed{x \neq 1}$ (II)

Temos: $\log_x 10 = 3 \Rightarrow x^3 = 10 \Rightarrow x = \sqrt[3]{10}$.

Verificação das restrições:

(I) $\sqrt[3]{10} > 0$ (verdadeiro)
(II) $\sqrt[3]{10} \neq 1$ (verdadeiro)
$\Rightarrow \sqrt[3]{10}$ é raiz.

O conjunto solução é $S = \{\sqrt[3]{10}\}$.

b) $\log_{(x-2)} 9 = 2$

Restrições: $\boxed{x - 2 > 0}$ (I) e $\boxed{x - 2 \neq 1}$ (II)

Temos: $\log_{(x-2)} 9 = 2 \Rightarrow (x - 2)^2 = 9 \Rightarrow (x - 2)^2 = 3^2$

Como os expoentes são iguais e pares, devemos ter:

$x - 2 = 3 \Rightarrow x = 5$

ou

$x - 2 = -3 \Rightarrow x = -1$

Verificação das restrições:

Para $x = -1$

(I) $-1 - 2 > 0$ (falso) $\Rightarrow -1$ não é raiz.

Para $x = 5$

(I) $5 - 2 > 0$ (verdadeiro)
(II) $5 - 2 \neq 1$ (verdadeiro)
$\Rightarrow$ 5 é raiz.

O conjunto solução é $S = \{5\}$.

c) $\log_{(x+5)} 64 = 3$

Restrições: $x + 5 > 0$ (I) e $x + 5 \neq 1$ (II)

Temos: $\log_{(x+5)} 64 = 3 \Rightarrow (x+5)^3 = 64 \Rightarrow (x+5)^3 = 4^3$.

Como os expoentes são iguais e ímpares, teremos:

$x + 5 = 4 \Rightarrow x = -1$

Verificação das restrições:

(I) $-1 + 5 > 0$ (verdadeiro)
(II) $-1 + 5 \neq 1$ (verdadeiro)
$\Rightarrow -1$ é raiz.

O conjunto solução é $S = \{-1\}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

9. Resolva as equações:

a) $\log_x 16 = 2$
b) $\log_x 5 = 4$
c) $\log_x 729 = 3$
d) $\log_{(x-2)} 16 = 2$
e) $\log_{(2x-3)} 5 = 1$
f) $\log_{(x-5)} 125 = 3$
g) $\log_{(x+4)} 49 = 2$
h) $\log_{(x+2)} 81 = 4$
i) $\log_{(3x+1)} 32 = 5$

Exemplo 4
Resolver a equação $\log_{(x-3)} (x - 1) = 2$.

Solução
Restrições: $x - 1 > 0$ (I), $x - 3 > 0$ (II) e $x - 3 \neq 1$ (III)

Temos: $\log_{(x-3)} (x - 1) = 2 \Rightarrow (x - 3)^2 = (x - 1) \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 5$.

Verificação das restrições:

Para $x = 2$

(I) $2 - 1 > 0$ (verdadeiro)
(II) $2 - 3 > 0$ (falso)
$\Rightarrow$ 2 não é raiz.

Para $x = 5$

(I) $5 - 1 > 0$ (verdadeiro)
(II) $5 - 3 > 0$ (verdadeiro)
(III) $5 - 3 \neq 1$ (verdadeiro)
$\Rightarrow$ 5 é raiz.

O conjunto solução é $S = \{5\}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

10. Resolva as equações:

a) $\log_x (5x - 8) = 1$

b) $\log_x (13x - 40) = 2$

c) $\log_{(3x - 10)} (x^2 - 10x + 20) = 1$

d) $\log_{(x - 3)} (2x + 2) = 2$

3. Propriedades dos logaritmos

Sejam a, b e c números reais positivos, com $a \neq 1$, e x um número real qualquer. Da definição de logaritmos decorrem as seguintes propriedades:

Primeira propriedade

$$\log_a 1 = 0, \text{ pois } a^0 = 1$$

Segunda propriedade

$$\log_a a = 1, \text{ pois } a^1 = a$$

Terceira propriedade

$$a^{\log_a b} = b$$

De fato, fazendo $\log_a b = x$, temos $a^x = b$.
Substituindo x por $\log_a b$ em $a^x = b$, vem: $a^{\log_a b} = b$.
Assim, temos:

a) $2^{\log_2 10} = 10$

b) $5^{\log_5 \frac{2}{3}} = \dfrac{2}{3}$

c) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Fazendo uso dessa terceira propriedade, resolveremos o exemplo a seguir.

Exemplo

Calcular o valor de:

a) $2^{3 + \log_2 5}$

b) $5^{2 - \log_5 4}$

c) $7^{2 \cdot \log_7 3}$

d) $a^{\log_a 2 \cdot \log_2 9}$

Solução

a) $2^{3 + \log_2 5} = 2^3 \cdot 2^{\log_2 5} = 8 \cdot 5 = 40$

b) $5^{2 - \log_5 4} = \dfrac{5^2}{5^{\log_5 4}} = \dfrac{25}{4}$

c) $7^{2 \cdot \log_7 3} = 7^{(\log_7 3) \cdot 2} = (7^{\log_7 3})^2 = 3^2 = 9$

d) $a^{\log_a 2 \cdot \log_2 9} = (a^{\log_a 2})^{\log_2 9} = 2^{\log_2 9} = 9$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

11. Calcule o valor das expressões:

a) $\log_{12} 1$

b) $\log_8 8$

c) $5^{\log_5 8}$

d) $10^{\log_{10} 2}$

e) $\log_5 1 + \log_5 5 + 5^{\log_5 3}$

12. Determine o valor de x nos seguintes casos:

a) $x = 5^{\log_5 4}$
b) $x = 10^{\log_{10} 2}$
c) $x = 3^{2 + \log_3 4}$
d) $x = 2^{3 - \log_2 5}$
e) $x = 10^{2 \cdot \log_{10} 3}$
f) $x = 8^{2 \cdot \log_8 4}$
g) $x = 7^{\log_7 20 - \log_7 2}$
h) $x = 3^{\log_3 5 \cdot \log_5 6}$

13. Sendo $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, com $a \neq 1$ e $b \neq 1$, determine N:

a) $N = a^{2 + \log_a 5}$
b) $N = a^{\log_a 3} + b^{\log_b 5}$
c) $N = b^{\log_b 10 \cdot \log_{10} 3}$
d) $N = a^{\log_a b} + b^{\log_b a}$

Quarta propriedade

$$\log_a b = \log_a c \Rightarrow b = c$$

Fazendo $\log_a b = x$, podemos escrever:

$$\log_a b = \log_a c = x$$

Então, pela definição de logaritmos:

$$a^x = b \text{ e } a^x = c, \text{ portanto } b = c,$$

pois a função exponencial é injetora.

Exemplo 1

Fazendo uso da quarta propriedade dos logaritmos, determinar o valor de x na sentença $\log_5 (2x - 3) = \log_5 (x + 1)$.

Solução

Segundo a definição de logaritmos, existem inicialmente algumas restrições a serem consideradas, quais sejam:

$2x - 3 > 0 \Rightarrow 2x > 3 \Rightarrow x > \frac{3}{2}$

e

$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$

Assim sendo, a restrição final para x é: $x > \frac{3}{2}$.

A quarta propriedade nos garante que:

$$2x - 3 = x + 1 \Rightarrow x = 4$$

Como o valor 4 satisfaz à restrição imposta, a solução é $x = 4$.

Exemplo 2

Resolver a equação logarítmica $\log_3 (x^2 - 2) = \log_3 (-x)$, sendo o universo $U = \mathbb{R}$.

Solução

Conforme a definição de logaritmos, devemos impor as seguintes restrições:

$x^2 - 2 > 0$, ou seja, $x < -\sqrt{2}$ ou $x > \sqrt{2}$,

e

$-x > 0$, ou seja, $x < 0$.

Assim sendo, a restrição final é: $x < -\sqrt{2}$.

A quarta propriedade nos fornece:

$$x^2 - 2 = -x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

Resolvendo essa equação, encontramos $x = 1$ ou $x = -2$.
O valor $x = 1$ não serve, pois não satisfaz à restrição imposta.
O valor $x = -2$ satisfaz à restrição imposta.
O conjunto solução é $S = \{-2\}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

14. Resolva as seguintes equações logarítmicas:

a) $\log_5 (x + 1) = \log_5 (2x - 3)$

b) $\log_9 (2x + 3) = \log_9 (x - 5)$

c) $\log_{10} (x^2 + 2) = \log_{10} (4 - x)$

d) $\log_7 2x^2 = \log_7 (11x + 6)$

Exemplo 3
Determinar o valor de a na sentença $\log_4 (2a - 5) = 2$, utilizando a quarta propriedade dos logaritmos.

Solução
Devemos considerar a seguinte restrição: $2a - 5 > 0$, ou seja, $a > \frac{5}{2}$.

Na quarta propriedade há o aparecimento de dois logaritmos de mesma base, um no primeiro membro e outro no segundo.
Como $2 = \log_4 16$, podemos escrever:

$$\log_4 (2a - 5) = \log_4 16$$

Fazendo uso da quarta propriedade, temos:

$$2a - 5 = 16 \Rightarrow 2a = 21 \Rightarrow a = \frac{21}{2}$$

Como esse valor satisfaz à restrição imposta, a solução é $a = \frac{21}{2}$.

Observação: esse problema poderia ser resolvido simplesmente aplicando a definição de logaritmos, assim:

$$4^2 = 2a - 5 \Rightarrow 2a - 5 = 16 \Rightarrow 2a = 21 \Rightarrow a = \frac{21}{2}$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

15. Utilizando a quarta propriedade, resolva as equações:

a) $\log_2 (x^2 - 7x) = 3$

b) $\log_5 (x - 3) - 2 = 0$

4. Sistemas de logaritmos

Seja a um número positivo e diferente de 1. Chamamos **sistemas de logaritmos de base a** o conjunto dos logaritmos na base a de todos os números reais positivos.

Dessa forma, existem infinitos sistemas de logaritmos. No entanto, pela simplicidade e pelas aplicações práticas, dois são os sistemas de logaritmos mais usados:

a) **Sistema de base 10:** também chamado sistema de **logaritmos decimais** ou **vulgares** ou ainda de **Briggs**.

Nesse sistema podemos dispensar a indicação da base 10. De modo que ao escrever **log** x devemos entender $\log_{10} x$.

Os logaritmos decimais, pela facilidade de seu uso, são especialmente utilizados na resolução de cálculos numéricos.

b) **Sistema de base** e: também chamado sistema de **logaritmos neperianos** ou **logaritmos naturais**. Os logaritmos neperianos também possuem representação própria. Assim, o logaritmo neperiano de x pode ser indicado por uma das seguintes formas:

$$\log_e x, \text{ Ln } x, \ln x \text{ ou } Lx$$

O número e

A base do sistema de logaritmos adotada por Neper (ver seção *Túnel do tempo*, na pág. 182) foi o número irracional e, um número realmente fantástico, pois ele aparece de maneira natural na resolução de muitos problemas que envolvem nosso cotidiano.

Não podemos aqui deduzir de forma rigorosa esse número, mas é possível ter uma idéia do que ele é. Para isso, vamos considerar a expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ e calcular o seu valor trocando n por 1, 2, 3, ..., ou seja, com n crescendo indefinidamente.

Se você tiver uma calculadora, pode conferir os dados da tabela a seguir, na qual colocamos apenas alguns valores para n. Os valores calculados são aproximados e na tabela estão com no máximo cinco casas decimais.

n	1	2	5	10	100	1 000	100 000	200 000	500 000
Valor	2	2,25	2,488 32	2,593 74	2,704 81	2,716 92	2,718 27	2,718 28	2,718 28

Observe que para valores maiores de n as diferenças que existirem ocorrerão fora do nosso campo de visão, ou seja, após a quinta casa decimal...

Dessa forma, quando o valor de n cresce indefinidamente, os valores da nossa expressão tenderão a um número que é aproximadamente 2,718 28... Esse é o número e.

Mais adiante você verá alguns problemas que, na sua solução, necessitam desse número.

5. Propriedades dos logaritmos de mesma base

Veremos agora algumas propriedades envolvendo logaritmos de mesma base, as quais são utilizadas no cálculo. Procure compreendê-las por meio das aplicações presentes nos exemplos propostos.

Logaritmo de um produto

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, com $a \neq 1$. O problema consiste em encontrar o $\log_a (b \cdot c)$, conhecendo os valores de $\log_a b$ e de $\log_a c$.

Sejam $\log_a b = x$ e $\log_a c = y$.

Desse modo, pela definição de logaritmo, temos:

$$\log_a b = x \Rightarrow \boxed{b = a^x} \quad \text{e} \quad \log_a c = y \Rightarrow \boxed{c = a^y}$$

(I) (II)

Multiplicando (I) e (II), temos:

$$b \cdot c = a^x \cdot a^y \Rightarrow b \cdot c = a^{x+y}$$

Aplicando novamente a definição de logaritmo, temos $\log_a (b \cdot c) = x + y$. Portanto:

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Observações

1. Indicaremos $\log_a (b \cdot c)$ também por $\log_a b \cdot c$.
2. A propriedade vista é generalizada para um produto de mais de dois fatores positivos.

Em resumo, se todos os fatores de um produto forem positivos, temos que:

O logaritmo de um produto é igual à soma dos logaritmos dos fatores (na mesma base).

Como exemplo, vamos usar essa propriedade na resolução dos exercícios seguintes.

Exemplo 1

Aplicar a propriedade do logaritmo de um produto nos seguintes casos:

a) $\log_3 5 \cdot 4$

b) $\log_2 2 \cdot 7 \cdot 10$

Solução

a) $\log_3 5 \cdot 4 = \log_3 5 + \log_3 4$

b) $\log_2 2 \cdot 7 \cdot 10 = \log_2 2 + \log_2 7 + \log_2 10$

Exemplo 2

Reduzir as seguintes expressões a um único logaritmo:

a) $\log_5 3 + \log_5 4$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 5 + \log_{\frac{1}{2}} 2 + \log_{\frac{1}{2}} 3$

Solução

a) $\log_5 3 + \log_5 4 = \log_5 3 \cdot 4 = \log_5 12$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 5 + \log_{\frac{1}{2}} 2 + \log_{\frac{1}{2}} 3 = \log_{\frac{1}{2}} 5 \cdot 2 \cdot 3 = \log_{\frac{1}{2}} 30$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

16. Aplique a propriedade do logaritmo de um produto nos seguintes casos:

a) $\log_3 10 \cdot 9$

b) $\log_4 \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot 7$

c) $\log 3 \cdot a \cdot b$ ($a > 0$ e $b > 0$)

17. Reduza as seguintes expressões a um único logaritmo:

a) $\log_3 2 + \log_3 5 + \log_3 4$

b) $\log_4 \frac{3}{5} + \log_4 \frac{10}{3}$

c) $\log (x + 5) + \log (x - 5)$, para $x > 5$.

d) $\log_5 (x + 1) + \log_5 (x - 3)$, para $x > 3$.

18. Determine a expressão P cujo logaritmo na base 3 é $\log_3 P = \log_3 5 + \log_3 2 + \log_3 h$, para $h > 0$.

19. Escreva a expressão E cujo logaritmo decimal é $\log E = \log 6 + \log (2x + 1)$, para $x > -\frac{1}{2}$.

20. Se $\log a = m + n$ e $\log b = m - n$, qual o valor de $\log ab$?

21. Se $\log_5 a = m$ e $\log_5 b = n$, calcule $\log_5 ab$.

22. Sabendo que $\log a + \log b = 3$, calcule ab.

23. Ca'cule a e b sabendo que $a + b = 7$, $\log a + \log b = 1$ e $a > b$.

Exemplo 3

Resolver a equação $\log_3 (2x + 1) + \log_3 (x - 1) = 3$.

Solução

Restrições: $\boxed{2x + 1 > 0}$ (I) e $\boxed{x - 1 > 0}$ (II)

Aplicando a propriedade do logaritmo de um produto, temos:

$\log_3 (2x + 1) + \log_3 (x - 1) = 3 \Rightarrow \log_3 (2x + 1)(x - 1) = 3 \Rightarrow (2x + 1)(x - 1) = 27 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 27 \Rightarrow 2x^2 - x - 28 = 0 \Rightarrow x_1 = 4$ e $x_2 = \dfrac{-7}{2}$

Verificação das restrições:

Para $x = 4$

$\left.\begin{array}{l} \text{(I)}\ 2 \cdot 4 + 1 > 0 \text{ (verdadeiro)} \\ \text{(II)}\ 4 - 1 > 0 \text{ (verdadeiro)} \end{array}\right\} \Rightarrow 4$ é raiz.

Para $x = \dfrac{-7}{2}$

(I) $2\left(\dfrac{-7}{2}\right) + 1 > 0$ (falso) $\Rightarrow \dfrac{-7}{2}$ não é raiz.

O conjunto solução é $S = \{4\}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

24. Resolva as equações:

a) $\log_3 (2x + 7) + \log_3 (x - 1) = 5$

b) $\log (x + 2) + \log (10x + 20) = 3$

c) $\log_2 (3x + 1) + \log_2 (9 - x) = 6$

d) $\log_2 x + \log_2 (x - 6) = 4$

Logaritmo de um quociente

Determinemos o valor de $\log_a \dfrac{b}{c}$ conhecendo os valores de $\log_a b$ e de $\log_a c$ (em que $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \neq 1$).

Seja $\log_a b = x$ e $\log_a c = y$.

Pela definição de logaritmo, temos:

$$\log_a b = x \Rightarrow \underset{\text{(I)}}{\boxed{b = a^x}} \quad \text{e} \quad \log_a c = y \Rightarrow \underset{\text{(II)}}{\boxed{c = a^y}}$$

Dividindo (I) por (II), temos:

$$\frac{b}{c} = \frac{a^x}{a^y} \Rightarrow \frac{b}{c} = a^{x-y}$$

Aplicando novamente a definição de logaritmo, temos $\log_a \frac{b}{c} = x - y$. Portanto:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

Observação: o oposto do logaritmo de um número é também chamado **cologaritmo** do número, ou seja, $\mathbf{colog_a\, c = -log_a\, c}$.

Resumindo, temos que, se em uma divisão o dividendo e o divisor são números positivos:

O logaritmo do quociente é igual à diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor (na mesma base).

Exemplo 1
Aplicar a propriedade do logaritmo de um quociente nos seguintes casos:

a) $\log_8 \frac{3}{2}$ b) $\log_2 \frac{1}{2}$ c) $\log_6 0,2$

Solução

a) $\log_8 \frac{3}{2} = \log_8 3 - \log_8 2$

b) $\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 1 - \log_2 2 = 0 - 1 = -1$

c) $\log_6 0,2 = \log_6 \frac{2}{10} = \log_6 2 - \log_6 10$

Exemplo 2
Reduzir as seguintes expressões a um único logaritmo:

a) $\log_7 5 - \log_7 3$ b) $\log_5 3 - \log_5 10$

Solução

a) $\log_7 5 - \log_7 3 = \log_7 \frac{5}{3}$ b) $\log_5 3 - \log_5 10 = \log_5 \frac{3}{10}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

25. Aplique a propriedade do logaritmo de um quociente nos seguintes casos:

a) $\log_5 \frac{8}{9}$ b) $\log_3 \frac{1}{4}$ c) $\log \frac{a+b}{c}$ $(a, b, c \in \mathbb{R}_+^*)$

26. Reduza a um só logaritmo as expressões:

a) $\log_3 12 - \log_3 4$

b) $\log 5 - \log 2$

c) $\log_4 x - \log_4 (x + 2)$, para $x > 0$.

d) $\log (x - 2) - \log (x + 2)$, para $x > 2$.

27. Usando a propriedade do produto e a do quociente, desenvolva o segundo membro até onde for possível. (Os números *a, b* e *c* são reais e positivos.)

a) $y = \log_2 \dfrac{ab}{c}$

b) $\log_5 \dfrac{a}{bc}$

c) $\log \dfrac{2bc}{3a}$

28. Reduza as seguintes expressões a um único logaritmo:

a) $\log_2 5 + \log_2 3 - \log_2 7$

b) $\log_4 x + \log_4 (x - 1) - \log_4 (x + 1)$, para $x > 1$.

29. Determine A sabendo que logaritmo na base 3 é $\log_3 A = \log_3 20 - \log_3 6$.

30. Determine S em função de r cujo logaritmo decimal é dado por $\log S = \log 4 + \log \pi + \log r^3 - \log 3$.

31. Sendo $\log_a b = x$, calcule $\log_a \dfrac{1}{b}$.

32. Sabendo que $\log_4 a - \log_4 b = 2$, calcule $\dfrac{a}{b}$.

33. Resolva o sistema $\begin{cases} a + b = 15 \\ \log_2 a - \log_2 b = 1 \end{cases}$.

34. Calcule o valor de $\log 365 - \log 36{,}5$.

Exemplo 3

Resolver a equação $\log_6 (2x + 5) - \log_6 (32x + 20) = -1$.

Solução

Restrições: $\boxed{2x + 5 > 0}$ (I) e $\boxed{32x + 20 > 0}$ (II)

Aplicando a propriedade do logaritmo de um quociente, temos:

$$\log_6 (2x + 5) - \log_6 (32x + 20) = -1 \Rightarrow \log_6 \frac{2x + 5}{32x + 20} = -1 \Rightarrow \frac{2x + 5}{32x + 20} = 6^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x + 5}{32x + 20} = \frac{1}{6} \Rightarrow 32x + 20 = 12x + 30 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Verificação das restrições:

$$\left.\begin{array}{l} \text{(I)}\ 2 \cdot \dfrac{1}{2} + 5 > 0 \text{ (verdadeiro)} \\ \text{(II)}\ 32 \cdot \dfrac{1}{2} + 20 > 0 \text{ (verdadeiro)} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \text{ é raiz.}$$

O conjunto solução é $S = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

35. Resolva as equações:

a) $\log_3 (5x + 7) - \log_3 (2x + 5) = 1$

b) $\log_5 (x^2 - 2x) - \log_5 (x - 2) = 2$

c) $\log_3 x - \log_3 (x - 2) = -2$

d) $\log (2x - 4) - \log (10x + 30) = -1$

36. Usando as propriedades estudadas, resolva as equações:

a) $\log_4 (1 - 3x) = 1 - \log_4 (x + 2)$

b) $\log_6 (1 + x) + \log_6 \left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$

c) $\log 4x + \log x - \log (-11x + 3) = 0$

d) $\log_2 (x + 5) + \log_2 (x + 3) = 3 + \log_2 (x + 2)$

Logaritmo de uma potência

Calculemos agora o valor de $\log_a b^m$ conhecendo o valor de $\log_a b$, o valor de m e sabendo que $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$ e $m \in \mathbb{R}$.

Sejam $\log_a b^m = x$ e $\log_a b = y$.

Queremos, portanto, calcular o valor de x. Aplicando a definição de logaritmo, temos:

$$\log_a b^m = x \Rightarrow \boxed{b^m = a^x}\ \text{(I)} \quad \text{e} \quad \log_a b = y \Rightarrow \boxed{b = a^y}\ \text{(II)}$$

Elevando (II) à potência m, obtemos:

$$b^m = (a^y)^m \Rightarrow \boxed{b^m = a^{my}}\ \text{(III)}$$

Comparando (I) e (III), temos $a^x = a^{my}$. Portanto:

$$\boxed{x = m \cdot y}\ \text{(IV)}$$

Como $x = \log_a b^m$ e $y = \log_a b$, substituindo em (IV) encontramos:

$$\boxed{\log_a b^m = m \cdot \log_a b}$$

Assim, por exemplo:

a) $\log_5 2^3 = 3 \cdot \log_5 2$

b) $\log_3 5^{-2} = -2 \cdot \log_3 5$

c) $\log \sqrt[3]{5} = \log 5^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \log 5$

Inversamente:

a) $2 \cdot \log_4 5 = \log_4 5^2$

b) $\frac{2}{3} \cdot \log_5 2 = \log_5 2^{\frac{2}{3}} = \log_5 \sqrt[3]{2^2} = \log_5 \sqrt[3]{4}$

Vejamos agora alguns exemplos envolvendo as propriedades estudadas.

Exemplo 1

Sendo $P = \dfrac{5a^3}{3b}$, com $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, calcular $\log_4 P$.

Solução

Temos: $\log_4 P = \log_4 \dfrac{5a^3}{3b} = \log_4 (5a^3) - \log_4 (3b) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_4 P = \log_4 5 + \log_4 a^3 - (\log_4 3 + \log_4 b) = \log_4 5 + 3 \log_4 a - \log_4 3 - \log_4 b$

Exemplo 2

Determinar o valor de N nos seguintes casos:

a) $\log_5 N = 3 \log_5 2 + \log_5 4$

b) $\log N = 1 + 3 \log 2 - 2 \log 5$

Solução

a) $\log_5 N = 3 \log_5 2 + \log_5 4 \Rightarrow \log_5 N = \log_5 2^3 + \log_5 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_5 N = \log_5 8 + \log_5 4 \Rightarrow \log_5 N = \log_5 8 \cdot 4 \Rightarrow \log_5 N = \log_5 32$

Mesma base

Pela 4ª propriedade dos logaritmos, temos $N = 32$.

b) $\log N = 1 + 3 \log 2 - 2 \log 5 \Rightarrow \log N = \log 10 + \log 2^3 - \log 5^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log N = \log 10 \cdot 2^3 - \log 25 \Rightarrow \log N = \log \dfrac{80}{25} \Rightarrow \log N = \log \dfrac{16}{5} \Rightarrow N = \dfrac{16}{5}$

Mesma base

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

37. Aplique a propriedade do logaritmo de uma potência nos casos a seguir:

a) $\log_4 2^3$ b) $\log_5 7^2$ c) $\log_4 3^{-1}$ d) $\log_2 \sqrt[3]{5}$ e) $\log_{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{3}{4}\right)^2$

38. Reduza à forma $\log_a x$ as expressões:

a) $3 \log_5 2$ b) $2 \log_3 4$ c) $-1 \log 2$ d) $\dfrac{2}{3} \log 8$

39. Sendo a, b e c números reais positivos, indique como desenvolver o segundo membro das expressões para se obter $\log N$.

a) $N = \dfrac{a^2b^3}{c}$ b) $N = \dfrac{10a^4}{b^2}$ c) $N = \dfrac{\sqrt{2}\,a}{5b^3}$ d) $N = \dfrac{4b^5c^2}{\sqrt[5]{a^3}}$

40. Determine P nos seguintes casos:

a) $\log_5 P = \log_5 4 + 3 \log_5 3$

b) $\log_4 P = 2 \log_4 3 - \log_4 5$

c) $\log_2 P = 3 + 2 \log_2 5$

d) $\log P = 3 \log 10 + 2 \log 100 + 3 \log 0{,}01$

e) $\log P = \frac{1}{2} \log 4 + 2 \log \sqrt{2} - \log 10^2$

f) $\log_2 P = \log_2 4 + \frac{1}{2} \log_2 8 - 1$

41. Sendo $\log_a b = x$ e $\log_a c = y$, calcule:

a) $\log_a bc$

b) $\log_a \frac{b}{c}$

c) $\log_a b^3$

d) $\log_a b^2c^3$

e) $\log_a \sqrt{a}$

f) $\log_a \frac{a^2\sqrt{b}}{b}$

Exemplo 3

Resolver a equação $2 \cdot \log_3 (x - 1) - \log_3 (2x - 5) = 1 + \log_3 (5 - x)$.

Solução

Restrições: $\underbrace{x - 1 > 0}_{\text{(I)}}$, $\underbrace{2x - 5 > 0}_{\text{(II)}}$ e $\underbrace{5 - x > 0}_{\text{(III)}}$

Temos: $2 \log_3 (x - 1) - \log_3 (2x - 5) = 1 + \log_3 (5 - x)$.

Como $1 = \log_3 3$, a equação fica:

$\log_3 (x - 1)^2 - \log_3 (2x - 5) = \log_3 3 + \log_3 (5 - x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log_3 \frac{(x-1)^2}{2x-5} = \log_3 [3(5 - x)] \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{2x-5} = 3(5 - x) \Rightarrow$$

Iguais

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 1}{2x - 5} = 15 - 3x \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 30x - 6x^2 - 75 + 15x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x^2 - 47x + 76 = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ ou } x = \frac{19}{7}.$$

Verificação das restrições:

Para $x = 4$

(I) $4 - 1 > 0$ (verdadeiro)

(II) $2 \cdot 4 - 5 > 0$ (verdadeiro)

(III) $5 - 4 > 0$ (verdadeiro)

$\Rightarrow$ 4 é uma raiz.

Para $x = \dfrac{19}{7}$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(I)} & \dfrac{19}{7} - 1 > 0 \text{ (verdadeiro)} \\ \text{(II)} & 2 \cdot \dfrac{19}{7} - 5 > 0 \text{ (verdadeiro)} \\ \text{(III)} & 5 - \dfrac{19}{7} > 0 \text{ (verdadeiro)} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{19}{7} \text{ é outra raiz.}$$

O conjunto solução é $S = \left\{4, \dfrac{19}{7}\right\}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

42. Resolva as equações:

a) $2 \log_3 (2x + 1) - \log_3 (x + 5) = 2$

b) $\log_2 (3x - 7) - 2 \log_2 (x - 1) = -1$

c) $2 \log_2 (x + 2) - \log_2 x = 3$

d) $1 - \log (2x - 20) = \log (x - 5) - \log (3x - 35)$

Exemplo 4

Dados $\log 2 = 0{,}301\,03$ e $\log 3 = 0{,}477\,12$, calcular:

a) $\log 32$ b) $\log \sqrt[4]{125}$ c) $\log \dfrac{25}{6}$ d) $\log 144$

Solução

a) $\log 32 = \log 2^5 = 5 \cdot \log 2 = 5 \cdot (0{,}301\,03) = 1{,}505\,15$

b) $\log \sqrt[4]{125} = \dfrac{1}{4} \cdot \log 125 = \dfrac{1}{4} \cdot \log 5^3 = \dfrac{1}{4} \cdot 3 \cdot \log 5 = \dfrac{3}{4} \log 5$ (I)

Precisamos calcular log 5. Lembrando que $5 = \dfrac{10}{2}$, temos:

$\log 5 = \log \dfrac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0{,}301\,03 = 0{,}698\,97$

Voltando em (I): $\dfrac{3}{4} \log 5 = \dfrac{3}{4} \cdot (0{,}698\,97) = \dfrac{2{,}096\,91}{4} = 0{,}524\,22$

c) $\log \dfrac{25}{6} = \log 25 - \log 6 = \log 5^2 - \log (2 \cdot 3) = 2 \cdot \log 5 - (\log 2 + \log 3) =$
$= 2 \cdot \log 5 - \log 2 - \log 3 = 2 \cdot (0{,}698\,97) - 0{,}301\,03 - 0{,}477\,12 =$
$= 1{,}397\,94 - 0{,}778\,15 = 0{,}619\,79$

d) $\log 144 = \log 2^4 \cdot 3^2 = \log 2^4 + \log 3^2 = 4 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 3 =$
$= 4 \cdot (0{,}301\,03) + 2 \cdot (0{,}477\,12) = 1{,}204\,12 + 0{,}954\,24 = 2{,}158\,36$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

43. Dados log 2 = 0,301 e log 3 = 0,477, calcule:

a) log 12

b) $\log \frac{81}{8}$

c) $\log \sqrt[3]{\frac{16}{9}}$

d) log 5

e) log 625

f) $\log 3^{10}$

44. Sendo log 2 = 0,301 e log 6 = 0,778, calcule:

a) log 3

b) log 24

c) log 15

d) log 36

e) log 80

f) $\log \sqrt{\frac{20}{27}}$

6. Mudança de base

Em muitas situações necessitaremos transformar o logaritmo de um número em uma certa base para uma outra base.

Vamos estudar agora como fazer isso.

Mostremos que, sendo a, b, $c \in \mathbb{R}_+^*$, com $a \neq 1$ e $c \neq 1$, é verdadeira a afirmação:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Chamando $\log_a b = x$, $\log_c b = y$ e $\log_c a = z$, o problema consiste em mostrar que $x = \frac{y}{z}$. Aplicando a definição de logaritmo, temos:

$$\left.\begin{array}{l}\log_a b = x \Rightarrow b = a^x \\ \log_c b = y \Rightarrow b = c^y\end{array}\right\} \quad a^x = c^y \quad \text{(I)}$$

$\log_c a = z \Rightarrow a = c^z$ **(Elevando os dois membros a x-ésima potência)** $\Rightarrow a^x = (c^z)^x \Rightarrow$

$\Rightarrow a^x = c^{x \cdot z}$ (II)

Comparando (I) e (II) $\Rightarrow c^{x \cdot z} = c^y \Rightarrow x \cdot z = y \Rightarrow x = \frac{y}{z}$.

Portanto é verdadeira a sentença:

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$ **Lei de mudança de base**

Caso particular: se $a, b \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, podemos transformar $\log_a b$ para a base b. Temos:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} \Rightarrow \boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

Exemplo 1

Transformar em logaritmos de base 5:

a) $\log_3 2$

b) $\log_7 \sqrt{2}$

c) $\log_2 5$

d) $\log_3 \frac{1}{5}$

Solução

a) $\log_3 2 = \dfrac{\log_5 2}{\log_5 3}$

c) $\log_2 5 = \dfrac{\log_5 5}{\log_5 2} = \dfrac{1}{\log_5 2}$

b) $\log_7 \sqrt{2} = \dfrac{\log_5 \sqrt{2}}{\log_5 7}$

d) $\log_3 \dfrac{1}{5} = \dfrac{\log_5 \frac{1}{5}}{\log_5 3} = \dfrac{\overset{0}{\log_5 1} - \overset{1}{\log_5 5}}{\log_5 3} = \dfrac{-1}{\log_5 3}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

45. Transforme em logaritmo de base 10:

a) $\log_5 7$

b) $\log_2 10$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 25$

d) $\log_2 \dfrac{1}{25}$

e) $\log_6 \sqrt{3}$

f) $\log_{0,2} 8$

46. Sendo $\log_3 7 = a$, calcule $\log_7 3$.

47. Dados $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}47$, calcule:

a) $\log_3 2$

b) $\log_2 3$

c) $\log_3 \dfrac{1}{2}$

d) $\log_{\frac{1}{3}} 2$

48. Calcule o valor da expressão $\log_4 3 \cdot \log_3 2$.

49. Simplifique o produto $\log_2 5 \cdot \log_3 7 \cdot \log_5 3$.

50. Sendo a, b e c números reais positivos e diferentes de 1, calcule $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a$.

51. Sabendo que $\dfrac{1}{\log_a 3} + \dfrac{1}{\log_b 3} = 2$, calcule o valor de ab.

Exemplo 2

Resolver a equação $\log_4 (x + 6) - \log_2 (x - 6) = 0$.

Solução

Restrições: $\boxed{x + 6 > 0}$ (I) e $\boxed{x - 6 > 0}$ (II)

Vamos transformar $\log_4 (x + 6)$ para a base 2:

$$\log_4 (x + 6) = \dfrac{\log_2 (x + 6)}{\underset{2}{\log_2 4}} = \dfrac{1}{2} \cdot \log_2 (x + 6)$$

Assim, a equação dada fica:

$$\frac{1}{2} \cdot \log_2 (x + 6) - \log_2 (x - 6) = 0 \Rightarrow \log_2 (x + 6) - 2 \cdot \log_2 (x - 6) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 (x + 6) - \log_2 (x - 6)^2 = 0 \Rightarrow \log_2 \frac{x + 6}{(x - 6)^2} = 0 \Rightarrow \frac{x + 6}{(x - 6)^2} \Rightarrow \overset{1}{2^0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 6 = (x - 6)^2 \Rightarrow x^2 - 12x + 36 = x + 6 \Rightarrow x^2 - 13x + 30 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = 10$$

Verificação das restrições:
Para $x = 3$

(I) $3 + 6 > 0$ (verdadeiro)
(II) $3 - 6 > 0$ (falso)
$\Rightarrow$ 3 não é raiz.

Para $x = 10$

(I) $10 + 6 > 0$ (verdadeiro)
(II) $10 - 6 > 0$ (verdadeiro)
$\Rightarrow$ 10 é raiz.

O conjunto solução é $S = \{10\}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

52. Resolva as equações logarítmicas:

a) $\log_5 (x + 10) = 1 + \log_{25} (2x - 5)$

b) $\log_3 (x - 2) = \log_9 (x + 4)$

c) $\log_4 x - \log_2 (x - 3) = 1$

d) $\frac{1}{3} \log_4 (x + 10) - \frac{1}{6} \log_2 (x + 2) = \frac{1}{2} \log_8 (x - 4)$

e) $\log_2 x + \log_4 x = \frac{3}{2}$

f) $\log_3 x - 2 \log_9 (x + 6) = -1$

TÚNEL DO TEMPO

Os primeiros estudos sobre logaritmos foram feitos, quase simultaneamente, pelo teólogo escocês John Napier (1550-1617) e por Jobst Bürgi (1552-1632), matemático suíço.

Napier (ou Neper) foi o primeiro a empregar o termo **logaritmo** (do grego *logos*, razão, e *arithmos*, número) em seu livro *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (*Descrição das normas dos logaritmos maravilhosos*), de 1614. Seis anos mais tarde, quando os logaritmos já eram populares, Bürgi publicou *Arithmetische und geometrische progresstabulen* (*Tábuas de progressões aritméticas e geométricas*).

Neper utilizava-se da base *e*, motivo pelo qual os logaritmos nessa base são chamados neperianos.

Pouco antes da morte de Neper, o matemático inglês Henry Briggs (1561-1631) procurou-o, propondo-lhe algumas modificações no método de aplicação dos logaritmos, bem como o uso da base decimal. O escocês concordou, mas já não tinha energia suficiente para pôr em prática tais idéias.

Coube então a Briggs a tarefa pioneira de construir a tabela de logaritmos decimais, publicada em seu livro *Arithmetica logarithmica* (1624). Daí a razão de os logaritmos decimais serem também chamados logaritmos de Briggs.

7. A função logarítmica

Sendo a um número real, positivo e diferente de **1** ($a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$), chamamos **função logarítmica de base a** a função:

$$g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \text{ definida por } g(x) = \log_a x$$

Observe que o domínio da função é $\mathbb{R}_+^*$, ou seja, **somente valores positivos poderão ser atribuídos a x.**

Vamos analisar dois exemplos. No primeiro, a base é maior que 1 e, no segundo, a base está entre 0 e 1 (os dois únicos tipos possíveis de base).

Vamos verificar também o gráfico de cada tipo de função.

Exemplo 1

Consideremos a função definida por $y = \log_3 x$ ou $f(x) = \log_3 x$.

Atribuindo valores arbitrários a x e calculando $f(x)$, obtemos uma tabela de pontos que pertencem ao gráfico da função $y = \log_3 x$.

Tabela

x	y	Ponto (x, y)
$\frac{1}{9}$	-2	$A\left(\frac{1}{9}, -2\right)$
$\frac{1}{3}$	-1	$B\left(\frac{1}{3}, -1\right)$
1	0	$C(1, 0)$
3	1	$D(3, 1)$
9	2	$E(9, 2)$

$\log_3 \frac{1}{9} = y \Rightarrow 3^y = 3^{-2} \Rightarrow y = -2$

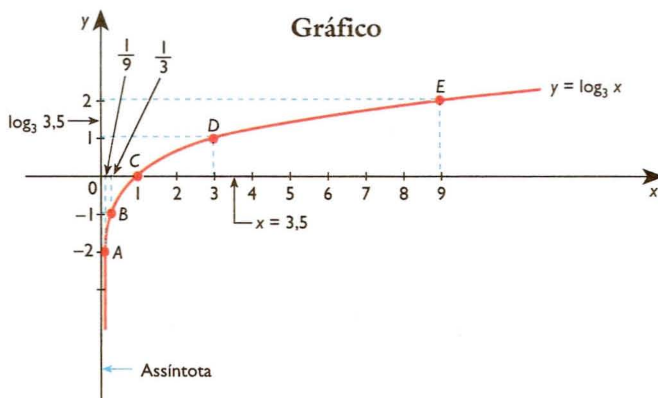
$\log_3 \frac{1}{3} = y \Rightarrow 3^y = 3^{-1} \Rightarrow y = -1$

$\log_3 1 = y \Rightarrow 3^y = 1 \Rightarrow 3^y = 3^0 \Rightarrow y = 0$

$\log_3 3 = y \Rightarrow 3^y = 3^1 \Rightarrow y = 1$

$\log_3 9 = y \Rightarrow 3^y = 9 \Rightarrow 3^y = 3^2 \Rightarrow y = 2$

Gráfico



Observe que, por conveniência, atribuímos a x somente valores que são potências de expoente inteiro da base, pois desse modo obtemos valores inteiros para o logaritmo.

No caso de tomarmos um valor qualquer para x, por exemplo, $x = 3{,}5$, ainda não sabemos o valor de $f(3{,}5) = \log_3 3{,}5$, mas sabemos **onde** está esse valor. Veja no gráfico que:

$$1 < \log_3 3{,}5 < 2$$

Observe também que, quanto mais o valor de x (positivo) "se aproxima de zero", mais os pontos do gráfico "se aproximam do eixo y", sem, porém, atingi-lo. Desse modo, a reta suporte do eixo y é **assíntota** à curva.

Exemplo 2

Vejamos a função definida por $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

Procedendo de maneira análoga à do exemplo 1, uma tabela de pontos pertencentes ao gráfico da função pode ser esta:

Tabela

x	y	Ponto (x, y)
$\frac{1}{9}$	2	$A\left(\frac{1}{9}, 2\right)$
$\frac{1}{3}$	1	$B\left(\frac{1}{3}, 1\right)$
1	0	$C(1, 0)$
3	−1	$D(3, -1)$
9	−2	$E(9, -2)$

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = y \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^y = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow y = 2$$

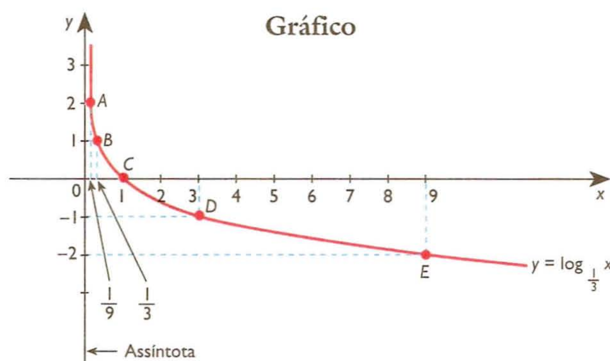
$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = y \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^y = \left(\frac{1}{3}\right)^1 \Rightarrow y = 1$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 1 = y \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^y = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^y = \left(\frac{1}{3}\right)^0 \Rightarrow y = 0$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 3 = y \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^y = 3 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \Rightarrow y = -1$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 9 = y \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^y = 9 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \Rightarrow y = -2$$

Gráfico



Os exemplos citados nos levam a classificar uma função definida por $y = \log_a x$ como:

- **crescente** quando $a > 1$
- **decrescente** quando $0 < a < 1$

Resumindo o estudo da função $y = \log_a x$, temos:

1) O domínio da função é $\mathbb{R}_+^*$, ou seja, somente os números positivos possuem logaritmo.
2) O conjunto imagem da função é $\mathbb{R}$, isto é, qualquer número real é logaritmo de algum número real positivo, em uma certa base.
3) O gráfico da função fica todo à direita do eixo y.
4) Se $x = 1 \Rightarrow y = \log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$, ou seja, o ponto $P(1, 0)$ pertence ao gráfico da função.
5) Em qualquer base o logaritmo de 1 é 0.
6) Se $x = a$(base), temos $y = \log_a a = 1$, pois $a^1 = a$, ou seja, o logaritmo da base é 1.
7) A função é injetora, pois, se $x_1 \neq x_2$, então $\log_a x_1 \neq \log_a x_2$.
8) A função é sobrejetora, pois para $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}_+^* \mid y = \log_a x$.
9) A função é bijetora, pois é ao mesmo tempo injetora e sobrejetora.
10) No caso de $a > 1$ a função é crescente, pois, se $x_1 > x_2$, então $\log_a x_1 > \log_a x_2$.
11) No caso de $0 < a < 1$ a função é decrescente, pois, se $x_1 > x_2$, então $\log_a x_1 < \log_a x_2$.

Observação: quando a base não estiver escrita, subentendemos que a base é 10, ou seja, $\log_{10} x$ é o mesmo que $\log x$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

53. Construa o gráfico das funções:

a) $f(x) = \log_2 x$ b) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ c) $y = 1 + \log_3 x$

54. Verifique quais funções são crescentes e quais são decrescentes:

a) $y = \log_4 x$ c) $f(x) = \log_{\sqrt{3}} x$ e) $y = \log_{\frac{\sqrt{5}}{2}} x$

b) $y = \log_{0,2} x$ d) $y = \log_{\frac{3}{5}} x$ f) $f(x) = \log_{3^{-1}} x$

55. Determine os valores reais de a tais que:

a) $y = \log_{(a-3)} x$ é crescente.
b) $y = \log_{(2-a)} x$ é crescente.
c) $y = \log_{(1-a^2)} x$ é decrescente.

56. Dada a função $f(x) = 2^{x+1}$, determine:

a) $f(9)$ b) $f(-1)$ c) o valor de x para que se tenha $f(x) = 128$

57. Determine k de modo que o ponto $(8, k)$ pertença ao gráfico da função $f(x) = 1 + \log_2 x$.

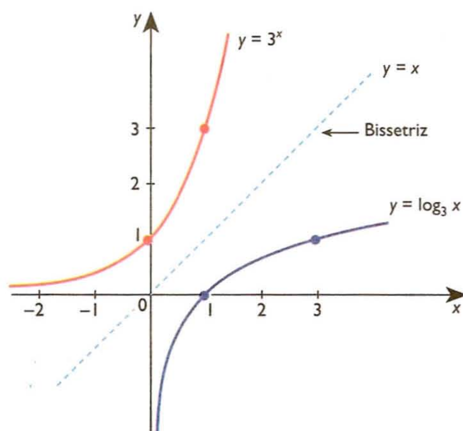
58. Identifique com V as sentenças verdadeiras e com F as falsas.

a) $\log_5 10 > \log_5 2$
b) $\log_{\frac{1}{5}} 10 > \log_{\frac{1}{5}} 2$
c) $\log_{\frac{1}{5}} 10 < \log_{\frac{1}{5}} 2$
d) $\log_3 \frac{1}{2} < \log_3 \frac{2}{3}$
e) $\log_{\frac{2}{3}} 5 > \log_{\frac{2}{3}} 1$
f) $\log_2 3 > 1$
g) $\log_{\frac{1}{2}} 128 > 0$
h) $\log_a 3 > \log_a 2 \quad (0 < a < 1)$

Observação: revendo os resumos feitos para a função exponencial e para a função logarítmica, notamos que ambas **são bijetoras** e portanto **possuem função inversa**.

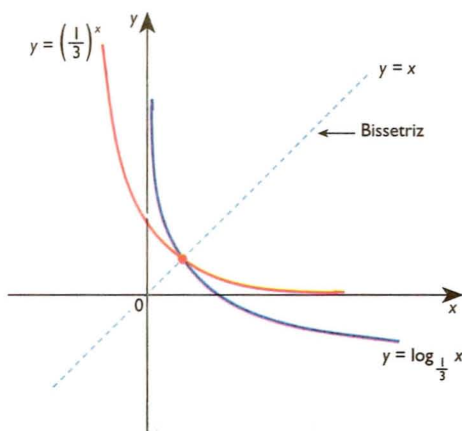
Representação gráfica das funções:

$$y = 3^x \text{ e } y = \log_3 x$$



Representação gráfica das funções:

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x \text{ e } y = \log_{\frac{1}{3}} x$$



Veja que, nos dois casos, os gráficos **são simétricos** em relação à bissetriz do 1º e do 3º quadrante.

Portanto $y = \log_3 x$ e $y = 3^x$ **são funções inversas**, o mesmo ocorrendo com $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ e $y = \log_{\frac{1}{3}} x$. Como os casos vistos envolvem os únicos tipos de bases possíveis, podemos concluir:

> As funções $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$ **são funções inversas.**

8. Domínio da função logarítmica

Lembrando que na função logarítmica **o logaritmando deve ser real e positivo** e a **base deve ser real, positiva e diferente de 1**, analisaremos alguns exemplos de determinação de domínio.

Exemplo 1

Achar o domínio da função definida por:

a) $y = \log_3 (12 - 5x)$

b) $y = \log_5 (x^2 + 8x + 15)$

Solução

a) $y = \log_3 (12 - 5x)$

Devemos ter: $12 - 5x > 0$

Então $-5x > -12 \Rightarrow 5x < 12 \Rightarrow x < \frac{12}{5}$.

Portanto o domínio é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{12}{5}\right\}$.

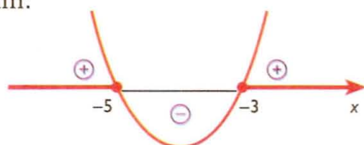
b) $y = \log_5 (x^2 + 8x + 15)$

Devemos ter: $x^2 + 8x + 15 > 0$

A fim de determinar os valores de x que tornam essa sentença verdadeira, vamos analisar a variação do sinal da função $f(x) = x^2 + 8x + 15$.

As raízes de $f(x)$ são determinadas resolvendo a equação $x^2 + 8x + 15 = 0$. Logo, as raízes são $x_1 = -5$ e $x_2 = -3$.

O sinal de $f(x)$ varia assim:



Como queremos $f(x) > 0$, a parte que nos interessa é:



Portanto o domínio da função $y = \log_5 (x^2 + 8x + 15)$ é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } x > -3\}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

59. Determine o domínio das funções definidas a seguir:

a) $f(x) = \log_3 (3x + 12)$
b) $y = \log (4 - 7x)$
c) $g(x) = \log_2 (-3x - 1)$
d) $h(x) = \log_8 \left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{3}\right)$
e) $y = \log (3x^2 - 4x - 4)$
f) $f(x) = \log_3 (x^2 + 4x)$
g) $h(x) = \log (-x^2 + 8)$
h) $g(x) = \log_5 (-x^2 + 6x - 8)$
i) $y = \log (x^2 - 6x + 9)$
j) $y = \log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 4)$

Exemplo 2

Determinar o domínio da função $y = \log_{(5x - 12)} 5$.

Solução

Devemos ter simultaneamente: $5x - 12 > 0$ (I) e $5x - 12 \neq 1$ (II)

(I) $5x - 12 > 0 \Rightarrow 5x > 12 \Rightarrow x > \dfrac{12}{5}$

(II) $5x - 12 \neq 1 \Rightarrow 5x \neq 13 \Rightarrow x \neq \dfrac{13}{5}$

Resumindo, temos:



O domínio é a intersecção de (I) e (II), ou seja: D = (I) ∩ (II). Então:

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{12}{5} < x < \frac{13}{5} \text{ ou } x > \frac{13}{5}\right\}$$

A resposta pode também ser dada assim: $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \dfrac{12}{5} \text{ e } x \neq \dfrac{13}{5}\right\}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

60. Determine o domínio de cada uma das funções:

a) $f(x) = \log_{(x - 3)} 10$
b) $g(x) = \log_{(3x + 5)} 3$
c) $\log_{(x - 3)} (5x - 12)$
d) $\log_{(x - 1)} (16 - x^2)$

Exemplo 3

Determinar o domínio da função definida por $y = \log_{(x^2 - 4)} (2x - 3)$.

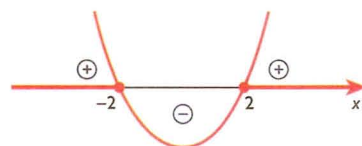
Solução

Devemos ter simultaneamente:

$$\boxed{x^2 - 4 > 0}_{\text{(I)}} \quad , \quad \boxed{x^2 - 4 \neq 1}_{\text{(II)}} \quad \text{e} \quad \boxed{2x - 3 > 0}_{\text{(III)}}$$

(I) $\underbrace{x^2 - 4}_{g(x)} > 0$

As raízes de $g(x)$ são -2 e 2.
O sinal da função $g(x)$ varia assim:



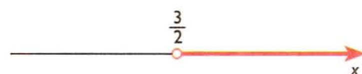
A solução de (I) é:



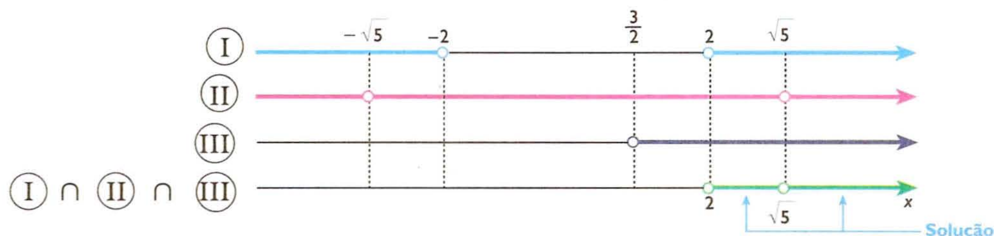
(II) $x^2 - 4 \neq 1 \Rightarrow x^2 \neq 5 \Rightarrow x \neq -\sqrt{5}$ e $x \neq \sqrt{5}$, ou seja:



(III) $2x - 3 > 0 \Rightarrow 2x > 3 \Rightarrow x > \dfrac{3}{2}$, ou seja:



Achando a intersecção de (I), (II) e (III), temos:



O domínio é, portanto, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2 \text{ e } x \neq \sqrt{5}\}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

61. Dê o domínio das seguintes funções logarítmicas:

a) $y = \log_{(x^2 - 9)} (x^2 - 3x - 10)$

b) $y = \log_{(-x^2 + 2x)} (x^2 - 1)$

9. Inequações logarítmicas

Do mesmo modo que ocorrem equações logarítmicas, ocorrem também inequações com logaritmos, às quais chamamos **inequações logarítmicas**.

São exemplos de inequações logarítmicas:

a) $\log_2 (x - 3) - 2 \log_2 (x + 1) < 1$

b) $\log_4 (x^2 - 1) \geq 2$

Ao estudarmos as inequações logarítmicas, devemos ter cuidados especiais com as restrições a que deve estar submetida a incógnita.

Na resolução das inequações, procuraremos obter logaritmos de mesma base nos dois membros. A partir disso, trabalharemos apenas com os logaritmandos, usando o fato de a função ser crescente ou decrescente, conforme mostram os exemplos seguintes.

Exemplo 1

Resolver as inequações:

a) $\log_3 (2 - 5x) \leq 1$

b) $\log_{\frac{1}{3}} (2 - 5x) \leq 1$

Solução

a) $\log_3 (2 - 5x) \leq 1$

Restrição: $\boxed{2 - 5x > 0} \Rightarrow -5x > -2 \Rightarrow 5x < 2 \Rightarrow \boxed{x < \frac{2}{5}}$ (I)

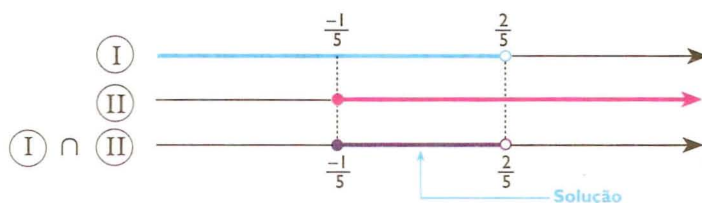
Temos: $\log_3 (2 - 5x) \leq 1 \Rightarrow \log_3 (2 - 5x) \leq \log_3 3$.

Iguais

O sinal da desigualdade será mantido para os logaritmandos, porque a base é maior que um, e nessas condições a função é crescente. Então:

$2 - 5x \leq 3 \Rightarrow -5x \leq 3 - 2 \Rightarrow -5x \leq 1 \Rightarrow 5x \geq -1 \Rightarrow \boxed{x \geq \frac{-1}{5}}$ (II)

Resumindo, temos:



O conjunto solução é $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{-1}{5} \leq x < \frac{2}{5}\right\}$.

b) $\log_{\frac{1}{3}} (2 - 5x) \leq 1$

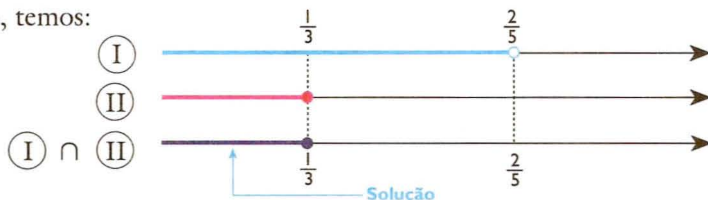
A restrição é a mesma determinada no item a, ou seja, $x < \dfrac{2}{5}$ (I).

Temos que: $\log_{\frac{1}{3}} (2 - 5x) \leq \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{3}$.

O sinal da desigualdade será invertido para os logaritmandos, porque a base é um número entre 0 e 1, e nessas condições a função é decrescente. Então:

$2 - 5x \geq \dfrac{1}{3} \Rightarrow 6 - 15x \geq 1 \Rightarrow 15x - 6 \leq -1 \Rightarrow 15x \leq 5 \Rightarrow x \leq \dfrac{1}{3}$ (II).

Resumindo, temos:



O conjunto solução é $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \dfrac{1}{3}\right\}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

62. Resolva as inequações:

a) $\log_5 (2x - 3) > 2$

b) $\log_4 (65 - 3x) < 3$

c) $\log_2 \left(\dfrac{2x}{3} - \dfrac{5}{8}\right) \geq -3$

d) $\log (1 - 2x) \leq 2$

e) $\log_{\frac{1}{2}} (x + 3) > -2$

f) $\log_{\frac{1}{5}} (4 - 3x) < 1$

63. Determine o domínio da função definida por $y = \sqrt{1 - \log (x - 2)}$.

Exemplo 2

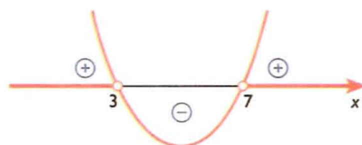
Resolver a inequação $\log_2 (x^2 - 10x + 21) \geq 1 + \log_2 (x - 3)$.

Solução

Devemos considerar as seguintes restrições:

a) $\underbrace{x^2 - 10x + 21}_{f(x)} > 0$

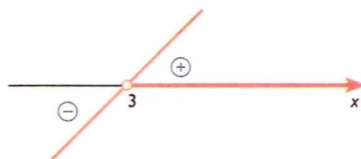
As raízes de $f(x) = x^2 - 10x + 21$ são 3 e 7.
O sinal de $f(x)$ varia assim:



então devemos ter: $x < 3$ ou $x > 7$ (I)

b) $\underbrace{x - 3}_{g(x)} > 0$

A raiz de $g(x) = x - 3$ é 3.
O sinal de $g(x)$ varia assim:



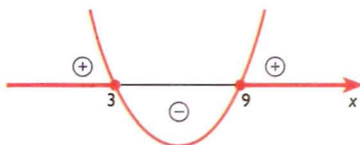
então devemos ter: $x > 3$ (II)

Como $1 = \log_2 2$, voltando à inequação dada, temos:

$$\log_2 (x^2 - 10x + 21) \geqslant \log_2 2 + \log_2 (x - 3) \Rightarrow \log_2 (x^2 - 10x + 21) \geqslant \log_2 (2x - 6) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 - 10x + 21) \geqslant (2x - 6) \Rightarrow \underbrace{x^2 - 12x + 27}_{h(x)} \geqslant 0$$

As raízes de $h(x) = x^2 - 12x + 27$ são 3 e 9.
O sinal de $h(x)$ varia assim:



Dessa forma, devemos ter: $x \leqslant 3$ ou $x \geqslant 9$ (III)

Compondo as condições (I), (II) e (III), temos:



O conjunto solução é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 9\}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

64. Resolva as inequações:

a) $\log_2 (x^2 + 3x) < 2$ b) $\log_{0,25} x^2 > -2$ c) $\log_{\frac{1}{3}} (2x^2 - 5x) \geqslant -1$

65. Determine os valores reais de x que tornem verdadeiras as sentenças:

a) $\log (2x + 4) \leqslant 1 + \log (4 - x)$ b) $\log_{\frac{1}{2}} (x + 3) + \log_{\frac{1}{2}} (x - 2) \leqslant \log_{\frac{1}{2}} (9 - x)$

66. Transforme os logaritmos para uma mesma base, e em seguida resolva as inequações:

a) $\log_5 x \geqslant \log_{25} (2x + 35)$ b) $\log_3 (x - 1) \geqslant \log_9 (x - 7) + \frac{3}{2}$

RELEMBRANDO CONCEITOS

Sendo a, b e c reais positivos, com $a \neq 1$ e m real, tem-se:

Definição de logaritmo

$\log_a b = x \iff b = a^x$

$\log_a 1 = 0$ e $\log_a a = 1$

Mudança de base (para $c \neq 1$)

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Propriedades

a) $a^{\log_a b} = b$

b) $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

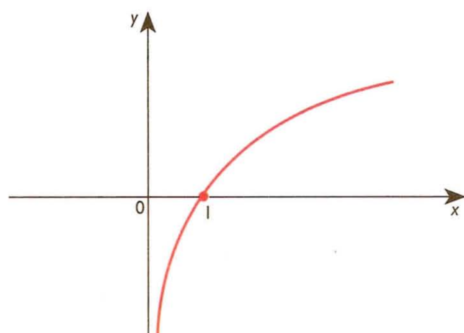
c) $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

d) $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$

A **função logarítmica** é definida de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ por $y = \log_a x$.
É injetora e sobrejetora, e portanto bijetora.
O ponto $P(1, 0)$ pertence ao gráfico da função.

Caso de a base ser maior que 1

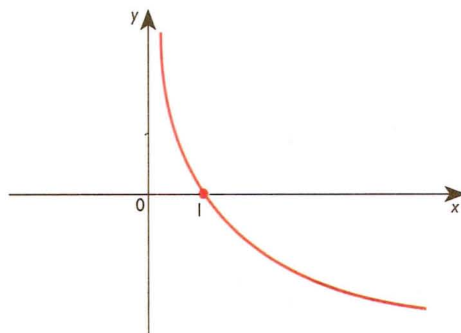
$a > 1$



A função é crescente.

Caso de a base estar entre 0 e 1

$0 < a < 1$



A função é decrescente.

Para resolver **equações logarítmicas** procure, se possível, transformar cada membro em logaritmos de mesma base e, lembrando que a função é injetora, trabalhe somente com os logaritmandos.

Para resolver **inequações logarítmicas** procure, se possível, transformar cada membro em logaritmos de mesma base e trabalhe somente com os logaritmandos:

a) mantendo para eles o mesmo sinal da inequação quando a base for maior que um, pois a função é crescente;

b) invertendo para eles o sinal da inequação quando a base estiver entre 0 e 1, pois a função é decrescente.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

67. Calcule:

a) log 100 b) log 10 c) log 1 d) log 0,1 e) log 0,01

68. Calcule x nos seguintes casos:

a) $\log x = 3$
b) $\log (x - 2) = -2$
c) $\log_x 256 = 2$
d) $\log_{(2x-3)} 125 = 3$
e) $\log_{\frac{16}{9}} x = -\frac{1}{2}$
f) $\log_{\sqrt{3}} (x^2 + 7x - 15) = 2$

69. Lembrando que $a^{\log_a b} = b$, calcule o valor das expressões:

a) $3^{\log_3 10}$
b) $8^{2 + \log_8 2}$
c) $10^{4 - \log 400}$
d) $7^{\log_7 3 \cdot \log_3 2}$

70. Resolva a equação $5 \log_5 (x^2 - 24) = 2x$.

71. Determine o domínio das funções:

a) $f(x) = \log_4 (-3x + 12)$
b) $f(x) = \log_x \left(x - \frac{1}{2}\right)$
c) $y = \log (3x^2 - 7x + 2)$
d) $y = \log_{(6-x)} (x^2 - 7x + 12)$

72. Dados $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$, determine:

a) $\log 72$
b) $\log 5{,}4$
c) $\log 5$
d) $\log \frac{32}{243}$
e) $\log_8 27$

73. Se $\log x = a$ e $\log 2 = b$, calcule:

a) $\log \sqrt{8}\, x$
b) $\log 5$
c) $\log 6{,}25$
d) $\log_x 10$
e) $\log_2 x$

74. Calcule o valor da soma $\log_9 3 + \log_3 9$.

75. Sabendo que $\frac{1}{\log_x 2} + \frac{1}{\log_y 2} + \frac{1}{\log_z 2} = 3$, calcule o valor do produto xyz.

76. Resolva as equações:

a) $\log_2 (2x - 2) - \log_2 (x - 8) = 5$
b) $\log_3 (x^2 + 5x + 15) - \log_3 (x + 3) = 2$
c) $\log [\log (3x - 5)] = 0$
d) $\log_2 (2x + 10) - \log_4 (x + 1) = 3$
e) $\log_2 x = 1 + \log_4 (x - 1)$
f) $2 \log (x - 3) = \log (x + 6) + \log (x - 5)$

77. Resolva as inequações logarítmicas:

a) $\log_2 (3x - 2) < 4$
b) $\log_3 \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right) \geqslant -2$
c) $\log_{\frac{1}{5}} (x^2 + 4x) \leqslant -1$
d) $\log_4 (x + 3) + \log_4 (x - 9) > 3$
e) $\log_5 x > \log_{25} (2x + 35)$
f) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 2x - 48) - \log_{\frac{1}{2}} (x - 8) \geqslant -4$

78. (Unifor-CE) Qual é o valor de $[\log_5 (25 \log_2 32)]^3$?

79. (Esal-MG) Determine os valores (x, y) que são soluções do sistema $\begin{cases} 3^{x+y} = 81 \\ \log_3 x + \log_3 y = 1 \end{cases}$

80. (E. E. Mauá-SP) Determinar o intervalo em que a função $f(x) = \sqrt{\log_2 \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)}$ é definida.

81. (F. M. Itajubá-MG) Seja a equação $\log_2 x + a \cdot \log_x 2 = 2$.

a) Para quais valores de a ela admite solução real em x?
b) Determine o valor de a e de x para que ela admita uma única solução em x.

82. (Fuvest-SP) Resolva $\log_{10} x + 2 \cdot \log_x 10 = 3$.

83. (UFPE) Sejam a e b números reais positivos, tais que $\frac{1}{2} \log_2 a - 2 \log_2 b = 2$. Determine o valor da razão $\frac{\sqrt{a}}{b^2}$.

84. (UFSC) Sabendo que $\log a = 6 \log b$, $2 \log b = \log c$ e que $\log c = 45$, calcule o valor numérico de y na expressão $y = \log \sqrt[5]{\frac{a^3 \cdot b^4}{c^2}}$.

85. (Faap-SP) Na igualdade $\left[\log_a \frac{x}{y} + \log_a (xy) - \log_a x\right]^2 = z$, sabe-se que a, x e $y \in \mathbb{R}^*$, com $a \neq 1$ e $z \in \mathbb{R}^*$. Qual a relação que existe entre as variáveis x e a?

86. (Fuvest-SP) Determine o conjunto das soluções da equação $\log_2 (x^2 - 1) = \log_{(x^2 - 1)} 2$.

87. (Fuvest-SP) É dada a função f definida por $f(x) = \log_2 x - \log_4 (x - 3)$.

a) Determine os valores de x para os quais $f(x) \leqslant 2$.
b) Determine os valores de x para os quais $f(x) > 2$.

TESTES

88. (F. C. Contábeis) Sendo $xy = 1\,000$ e $\log x = 1 + \log y$, então $x + y$ é igual a:

a) 10 b) 100 c) 110 d) 1 000 e) 1 100

89. (UFRS) O valor de log (217,2) − log (21,72) é:

a) −1
b) 0
c) 1
d) log (217,2 − 21,72)
e) $\frac{\log (217,2)}{\log (21,72)}$

90. (UECE) Seja p um número real maior do que 1. Se $\log_3 (p^2) = 5 + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{p}$, então $\log_2 (p + 13)$ é igual a:

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9

91. (FEI-SP) Se $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, escrevendo $\log \frac{32}{27}$ em função de a e b obtemos:

a) $2a + b$ b) $2a - b$ c) $2ab$ d) $\frac{2a}{b}$ e) $5a - 3b$

92. (Unisinos-RS) Se $\log_x 25 = -2$, então $\log_5 x$ é igual a:

a) −2 b) −1 c) 1 d) 2 e) 4

93. (Fesp-SP) Se $\log_{14} 7 = x$ e $\log_{14} 5 = y$, a expressão de $\log_{35} 28$ é:

a) $\frac{(x + y)}{x}$
b) $\frac{(x + 2)}{(x + y)}$
c) $\frac{(3 + y)}{y}$
d) $\frac{(2 - x)}{(x + y)}$
e) $\frac{2x}{(x - y)}$

94. (Fuvest-SP) Sabendo-se que $5^p = 2$, podemos concluir que $\log_2 100$ é igual a:

a) $\frac{2}{p}$

b) $2p$

c) $2 + p^2$

d) $2 + 2p$

e) $\frac{2 + 2p}{p}$

95. (Osec-SP) Se $\log_4 x^3 = 2$, então $\log_8 x^2$ é:

a) 4 b) 2 c) $\frac{4}{3}$ d) 1 e) $\frac{8}{9}$

96. (U. Católica de Salvador-BA) A expressão $\log \frac{2}{3} + \log \frac{3}{4} + \log \frac{4}{5} - \log \frac{14}{55}$ é equivalente a:

a) log 77 b) log 18 c) log 7 d) log 4 e) $\log \frac{11}{7}$

97. (PUC-PR) Sabendo que $\log_A E = 2$, $\log_B E = 4$, $\log_C E = 6$ e $\log_D E = 8$, pede-se que seja determinado o valor real positivo $y = [\log_E (A \cdot B \cdot C \cdot D)]^{-\frac{1}{2}}$.

a) $\frac{5\sqrt{2}}{6}$

b) $\frac{6\sqrt{5}}{7}$

c) $\frac{5\sqrt{2}}{5}$

d) $\frac{5\sqrt{6}}{2}$

e) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$

98. (Osec-SP) Sejam x e y números reais positivos tais que:

$$\begin{cases} \log_{(x+y)} 16 = 2 \\ 9^x - 6 \cdot 3^x + 9 = 0 \end{cases}$$

Então os valores de x e y, nessa ordem, são:

a) 1 e 2

b) 2 e 3

c) 1 e 3

d) 4 e zero

e) 5 e −1

99. (Unifor-CE) No universo $\mathbb{R}^*$, a equação $\sqrt{\log_2 x} = \log_2 \sqrt{x}$:

a) possui uma única solução no intervalo]0, 1[.
b) possui uma única solução no intervalo]0, 20[.
c) possui duas soluções no intervalo]2, 10[.
d) possui duas soluções no intervalo [1, 20[.
e) não possui soluções reais.

100. (PUC-MG) A raiz da equação $\log_2 x + \log_4 x = 1$ é igual a:

a) 2 b) $\sqrt[3]{2}$ c) $\sqrt[3]{4}$ d) $2\sqrt[3]{4}$ e) $3\sqrt[3]{2}$

101. (Mackenzie-SP) O produto das raízes da equação $(4 + \log_3 x) \cdot (4 - \log_3 x) = 12$ é:

a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{1}{3}$ c) 1 d) 3 e) 9

102. (FEI-SP) A equação $\log_3 x = 1 + \log_x 9$ tem duas raízes reais. O produto dessas raízes é:

a) 0 b) $\frac{1}{3}$ c) 9 d) 6 e) 3

103. (EsPECEx) O conjunto solução da equação $\log_x [\log_2 4 \cdot \log_4 6 \cdot \log_6 8] = 2$ é:

a) $\varnothing$
b) $\{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$
c) $\{\sqrt{3}\}$
d) $\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

104. (Fuvest-SP) O número real x que satisfaz a equação $\log_2 (12 - 2^x) = 2x$ é:

a) $\log_2 5$
b) $\log_2 \sqrt{3}$
c) 2
d) $\log_2 \sqrt{5}$
e) $\log_2 3$

105. (Mackenzie-SP) Se a e b são números reais positivos tais que $a^2 + b^2 = 7ab$, $\log a = k$ e $\log b = p$, então $\log \dfrac{a + b}{3}$ vale:

a) $2(k + p)$
b) $3(k + p)$
c) $\dfrac{k + p}{7}$
d) $\dfrac{k + p}{3}$
e) $\dfrac{k + p}{2}$

106. (Osec-SP) Se $\log_2 (2 - \sqrt{2}) = a$, então $\log_2 (2 + \sqrt{2})$ é igual a:

a) $\dfrac{3}{2}$
b) $1 - a$
c) $1 + a$
d) $\dfrac{1}{2}$
e) $2 - a$

107. (Unirio) Os valores reais de x para os quais $10^{\log_a (x^2 - 3x + 2)} = 6^{\log_a 10}$, em que $a > 0$ e $a \neq 1$, são:

a) 4 e 1
b) −4 e 1
c) 4 e −1
d) 4 e 0
e) −4 e −1

108. (Vunesp) Considere a função f definida por $f(x) = \log_a x$. Se $f(a) = b$ e $f(a + 2) = b + 1$, os valores respectivos de a e b são:

a) 2 e 1
b) 2 e 2
c) 3 e 1
d) 3 e 2
e) 4 e 1

109. (Mackenzie-SP) Assinale o intervalo que **não** está contido no conjunto solução da inequação $\log_{(2^{x-1} - 1)} 5 < \log_{(2^{x-1} - 1)} 2$:

a) $\left[\dfrac{7}{4}, \dfrac{9}{4}\right[$
b) $\left]1, \dfrac{5}{4}\right]$
c) $\left[\dfrac{5}{4}, \dfrac{3}{2}\right[$
d) $]1, 2[$
e) $\left[\dfrac{7}{4}, 2\right[$

Capítulo

9 Cálculo e aplicações dos logaritmos decimais

1. Introdução

No capítulo anterior estudamos a função logarítmica e aprendemos a resolver algumas equações e inequações logarítmicas.

Muitas vezes, depois disso tudo, fica na cabeça de alguns alunos uma indagação:



Porque, à primeira vista, a impressão que se tem é de que eles não se prestam a nenhuma aplicação prática.

Pois bem, os alunos que assim pensam estão completamente enganados.

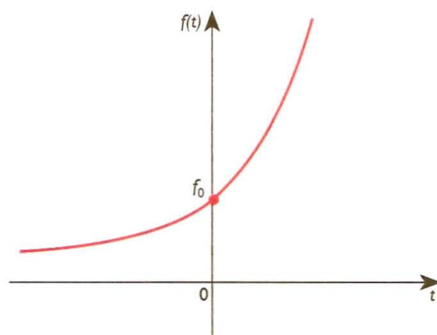
Acompanhe com atenção as situações a seguir.

Quando uma função se expressa na forma:

$$f(t) = f_0 \cdot e^{k \cdot t},$$

em que f_0 é uma constante positiva correspondente a um valor inicial, e é a base do sistema neperiano de logaritmos e k é uma constante positiva, dizemos que essa função tem um crescimento exponencial.

O gráfico ao lado ilustra uma função desse tipo.



Se necessitarmos determinar o valor de t para uma certa condição dada, o uso dos logaritmos resolverá nosso problema.

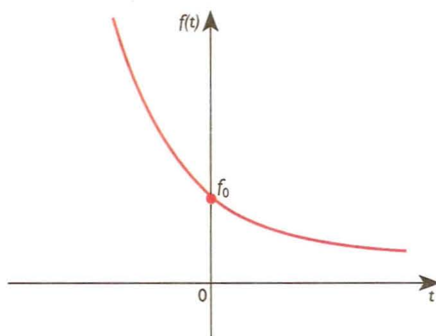
Por exemplo, o crescimento de uma população humana ou de uma população de bactérias etc. obedece a uma lei do tipo descrito anteriormente, desde que não haja interferência externa sobre o processo.

Mais adiante trabalharemos com uma situação desse tipo.

Quando uma função se expressa na forma:

$$f(t) = f_0 \cdot e^{-k \cdot t},$$

em que f_0 é uma constante positiva correspondente a um valor inicial, e é a base do sistema neperiano de logaritmos e k é uma constante positiva, dizemos que essa função tem um decrescimento exponencial.

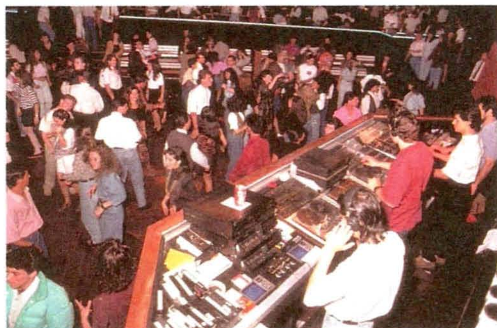


O gráfico ao lado ilustra uma função desse tipo.

A desintegração de substâncias radioativas obedece a uma lei como essa. Se quisermos calcular, por exemplo, em quanto tempo a quantidade de uma substância radioativa estará reduzida à metade, teremos de lançar mão dos logaritmos.

Vejamos mais uma aplicação.

Numa danceteria existem dois aparelhos de som de mesma potência. Quando o aparelho A foi ligado no máximo, mediu-se o *NIS* (Nível de Intensidade Sonora), dado por 80 dB (decibel). Determinar o número de decibels que se obtém no caso de o aparelho B também ser ligado no máximo, sabendo que o *NIS* é dado em decibels por:


Joel Rocha/Abril Imagens

$$NIS = 10 \cdot \log \frac{IS}{IR},$$

em que *IS* é a intensidade sonora e *IR* é o índice unitário (em watt por cm^2).

Note que a fórmula para encontrar a solução procurada envolve logaritmos. Esse problema será resolvido no final deste capítulo.

Quer mais? Pois vamos lá.

Quando você deixa uma importância C numa caderneta de poupança a uma taxa de 5% ao mês, o total de dinheiro existente após t meses de aplicação é dado por:

$$P(t) = C \cdot (1{,}05)^t$$

Se desejarmos saber o valor de t para uma certa condição dada, devemos utilizar logaritmos para calculá-lo. Aguarde que mais à frente também trabalharemos com um exemplo desse tipo.

Você viu amostras de algumas situações de natureza totalmente diferente que são descritas por funções que envolvem logaritmos nos seus cálculos. E existem tantas outras!

Acreditamos que agora você esteja convencido da importância dos logaritmos em nossa vida. Por isso vamos aprender a operar com eles e finalmente resolver alguns problemas de aplicação.

2. Calculadora científica ou tábua de logaritmos?

Em todas as equações e inequações logarítmicas vistas até agora, conseguimos obter bases iguais nos dois membros. No entanto isso nem sempre é possível. Para podermos resolver problemas nos quais não se possa igualar as bases, aprenderemos a efetuar cálculos com logaritmos.

Dois são os problemas a serem estudados:

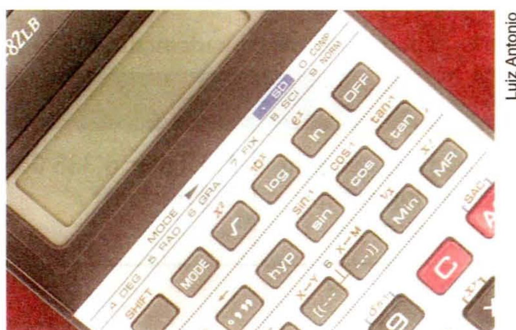
a) dado um número positivo, achar seu logaritmo;

b) dado o logaritmo de um número, achar o número.

De um modo geral, as calculadoras científicas fornecem os logaritmos tanto na base **10** como na base *e*. Entretanto os nomes das teclas que fazem esses cálculos dependem da marca e tipo da calculadora. Assim, por exemplo, em certas calculadoras você encontrará as teclas:

log para calcular o **logaritmo decimal** de um número positivo que esteja no visor;
$\mathbf{10^x}$ para achar o número cujo **logaritmo decimal** esteja mostrado no visor;

ln para achar o **logaritmo neperiano** de um número positivo que esteja no visor;
e^x para achar o número cujo **logaritmo neperiano** esteja mostrado no visor.



Luiz Antonio

Em outras, você terá que digitar por exemplo a palavra **log**, seguida da digitação do número e da ordem de executar a operação, para obter o logaritmo decimal desse número.

Existem ainda calculadoras nas quais você encontrará outros tipos de teclas. É conveniente então, se você tem uma calculadora científica, verificar no manual de instruções quais teclas deverão ser utilizadas nos cálculos.

Imaginando que nossa calculadora seja a do primeiro tipo citado, vamos por exemplo calcular:

a) o logaritmo decimal do número 253;

b) o logaritmo neperiano desse mesmo número;

c) o número cujo logaritmo decimal é aproximadamente 1,301 03;

d) o número cujo logaritmo neperiano é aproximadamente 6,335 055.

Solução

a) o logaritmo decimal do número 253

Dado	Calcular	Etapas	Resultado
Número 253.	O logaritmo decimal do número 253.	1. Digitar 253. 2. Pressionar log.	Aproximadamente 2,403 12.

Isso significa que $10^{2,403\,12} \simeq 253$.

b) o logaritmo neperiano do número 253

Dado	Calcular	Etapas	Resultado
Número 253.	O logaritmo neperiano do número 253.	1. Digitar 253. 2. Pressionar ln.	Aproximadamente 5,533 39.

c) o número cujo logaritmo decimal é aproximadamente 1,301 03

Dado	Calcular	Etapas	Resultado
O logaritmo decimal de um número é $\simeq$ 1,301 03.	O número que tem esse logaritmo decimal.	1. Digitar 1,301 03. 2. Pressionar 10^x.	Aproximadamente 20.

d) o número cujo logaritmo neperiano é aproximadamente 6,335 055

Dado	Calcular	Etapas	Resultado
O logaritmo neperiano de um número é $\simeq$ 6,335 055.	O número que tem esse logaritmo neperiano.	1. Digitar 6,335 055. 2. Pressionar e^x.	Aproximadamente 564.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

(Apenas para o caso de você possuir uma calculadora científica.)

1. Calcule os logaritmos decimais dos números:

a) 286 b) 3 645 c) 105,76 d) 0,867

2. Calcule os logaritmos neperianos dos números dados no exercício 1.

3. Calcule os números cujos logaritmos decimais são, aproximadamente:

a) 2,943 99 b) 1,818 23 c) 0,968 06 d) −0,057 49

4. Determine os números cujos logaritmos neperianos são, aproximadamente:

a) 7,520 77 b) 3,648 06 c) 2,833 21 d) 6,907 76

Bem, você viu que é "moleza" efetuar cálculos logarítmicos **quando se utiliza uma calculadora científica**. Mas quando não temos esse recurso em mãos, os cálculos são um pouco trabalhosos.

Veremos somente como operar com logaritmos decimais. Caso seja necessário utilizar outra base qualquer, vamos "passá-la" para a base 10 usando a lei de mudança de base:

$$\log_a x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} a}$$

Característica e mantissa dos logaritmos decimais

Ao calcularmos o logaritmo decimal de um número positivo n, temos dois casos possíveis:

- n é uma potência de base 10 com expoente inteiro;
- n não é uma potência de base 10 com expoente inteiro.

Analisaremos separadamente essas duas situações.

- n é uma potência de base 10 com expoente inteiro

Nessas condições, n pode ser escrito assim: $n = 10^c$, com $c \in \mathbb{Z}$.
Dessa forma, temos:

$$\log n = \log 10^c = c \cdot \log 10 = c \cdot 1 \Rightarrow \mathbf{\log n = c}$$

O resultado deu um número inteiro!

Exemplo 1

Calcular os logaritmos decimais dos seguintes números:

a) 100 b) 0,001 c) 10 000 d) 1

Solução

a) $\log 100 = \log 10^2 = 2 \cdot \log 10 = 2 \cdot 1 \Rightarrow \log 100 = 2$

b) $\log 0{,}001 = \log 10^{-3} = -3 \cdot \log 10 = -3 \cdot 1 \Rightarrow \log 0{,}001 = -3$

c) $\log 10\,000 = \log 10^4 = 4 \cdot \log 10 = 4 \cdot 1 \Rightarrow \log 10\,000 = 4$

d) $\log 1 = \log 10^0 = 0 \cdot \log 10 = 0 \cdot 1 \Rightarrow \log 1 = 0$

É importante destacar que:

> Somente os números que são potência de expoente inteiro da base 10 possuem logaritmos inteiros.

EXERCÍCIO PROPOSTO

5. Ache o logaritmo decimal de x nos casos:

a) $x = 1\,000$ b) $x = 0{,}01$ c) $x = 1\,000\,000$ d) $x = 0{,}000\,1$

- n não é potência de base 10 com expoente inteiro

Nessas condições, podemos sempre notar que n está entre duas potências em que a base é 10 e os expoentes são números consecutivos, ou seja:

$$10^c < n < 10^{c+1}, \text{ em que } c \text{ é inteiro} \quad \text{(I)}$$

Assim, por exemplo, se $n = 548$, temos que: $10^2 < 548 < 10^3$.

Voltando em (I), pelo fato de a função logarítmica ser crescente quando a base é maior que 1, temos que:

$$\log 10^c < \log n < \log 10^{c+1}, \text{ ou seja:}$$

$$c \cdot \log 10 < \log n < (c + 1) \cdot \log 10 \Rightarrow c < \log n < c + 1$$

Dessa forma concluímos que o logaritmo decimal de n "está entre c e $c + 1$", ou seja, o logaritmo decimal de n "é c vírgula alguma coisa". Assim:

$$\log n = c, \ldots \text{ ou ainda } \log n = c + 0, \ldots$$

Ao número inteiro c chamamos **característica** do logaritmo decimal de n e à parte decimal 0, ... damos o nome de **mantissa** do logaritmo decimal de n (mantissa significa sobra, excedente).

A mantissa do logaritmo decimal de um número é encontrada numa tabela chamada **tábua de logaritmos**, apresentada nas páginas 205 a 208.

Vamos como exercício encontrar a característica do logaritmo decimal do número n nos seguintes casos:

a) $n = 134$ b) $n = 2\,456$ c) $n = 0{,}4$ d) $n = 0{,}03$ e) $n = 8{,}2$ f) $n = 0{,}006\,7$

Solução

a) $n = 134$

Como $100 < 134 < 1\,000$, ou seja, $10^2 < 134 < 10^3$, então:
$\log 10^2 < \log 134 < \log 10^3$ portanto $2 < \log 134 < 3$.
Assim, $\log 134 = 2 + 0, \ldots$ portanto a característica do logaritmo é 2.

b) $n = 2\,456$

Como $1\,000 < 2\,456 < 10\,000$, ou seja, $10^3 < 2\,456 < 10^4$, então:
$\log 10^3 < \log 2\,456 < \log 10^4$ portanto $3 < \log 2\,456 < 4$.
Assim, $\log 2\,456 = 3 + 0, \ldots$ portanto a característica do logaritmo é 3.

c) $n = 0{,}4$

Como $0{,}1 < 0{,}4 < 1$, ou seja, $10^{-1} < 0{,}4 < 10^0$, então:
$\log 10^{-1} < \log 0{,}4 < \log 10^0$ portanto $-1 < \log 0{,}4 < 0$.
Assim, $\log 0{,}4 = -1 + 0, \ldots$ portanto a característica do logaritmo é -1.

d) $n = 0{,}03$

Como $0{,}01 < 0{,}03 < 0{,}1$, ou seja, $10^{-2} < 0{,}03 < 10^{-1}$, então:
$\log 10^{-2} < \log 0{,}03 < \log 10^{-1}$ portanto $-2 < \log 0{,}03 < -1$.
Assim, $\log 0{,}03 = -2 + 0, \ldots$ portanto a característica do logaritmo é -2.

e) $n = 8{,}2$

Como $1 < 8{,}2 < 10$, ou seja, $10^0 < 8{,}2 < 10^1$, então:
$\log 10^0 < \log 8{,}2 < \log 10^1$ portanto $0 < \log 8{,}2 < 1$.
Assim, $\log 8{,}2 = 0 + 0, \ldots$ portanto a característica do logaritmo é 0.

f) $n = 0{,}006\,7$

Como $0{,}001 < 0{,}006\,7 < 0{,}01$, ou seja, $10^{-3} < 0{,}006\,7 < 10^{-2}$, então:
$\log 10^{-3} < \log 0{,}006\,7 < \log 10^{-2}$ portanto $-3 < \log 0{,}006\,7 < -2$.

Assim, $\log 0{,}006\,7 = -3 + 0, \ldots$ portanto a característica do logaritmo é -3.

Vamos fazer um resumo para esses exercícios:

Casos em que o número era maior que 1	Número de algarismos da parte inteira	Característica encontrada
134	3	2
2 456	4	3
8,2	1	0

Observe que, nos casos onde o número era **maior que 1**, a característica deu o **número de algarismos da parte inteira, menos uma unidade**.
Guarde bem essa regra, pois isso ocorre sempre!

Casos em que o número estava entre 0 e 1	Total de zeros iniciais	Característica encontrada
0,4	1	−1
0,03	2	−2
0,006 7	3	−3

Observe que, nos casos onde o número estava **entre 0 e 1**, a característica deu exatamente **o número de zeros iniciais, com o sinal trocado**.
Guarde bem essa regra, pois isso ocorre sempre!

EXERCÍCIO PROPOSTO

6. Encontre a característica do logaritmo decimal dos números:

a) 54 b) 0,076 c) 875,34 d) 8 500 e) 0,768

Antes de aprendermos a encontrar as mantissas, vamos entender uma propriedade muito importante.

Imagine que o logaritmo decimal de N seja $c + m$, em que c é a característica e m é a mantissa (um número entre 0 e 1), ou seja:

$$\log N = \underbrace{c}_{\text{Característica}} + \underbrace{0, \ldots}_{\text{Mantissa}}$$

e desejamos encontrar o logaritmo decimal do produto de N por uma potência de base 10 e expoente inteiro, isto é, queremos calcular:

$$\log (N \cdot 10^k),$$

em que k é um número inteiro.

Temos:

$$\log (N \cdot 10^k) = \log N + \log 10^k = \log N + k \cdot \log 10 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log (N \cdot 10^k) = k + \log N = k + (c + 0, \ldots)$$

Então o logaritmo do produto de N por uma potência de base 10 e expoente inteiro é igual a:

$$\log (N \cdot 10^k) = \underbrace{(k + c)}_{\text{Característica}} + \underbrace{0, \ldots}_{\text{Mantissa}}$$

e portanto **tem a mesma mantissa do logaritmo decimal de N.**

Vamos guardar bem esta propriedade:

Os logaritmos decimais de N e de $N \cdot 10^k$, em que k é inteiro, **possuem a mesma mantissa.**

Assim, por exemplo, os logaritmos decimais dos números 345; 3 450; 0,345; 3,450; 34,5 possuem a mesma mantissa.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. Quais dos números seguintes apresentam a mesma mantissa em seus logaritmos decimais?

a) 54,56 b) 54,65 c) 0,545 d) 5,456 e) 545,6

8. Sabendo que log 35 = 1,544 068, determine:

a) log 3,5 b) log 350 c) log 3 500 d) log 0,35

Tábua de logaritmos

Agora que já sabemos encontrar a característica do logaritmo decimal de qualquer número e fixamos uma importante propriedade a respeito das mantissas, vamos conhecer a **tábua de logaritmos**, que poderia ser chamada **tábua de mantissas**, pois que nela aparecem apenas as mantissas dos logaritmos decimais.

A tábua a seguir apresenta as mantissas, com seis "casas" depois da vírgula, dos logaritmos decimais dos números inteiros de 1 até 1 000.

n	mantissa	*n*	mantissa	*n*	mantissa	*n*	mantissa	*n*	mantissa
	0, ...		0, ...		0, ...		0, ...		0, ...
0		**50**	**698 970**	**100**	**000 000**	**150**	**176 091**	**200**	**301 030**
1	000 000	51	707 570	101	004 321	151	178 977	201	303 196
2	301 030	52	716 003	102	008 600	152	181 844	202	305 351
3	477 121	53	724 276	103	012 837	153	184 691	203	307 496
4	602 060	54	732 394	104	017 033	154	187 521	204	309 630
5	698 970	55	740 363	105	021 189	155	190 332	205	311 754
6	778 151	56	748 188	106	025 306	156	193 125	206	313 867
7	845 098	57	755 875	107	029 384	157	195 900	207	315 970
8	903 090	58	763 428	108	033 424	158	198 657	208	318 063
9	954 243	59	770 852	109	037 426	159	201 397	209	320 146
10	**000 000**	**60**	**778 151**	**110**	**041 393**	**160**	**204 120**	**210**	**322 219**
11	041 393	61	785 330	111	045 323	161	206 826	211	324 282
12	079 181	62	792 392	112	049 218	162	209 515	212	326 336
13	113 943	63	799 341	113	053 078	163	212 188	213	328 380
14	146 128	64	806 180	114	056 905	164	214 844	214	330 414
15	176 091	65	812 913	115	060 698	165	217 484	215	332 438
16	204 120	66	819 544	116	064 458	166	220 108	216	334 454
17	230 449	67	826 075	117	068 186	167	222 716	217	336 460
18	255 273	68	832 509	118	071 882	168	225 309	218	338 456
19	278 754	69	838 849	119	075 547	169	227 887	219	340 444
20	**301 030**	**70**	**845 098**	**120**	**079 181**	**170**	**230 449**	**220**	**342 423**
21	322 219	71	851 258	121	082 785	171	232 996	221	344 392
22	342 423	72	857 332	122	086 360	172	235 528	222	346 353
23	361 728	73	863 323	123	089 905	173	238 046	223	348 305
24	380 211	74	869 232	124	093 422	174	240 549	224	350 248
25	397 940	75	875 061	125	096 910	175	243 038	225	352 183
26	414 973	76	880 814	126	100 371	176	245 513	226	354 108
27	431 364	77	886 491	127	103 804	177	247 973	227	356 026
28	447 158	78	892 095	128	107 210	178	250 420	228	357 935
29	462 398	79	897 627	129	110 590	179	252 853	229	359 835
30	**477 121**	**80**	**903 090**	**130**	**113 943**	**180**	**255 273**	**230**	**361 728**
31	491 362	81	908 485	131	117 271	181	257 679	231	363 612
32	505 150	82	913 814	132	120 574	182	260 071	232	365 488
33	518 514	83	919 078	133	123 852	183	262 451	233	367 356
34	531 479	84	924 279	134	127 105	184	264 818	234	369 216
35	544 068	85	929 419	135	130 334	185	267 172	235	371 068
36	556 303	86	934 498	136	133 539	186	269 513	236	372 912
37	568 202	87	939 519	137	136 721	187	271 842	237	374 748
38	579 784	88	944 483	138	139 879	188	274 158	238	376 577
39	591 065	89	949 390	139	143 015	189	276 462	239	378 398
40	**602 060**	**90**	**954 243**	**140**	**146 128**	**190**	**278 754**	**240**	**380 211**
41	612 784	91	959 041	141	149 219	191	281 033	241	382 017
42	623 249	92	963 788	142	152 288	192	283 301	242	383 815
43	633 468	93	968 483	143	155 336	193	285 557	243	385 606
44	643 453	94	973 128	144	158 362	194	287 802	244	387 390
45	653 213	95	977 724	145	161 368	195	290 035	245	389 166
46	662 758	96	982 271	146	164 353	196	292 256	246	390 935
47	672 098	97	986 772	147	167 317	197	294 466	247	392 697
48	681 241	98	991 226	148	170 262	198	296 665	248	394 452
49	690 196	99	995 635	149	173 186	199	298 853	249	396 199
50	**698 970**	**100**	**000 000**	**150**	**176 091**	**200**	**301 030**	**250**	**397 940**

n	mantissa	*n*	mantissa	*n*	mantissa	*n*	mantissa	*n*	mantissa
	0, ...		0, ...		0, ...		0, ...		0, ...
250	**397 940**	**300**	**477 121**	**350**	**544 068**	**400**	**602 060**	**450**	**653 213**
251	399 674	301	478 566	351	545 307	401	603 144	451	654 177
252	401 401	302	480 007	352	546 543	402	604 226	452	655 138
253	403 121	303	481 443	353	547 775	403	605 305	453	656 098
254	404 834	304	482 874	354	549 003	404	606 381	454	657 056
255	406 540	305	484 300	355	550 228	405	607 455	455	658 011
256	408 240	306	485 721	356	551 450	406	608 526	456	658 965
257	409 933	307	487 138	357	552 668	407	609 594	457	659 916
258	411 620	308	488 551	358	553 883	408	610 660	458	660 865
259	413 300	309	489 958	359	555 094	409	611 723	459	661 813
260	**414 973**	**310**	**491 362**	**360**	**556 303**	**410**	**612 784**	**460**	**662 758**
261	416 641	311	492 760	361	557 507	411	613 842	461	663 701
262	418 301	312	494 155	362	558 709	412	614 897	462	664 642
263	419 956	313	495 544	363	559 907	413	615 950	463	665 581
264	421 604	314	496 930	364	561 101	414	617 000	464	666 518
265	423 246	315	498 311	365	562 293	415	618 048	465	667 453
266	424 882	316	499 687	366	563 481	416	619 093	466	668 386
267	426 511	317	501 059	367	564 666	417	620 136	467	669 317
268	428 135	318	502 427	368	565 848	418	621 176	468	670 246
269	429 752	319	503 791	369	567 026	419	622 214	469	671 173
270	**431 364**	**320**	**505 150**	**370**	**568 202**	**420**	**623 249**	**470**	**672 098**
271	432 969	321	506 505	371	569 374	421	624 282	471	673 021
272	434 569	322	507 856	372	570 543	422	625 312	472	673 942
273	436 163	323	509 203	373	571 709	423	626 340	473	674 861
274	437 751	324	510 545	374	572 872	424	627 366	474	675 778
275	439 333	325	511 883	375	574 031	425	628 389	475	676 694
276	440 909	326	513 218	376	575 188	426	629 410	476	677 607
277	442 480	327	514 548	377	576 341	427	630 428	477	678 518
278	444 045	328	515 874	378	577 492	428	631 444	478	679 428
279	445 604	329	517 196	379	578 639	429	632 457	479	680 336
280	**447 158**	**330**	**518 514**	**380**	**579 784**	**430**	**633 468**	**480**	**681 241**
281	448 706	331	519 828	381	580 925	431	634 477	481	682 145
282	450 249	332	521 138	382	582 063	432	635 484	482	683 047
283	451 786	333	522 444	383	583 199	433	636 488	483	683 947
284	453 318	334	523 746	384	584 331	434	637 490	484	684 845
285	454 845	335	525 045	385	585 461	435	638 489	485	685 742
286	456 366	336	526 339	386	586 587	436	639 486	486	686 636
287	457 882	337	527 630	387	587 711	437	640 481	487	687 529
288	459 392	338	528 917	388	588 832	438	641 474	488	688 420
289	460 898	339	530 200	389	589 950	439	642 465	489	689 309
290	**462 398**	**340**	**531 479**	**390**	**591 065**	**440**	**643 453**	**490**	**690 196**
291	463 893	341	532 754	391	592 177	441	644 439	491	691 081
292	465 383	342	534 026	392	593 286	442	645 422	492	691 965
293	466 868	343	535 294	393	594 393	443	646 404	493	692 847
294	468 347	344	536 558	394	595 496	444	647 383	494	693 727
295	469 822	345	537 819	395	596 597	445	648 360	495	694 605
296	471 292	346	539 076	396	597 695	446	649 335	496	695 482
297	472 756	347	540 329	397	598 791	447	650 308	497	696 356
298	474 216	348	541 579	398	599 883	448	651 278	498	697 229
299	475 671	349	542 825	399	600 973	449	652 246	499	698 101
300	**477 121**	**350**	**544 068**	**400**	**602 060**	**450**	**653 213**	**500**	**698 970**

n	mantissa	*n*	mantissa	*n*	mantissa	*n*	mantissa	*n*	mantissa
	0, ...		0, ...		0, ...		0, ...		0, ...
500	**698 970**	**550**	**740 363**	**600**	**778 151**	**650**	**812 913**	**700**	**845 098**
501	699 838	551	741 152	601	778 874	651	813 581	701	845 718
502	700 704	552	741 939	602	779 596	652	814 248	702	846 337
503	701 568	553	742 725	603	780 317	653	814 913	703	846 955
504	702 431	554	743 510	604	781 037	654	815 578	704	847 573
505	703 291	555	744 293	605	781 755	655	816 241	705	848 189
506	704 151	556	745 075	606	782 473	656	816 904	706	848 805
507	705 008	557	745 855	607	783 189	657	817 565	707	849 419
508	705 864	558	746 634	608	783 904	658	818 226	708	850 033
509	706 718	559	747 412	609	784 617	659	818 885	709	850 646
510	**707 570**	**560**	**748 188**	**610**	**785 330**	**660**	**819 544**	**710**	**851 258**
511	708 421	561	748 963	611	786 041	661	820 201	711	851 870
512	709 270	562	749 736	612	786 751	662	820 858	712	852 480
513	710 117	563	750 508	613	787 460	663	821 514	713	853 090
514	710 963	564	751 279	614	788 168	664	822 168	714	853 698
515	711 807	565	752 048	615	788 875	665	822 822	715	854 306
516	712 650	566	752 816	616	789 581	666	823 474	716	854 913
517	713 491	567	753 583	617	790 285	667	824 126	717	855 519
518	714 330	568	754 348	618	790 988	668	824 776	718	856 124
519	715 167	569	755 112	619	791 691	669	825 426	719	856 729
520	**716 003**	**570**	**755 875**	**620**	**792 392**	**670**	**826 075**	**720**	**857 332**
521	716 838	571	756 636	621	793 092	671	826 723	721	857 935
522	717 671	572	757 396	622	793 790	672	827 369	722	858 537
523	718 502	573	758 155	623	794 488	673	828 015	723	859 138
524	719 331	574	758 912	624	795 185	674	828 660	724	859 739
525	720 159	575	759 668	625	795 880	675	829 304	725	860 338
526	720 986	576	760 422	626	796 574	676	829 947	726	860 937
527	721 811	577	761 176	627	797 268	677	830 589	727	861 534
528	722 634	578	761 928	628	797 960	678	831 230	728	862 131
529	723 456	579	762 679	629	798 651	679	831 870	729	862 728
530	**724 276**	**580**	**763 428**	**630**	**799 341**	**680**	**832 509**	**730**	**863 323**
531	725 095	581	764 176	631	800 029	681	833 147	731	863 917
532	725 912	582	764 923	632	800 717	682	833 784	732	864 511
533	726 727	583	765 669	633	801 404	683	834 421	733	865 104
534	727 541	584	766 413	634	802 089	684	835 056	734	865 686
535	728 354	585	767 156	635	802 774	685	835 691	735	866 287
536	729 165	586	767 898	636	803 457	686	836 324	736	866 878
537	729 974	587	768 638	637	804 139	687	836 957	737	867 467
538	730 782	588	769 377	638	804 821	688	837 588	738	868 056
539	731 589	589	770 115	639	805 501	689	838 219	739	868 644
540	**732 394**	**590**	**770 852**	**640**	**806 180**	**690**	**838 849**	**740**	**869 232**
541	733 197	591	771 587	641	806 858	691	839 478	741	869 818
542	733 999	592	772 322	642	807 535	692	840 106	742	870 404
543	734 800	593	773 055	643	808 211	693	840 733	743	870 989
544	735 599	594	773 786	644	808 886	694	841 349	744	871 573
545	736 397	595	774 517	645	809 560	695	841 985	745	872 156
546	737 193	596	775 246	646	810 233	696	842 609	746	872 739
547	737 987	597	775 974	647	810 904	697	843 233	747	873 321
548	738 781	598	776 701	648	811 575	698	843 855	748	873 902
549	739 572	599	777 427	649	812 245	699	844 477	749	874 482
550	**740 363**	**600**	**778 151**	**650**	**812 913**	**700**	**845 098**	**750**	**875 061**

n	mantissa	n	mantissa	n	mantissa	n	mantissa	n	mantissa
	0, ...		0, ...		0, ...		0, ...		0, ...
750	**875 061**	**800**	**903 090**	**850**	**929 419**	**900**	**954 243**	**950**	**977 724**
751	875 640	801	903 633	851	929 930	901	954 725	951	978 181
752	876 218	802	904 174	852	930 440	902	955 207	952	978 637
753	876 795	803	904 716	853	930 949	903	955 688	953	979 093
754	877 371	804	905 256	854	931 458	904	956 168	954	979 548
755	877 947	805	905 796	855	931 966	905	956 649	955	980 003
756	878 522	806	906 335	856	932 474	906	957 128	956	980 458
757	879 096	807	906 874	857	932 981	907	957 607	957	980 912
758	879 669	808	907 411	858	933 487	908	958 086	958	981 366
759	880 242	809	907 949	859	933 993	909	958 564	959	981 819
760	**880 814**	**810**	**908 485**	**860**	**934 498**	**910**	**959 041**	**960**	**982 271**
761	881 385	811	909 021	861	935 003	911	959 518	961	982 723
762	881 955	812	909 556	862	935 507	912	959 995	962	983 175
763	882 525	813	910 091	863	936 011	913	960 471	963	983 626
764	883 093	814	910 624	864	936 514	914	960 946	964	984 077
765	883 661	815	911 158	865	937 016	915	961 421	965	984 527
766	884 229	816	911 690	866	937 518	916	961 895	966	984 977
767	884 795	817	912 222	867	938 019	917	962 369	967	985 426
768	885 361	818	912 753	868	938 520	918	962 843	968	985 875
769	885 926	819	913 284	869	939 020	919	963 316	969	986 324
770	**886 491**	**820**	**913 814**	**870**	**939 519**	**920**	**963 788**	**970**	**986 772**
771	887 054	821	914 343	871	940 018	921	964 260	971	987 219
772	887 617	822	914 872	872	940 516	922	964 731	972	987 666
773	888 179	823	915 400	873	941 014	923	965 202	973	988 113
774	888 741	824	915 927	874	941 511	924	965 672	974	988 559
775	889 302	825	916 454	875	942 008	925	966 142	975	989 005
776	889 862	826	916 980	876	942 504	926	966 611	976	989 450
777	890 421	827	917 506	877	943 000	927	967 080	977	989 895
778	890 980	828	918 030	878	943 495	928	967 548	978	990 339
779	891 537	829	918 555	879	943 989	929	968 016	979	990 783
780	**892 095**	**830**	**919 078**	**880**	**944 483**	**930**	**968 483**	**980**	**991 226**
781	892 651	831	919 601	881	944 976	931	968 950	981	991 669
782	893 207	832	920 123	882	945 469	932	969 416	982	992 111
783	893 762	833	920 645	883	945 961	933	969 882	983	992 554
784	894 316	834	921 166	884	946 452	934	970 347	984	992 995
785	894 870	835	921 686	885	946 943	935	970 812	985	993 436
786	895 423	836	922 206	886	947 434	936	971 276	986	993 877
787	895 975	837	922 725	887	947 924	937	971 740	987	994 317
788	896 526	838	923 244	888	948 413	938	972 203	988	994 757
789	897 077	839	923 762	889	948 902	939	972 666	989	995 196
790	**897 627**	**840**	**924 279**	**890**	**949 390**	**940**	**973 128**	**990**	**995 635**
791	898 176	841	924 796	891	949 878	941	973 590	991	996 074
792	898 725	842	925 312	892	950 365	942	974 051	992	996 512
793	899 273	843	925 828	893	950 851	943	974 512	993	996 949
794	899 821	844	926 342	894	951 338	944	974 972	994	997 386
795	900 367	845	926 857	895	951 823	945	975 432	995	997 823
796	900 913	846	927 370	896	952 308	946	975 891	996	998 259
797	901 458	847	927 883	897	952 792	947	976 350	997	998 695
798	902 003	848	928 396	898	953 276	948	976 808	998	999 131
799	902 547	849	928 908	899	953 760	949	977 266	999	999 565
800	**903 090**	**850**	**929 419**	**900**	**954 243**	**950**	**977 724**	**1000**	**000 000**

3. O cálculo com logaritmos decimais

Bem, agora podemos começar nossos cálculos.

No início do capítulo anterior, comentamos que ainda não tínhamos condições de resolver uma equação exponencial quando não era possível obter potências de mesma base nos dois membros. Demos como exemplo a equação:

$$5^x = 12$$

Agora já temos condições de resolvê-la, e é o que iremos fazer.

Aplicando logaritmos decimais nos dois membros da equação dada, obtemos:

$$\log 5^x = \log 12 \Rightarrow x \cdot \log 5 = \log 12 \Rightarrow x = \frac{\log 12}{\log 5}$$

O número 12 tem dois algarismos na parte inteira, portanto a característica do seu logaritmo decimal é 1, ou seja:

$$\log 12 = 1 + 0,\ldots$$

A mantissa, obtida diretamente da tábua, nos dá 0,079 181. Assim:

$$\log 12 = 1 + 0{,}079\,181 \Rightarrow \log 12 = 1{,}079\,181$$

O número 5 tem um algarismo na parte inteira, portanto a característica de seu logaritmo decimal é 0, ou seja:

$$\log 5 = 0 + 0,\ldots$$

A mantissa, obtida diretamente da tábua, nos dá 0,698 970. Assim:

$$\log 5 = 0 + 0{,}698\,970 \Rightarrow \log 5 = 0{,}698\,970$$

Substituindo na equação $x = \frac{\log 12}{\log 5}$ os valores encontrados, obtemos:

$$x = \frac{1{,}079\,181}{0{,}698\,970} = 1{,}543\,959$$

Vejamos em seguida mais alguns exemplos, nos quais procuraremos mostrar as situações que normalmente ocorrem nos cálculos com logaritmos.

Exemplo 1

Nós necessitamos por algum motivo, em nossos cálculos, encontrar, por exemplo, o valor da raiz cúbica do número 729, mas a calculadora "pifou". Como resolver o problema?

Solução

O uso dos logaritmos resolverá nosso problema. Chamemos de x o valor da raiz cúbica de 729. Assim:

$$x = \sqrt[3]{729}.$$

Então $x = 729^{\frac{1}{3}}$. Tomando logaritmos nos dois membros, temos:

$$\log x = \log 729^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \log x = \frac{1}{3} \cdot \log 729$$

Como 729 tem três algarismos, a característica do seu logaritmo será 2 e a mantissa é achada na tábua: 0,862 728. Então:

$$\log x = \frac{1}{3} \cdot 2{,}862\,728 \Rightarrow \log x = 0{,}954\,243 \Rightarrow \log x = \overset{\text{Característica}}{0} + \underbrace{0{,}954\,243}_{\text{Mantissa}}$$

Veja que agora temos o problema inverso para a utilização da tábua, ou seja, conhecemos o logaritmo de x e necessitamos achar o valor de x.

Procurando na tábua um número que corresponda a uma mantissa de 0,954 243, vemos que o número é 9 ou 90 ou 900 ou...

Como a característica do log x é zero, então x tem um só algarismo na parte inteira, portanto temos $x = 9$. Assim, a raiz cúbica de 729 é 9.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

9. Determine o valor do logaritmo decimal de N nos casos seguintes:

a) $N = 756$ b) $N = 78$ c) $N = 9$

10. Determine o valor de x sabendo que:

a) $\log x = 2{,}905\,256$ b) $\log x = 1{,}929\,419$ c) $\log x = 0{,}845\,098$

11. Utilizando logaritmos, calcule:

a) $N = \sqrt[3]{343}$ b) $P = \sqrt{841}$

Nos exemplos anteriores, nas duas vezes em que foi necessário recorrer à tábua de logaritmos, não tivemos muito trabalho, pois os números procurados lá estavam. No entanto isso pode não ocorrer e nesse caso o nosso trabalho aumenta, como mostra o exemplo seguinte.

Exemplo 2

Ainda com nossa calculadora "pifada", necessitamos encontrar, por exemplo, a raiz cúbica de 24,4.

Solução

Chamemos de z o valor da raiz cúbica procurada, ou seja:

$$z = \sqrt[3]{24,4} \Rightarrow z = 24,4^{\frac{1}{3}}$$

Aplicando logaritmos decimais nos dois membros, obtemos:

$$\log z = \log 24{,}4^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \log z = \frac{1}{3} \cdot \log 24{,}4 \quad \text{(I)}$$

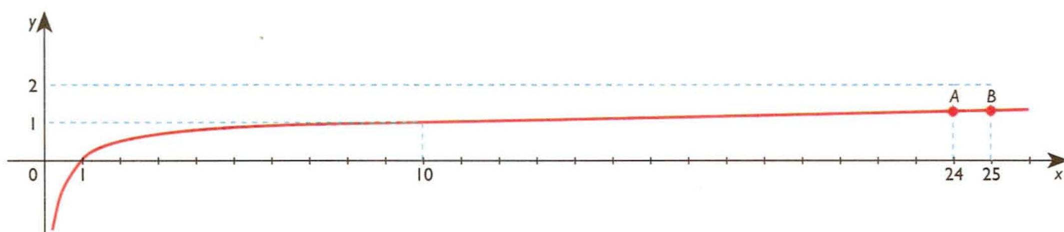
Veja que agora necessitamos do logaritmo decimal do número 24,4. Sabemos que, pelo fato de o número ter dois algarismos na parte inteira, a característica de seu logaritmo decimal é 1, ou seja:

$$\log 24{,}4 = \overset{\text{Característica}}{1} + \underbrace{0,\ \ldots}_{\text{Mantissa}}$$

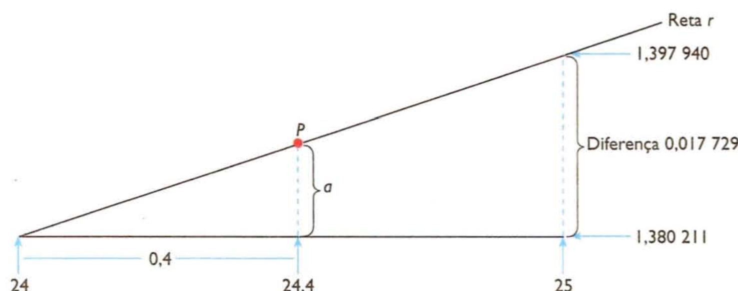
A mantissa não está na tábua de logaritmos, pois lá não existe o número 24,4. No entanto 24,4 está entre dois números da tábua: 24 e 25. Temos:

Para o número	A mantissa é	O logaritmo é
24	0,380 211	1,380 211
25	0,397 940	1,397 940

Assim sendo, temos que log 24,4 está entre 1,380 211 e 1,397 940.
Para obtermos uma melhor aproximação do valor do log 24,4, podemos observar o gráfico da função $y = \log x$.



Nesse gráfico podemos notar que o trecho da curva que vai de A até B "quase se confunde" com o segmento de reta que vai de A até B (vamos chamar essa reta de r). Isso nos leva a admitir que, se acharmos **na reta** r a ordenada do ponto de abscissa 24,4, obteremos um aceitável valor de log 24,4.
Veja um *zoom* daquele trecho (feito sem escala):



A semelhança dos triângulos da figura nos permite escrever:

$$\frac{0,017\,729}{a} = \frac{1}{0,4} \Rightarrow a = 0,007\,092$$

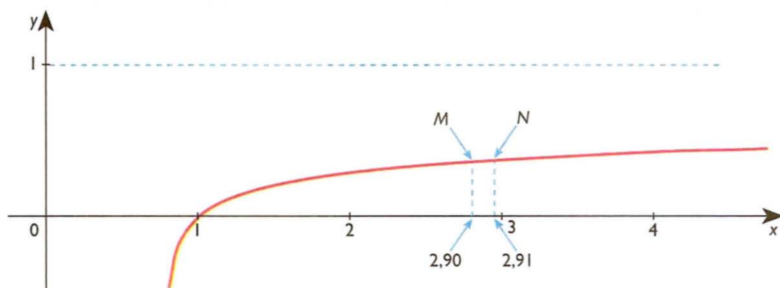
A ordenada do ponto P será 1,380 211 + 0,007 092 = 1,387 303. Substituindo log 24,4 por esse valor na equação (I), encontramos:

$$\log z = \frac{1}{3} \cdot 1,387\,303 \Rightarrow \log z = 0,462\,434,$$

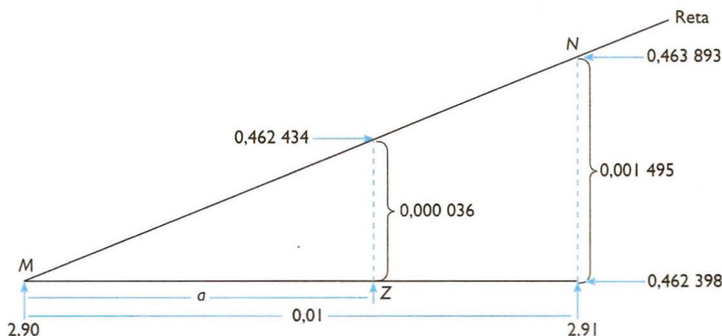
ou seja: $\log z = 0 + 0,462\,434$.

Agora temos o logaritmo decimal do número z e queremos achar z. Procurando a mantissa 0,462 434 na tábua, não encontramos lá esse valor, mas verificamos que ela corresponde a um número que está entre 290 e 291.

Como a característica do logaritmo decimal de z é 0, então z tem só um algarismo na parte inteira. Portanto o valor de z está entre 2,90 e 2,91.
Se desejarmos uma melhor aproximação para z, recorreremos novamente ao gráfico da função $y = \log x$.



Nesse gráfico observamos também que o trecho da curva entre M e N "se aproxima" do segmento de reta de extremidades M e N. Veja um *zoom* daquele trecho (feito sem escala):



A semelhança dos triângulos da figura nos permite escrever:

$$\frac{0,001\,495}{0,000\,036} = \frac{0,01}{a} \Rightarrow a = 0,000\,24$$

O valor de z é, portanto, 2,90 + 0,000 24, ou seja, 2,900 24.
Dessa forma, concluímos:

$$\sqrt[3]{24,4} \simeq 2,900\,24$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

12. Sabendo que $x = 25$ e $y = 4$, determine o valor de $\log x + \log y$.

13. Calcule:

a) log 58,5 b) log 8,9 c) log 1 200 d) log 25,36

14. Calcule o valor de x nos casos seguintes:

a) $x = 38^{\frac{1}{3}}$ b) $x = \sqrt[5]{384}$ c) $x = 53,8^{\frac{1}{4}}$

15. Calcule o valor de x conhecendo:

a) $\log x = 0,591\,06$ b) $\log x = 2,265\,525$ c) $\log x = 1,689\,309$

Exemplo 3
Calcular:

a) $\log x$, se $x = 0{,}324$ b) x, se $\log x = -2{,}404\,504$

Solução

a) queremos o valor de $\log 0{,}324$

Como x está entre 0 e 1, a característica do seu logaritmo decimal é o número de zeros iniciais, com o sinal trocado; portanto, como existe um zero inicial, a característica do seu logaritmo decimal é -1. Dessa forma temos que:

$$\log 0{,}324 = \overset{\text{Característica}}{-1} + \underbrace{0, \ldots}_{\text{Mantissa}}$$

A mantissa correspondente ao número 0,324 é a mesma do número 324, ou seja, 0,510 545.
Então: $\log 0{,}324 = -1 + 0{,}510\,545$. (I)
Esse valor pode ser indicado assim:

$$\bar{1}{,}510\,545$$

Essa forma é chamada **forma mista** ou **forma preparada** do logaritmo, pois nela estão destacadas:

- a parte "antes" da vírgula, negativa, e que corresponde à característica;
- a parte decimal, positiva, e que corresponde à mantissa.

Observe que, se em (I) efetuarmos os cálculos, obteremos $\log 0{,}324 = -0{,}489\,495$, sendo que este último valor não nos mostra nem a característica nem a mantissa do logaritmo.

b) $\log x = -2{,}404\,504$ e queremos achar x

Observe que esse valor é um número negativo, de forma que ele não nos mostra nem a característica nem a mantissa do logaritmo. Vamos portanto "preparar" esse número. Temos que $\log x = -2 - 0{,}404\,504$.
Somando e subtraindo 1 ao segundo membro, encontramos:

$$\log x = -2 - 0{,}404\,504 + 1 - 1 \Rightarrow \log x = -2 - 1 + (1 - 0{,}404\,504) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log x = -3 + 0{,}595\,496 \text{ ou } \bar{3}{,}595\,496$$

Agora sim sabemos que a característica é -3 e que a mantissa é 0,595 496.
Procurando na tábua encontramos para essa mantissa o número 394.
Como a característica é -3, o número procurado tem três zeros iniciais, portanto:

$$x = 0{,}003\,94$$

Exemplo 4
Calcular:

a) $\log_2 15$ b) $\ln 25$

Solução

a) $\log_2 15$

A lei de mudança de base nos garante que:

$$\log_2 15 = \frac{\log_{10} 15}{\log_{10} 2}$$

Portanto $\log_2 15 = \dfrac{1,176091}{0,30103} = 3,906889.$

b) ln 25

Temos que ln 25 é o mesmo que $\log_e 25$. Tomando $e = 2,718\,28$ e "passando" para a base 10, encontramos:

$$\ln 25 = \frac{\log_{10} 25}{\log_{10} 2,71828} = \frac{1,397940}{0,434294} = 3,218879$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

16. Calcule os logaritmos dos números a seguir. Dê também, se for o caso, a resposta na forma preparada, destacando a característica e a mantissa.

a) log 0,536　　b) log 0,036　　c) log 0,001 25

17. Sendo $\log x = n$, determine x nos seguintes casos:

a) $n = -0,437\,707$　　b) $n = -2,376\,751$

18. "Passando" para a base decimal, calcule o valor de N nos casos:

a) $N = \log_3 58$　　b) $N = \log_5 45 + \log_4 510$　　c) $N = \ln 10 + \log e$

4. Algumas aplicações dos logaritmos

Vamos finalizar este capítulo resolvendo problemas que envolvem o cálculo de logaritmos, alguns dos quais já citados anteriormente.

Exemplo 1

Numa danceteria existem dois aparelhos de som exatamente iguais. Quando o aparelho A foi ligado no máximo, mediu-se o *NIS* (Nível de Intensidade Sonora), dado por 80 dB (decibel). Determinar o número de decibels que se obtém no caso de o aparelho B também ser ligado no máximo, sabendo que o *NIS* é dado em decibels por:

$$NIS = 10 \cdot \log \frac{IS}{IR},$$

em que *IS* é a intensidade sonora e *IR* é o índice unitário (em watt por cm^2).

Solução

À primeira vista, poderíamos ser tentados a imaginar que o *NIS* em decibels seria 160, pelo fato de termos dobrado a intensidade sonora ao ligarmos também o aparelho B. No entanto isso não é verdade. Vejamos por quê.

Chamando de a o valor de $\dfrac{IS}{IR}$ e de NIS_1 o nível de intensidade sonora em decibels quando ligado apenas o aparelho A, temos que:

$$NIS_1 = 10 \cdot \log a = 80$$

Vamos imaginar agora o aparelho B também ligado no máximo. Dessa forma, a intensidade sonora duplicou, ou seja, ficou sendo $2 \cdot a$. Então:

$$NIS = 10 \cdot \log (2 \cdot a) \Rightarrow NIS = 10 \cdot [\log 2 + \log a] \Rightarrow NIS = 10 \cdot \log 2 + 10 \cdot \log a$$

Tomando $\log 2 = 0{,}301\,03$, temos:

$$NIS = 10 \cdot (0{,}301\,03) + 80 \Rightarrow NIS = 3{,}010\,3 + 80 \Rightarrow NIS = 83{,}010\,3 \text{ dB}$$

Observemos que, duplicada a intensidade sonora, o *NIS* aumentou pouco mais de 3 decibels!

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

19. Se um aparelho de som ligado no máximo produz 60 dB, quantos decibels serão produzidos se ligarmos, no mesmo ambiente, mais dois aparelhos de som exatamente iguais ao primeiro?

20. Numa pista de aeroporto um avião a jato liga sua turbina. Mediu-se o *NIS*, obtendo-se 120 dB. Se, nas proximidades, outro avião a jato igual ao anterior também ligar sua turbina, quantos dB serão medidos?



Exemplo 2

Num certo país o aumento da população ocorre segundo a lei:

$$P(t) = P_0 \cdot e^{0{,}003 \cdot 6},$$

em que P_0 é a população num determinado ano inicial ou ano-base, t é o número de anos passados a contar do ano inicial e e é a base do sistema neperiano de logaritmos. Determinar:

a) a população, 6 anos após ela ter sido de 200 000 habitantes;

b) quantos anos deverão passar para que a população seja o dobro da do ano-base, admitindo que a taxa de crescimento se mantenha.

Solução

a) Queremos $P(6)$, sabendo que $P_0 = 200\,000$.

$P(6) = 200\,000 \cdot e^{0{,}003 \cdot 6} \Rightarrow P(6) = 200\,000 \cdot 1{,}018\,163 \simeq 203\,632$

Após 6 anos a população será de aproximadamente 203 632 habitantes.

b) Queremos a população duplicada.

Seja t o número de anos tal que esse fato ocorra. Assim sendo, o valor de $P(t)$ deverá ser $2 \cdot P_0$, ou seja:

$$2 \cdot P_0 = P_0 \cdot e^{0{,}03 \cdot t}$$

Simplificando os dois membros por P_0, que é um número positivo, obtemos:

$$2 = e^{0{,}03 \cdot t} \quad \text{(I)}$$

Veja que a simplificação feita nos proporcionou uma equação que não depende de P_0, ou seja, a população do ano inicial pode ser qualquer uma.

Aplicando logaritmos decimais nos dois membros de (I), temos:

$$\log 2 = \log e^{0{,}03 \cdot t} \Rightarrow 0{,}03 \cdot t \cdot \log e = \log 2$$

Substituindo log e por 0,434 294, encontramos:

$$t = \frac{\log 2}{0,03 \cdot 0,434\,294} \Rightarrow t = \frac{0,301\,03}{0,013\,029} \Rightarrow t \simeq 23,1$$

A população será o dobro da atual após pouco mais de 23 anos.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

21. Se a população de certa região cresce segundo a lei:

$$P(t) = P_0 \cdot e^{0,02 \cdot t},$$

em que P_0 é a população, num ano inicial qualquer, t é o número de anos após o ano-base e ao qual corresponde a população $P(t)$, determine:

a) a população, 8 anos depois de ter tido 500 000 habitantes.
b) se em 1980 a população era de 350 000, qual foi a população em 1994?
c) depois de quantos anos (número inteiro) podemos garantir que a população duplicou?

22. A população de uma dada região cresce exponencialmente segundo a lei:

$$P(t) = 600\,000 \cdot e^{0,025 \cdot t}$$

Pergunta-se:

a) Qual a população daqui a 20 anos?
b) Qual a população daqui a 40 anos?
c) Em quanto tempo, aproximadamente, a população dessa região triplicará?

23. Em uma aula de Biologia, um aluno, observando uma cultura de bactérias, fez as seguintes anotações:

Tempo (minutos)	0	10
Número bactérias	3 000	4 000

Sabendo que o crescimento dessa cultura obedece à lei:

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{k \cdot t},$$

determine:

a) o valor de k.
b) a quantidade de bactérias prevista quando o tempo for de 25 minutos.


Fernando Vivas / Abril Imagens

Exemplo 3

Numa aplicação de poupança foi colocada uma importância de R$ 240.000,00. Sabe-se que a lei que mostra o total de dinheiro que nela existe é dada por:

$$M(t) = C \cdot (1,25)^t,$$

em que t é o número de anos de aplicação, C é o capital aplicado e M é o montante ou o total final. Determine:

a) o montante, após 4 anos de aplicação;
b) em quantos anos o capital triplicará nessa aplicação.

Solução

a) Achar $M(4)$.

Temos que:

$$M(4) = 240.000{,}00 \cdot 1{,}25^4 \Rightarrow M(4) = 240.000{,}00 \cdot 2{,}441\,4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M(4) = 585.936{,}00$$

O montante final será de R$ 585.936,00.

b) Achar o número de anos em que o capital triplicará.

Seja t o número de anos para que isso ocorra. Assim sendo: $M(t) = 3 \cdot C$. Portanto:

$$3 \cdot C = C \cdot 1{,}25^t$$

É importante notar que na sentença acima o fator C pode ser simplificado, portanto a solução do problema não depende de "quanto" foi aplicado inicialmente. Temos:

$$1{,}25^t = 3$$

Aplicando logaritmos decimais nos dois membros, encontramos:

$$\log 1{,}25^t = \log 3 \Rightarrow t \cdot \log 1{,}25 = \log 3 \Rightarrow t = \frac{\log 3}{\log 1{,}25} = \frac{0{,}477\,121}{0{,}096\,910} \simeq 4{,}9$$

O capital deverá ficar aplicado por 5 anos (arredondado para cima).

EXERCÍCIO PROPOSTO

24. Uma aplicação de poupança é atualizada segundo a seguinte lei:

$$M(t) = C \cdot 1{,}3^t,$$

em que t é o número de anos, C é o dinheiro aplicado e M, o montante.

a) Ache M quando $C =$ R$ 24.000,00 e $t = 5$.

b) Ache o menor número de anos tal que $M(t)$ atinja o valor $4C$.

Exemplo 4

Num processo de decaimento radioativo, a quantidade residual Q de uma substância varia em função do tempo conforme a seguinte lei:

$$Q(t) = 1\,200 \cdot e^{-0{,}000\,2 \cdot t},$$

em que 1 200 gramas era a quantidade inicial e t, o tempo em anos. Determinar a quantidade da substância após 150 anos.

Solução

Queremos encontrar $Q(150)$. Portanto temos:

$$Q(150) = 1\,200 \cdot e^{-0{,}000\,2 \cdot 150} \Rightarrow Q(150) = 1\,200 \cdot 0{,}970 = 1\,164$$

Então a quantidade será de 1 164 gramas.

EXERCÍCIO PROPOSTO

25. Num processo de decaimento radioativo, a quantidade residual Q de uma substância varia conforme a seguinte lei:

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{-0{,}000\,3 \cdot t}, \text{ em que } t \text{ é o número de anos.}$$

a) Ache $Q(800)$, para $Q_0 = 680$ gramas.

b) Se para $t = 500$ tivermos $Q(t) = 379$, determine Q_0.

RELEMBRANDO CONCEITOS

Mudança para a base 10

$$\log_b a = \frac{\log_{10} a}{\log_{10} b} \text{ ou } \frac{\log a}{\log b}, \text{ para } a > 0, b > 0 \text{ e } b \neq 1.$$

Cálculo com logaritmos decimais

$$\log a = c + 0, \ldots$$

em que c é a característica do logaritmo e m é a mantissa, com $0 \leqslant m < 1$.

Propriedade importante

Se $\log a = c + 0, \ldots$, então, para N inteiro, tem-se que:

$$\log (10^N \cdot a) = \log 10^N + \log a = N + c + 0, \ldots = (N + c) + 0,\ldots$$

ou seja, os logaritmos de a e de $(10^N \cdot a)$ possuem a **mesma mantissa**.

Determinação da mantissa do $\log a = c + 0, \ldots$

Feita diretamente na tábua de logaritmos.

Determinação da característica do $\log a = c + 0, \ldots$

1º caso: $a > 1$

A característica c é o número de algarismos da parte inteira de a, menos uma unidade.

2º caso: $0 < a < 1$

A característica é o número de zeros iniciais de a, com o sinal trocado.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

26. Sendo $\log_2 x = 1,38$, calcule $\log x$.

27. Sabendo que $x = 15^{1\,000}$, diga quantos algarismos possui o número x. (Sugestão: aplique logaritmos decimais e analise a característica.)

28. Sabendo que $\log 3,5^2 = 1,088\,136$, calcule o valor de $N = \log 350 + \log 35^2$.

29. Calcule o valor de P nos casos seguintes:

a) $P = 629^{\frac{1}{4}}$

b) $P = \log_3 8 + \log_8 3$

30. Numa certa calculadora, quando você fornece um número negativo ou nulo e pressiona a tecla **log**, ela simplesmente "trava" e não executa mais nada até que seja "destravada". Suponha que você forneça a essa calculadora um número N inteiro e positivo. Quantas vezes você pode apertar seguidamente a tecla **log** antes que a calculadora "trave", nos casos seguintes:

a) $N = 100$?

b) $N = 10$?

c) N tem seis algarismos?

d) N tem três algarismos?

31. Na calculadora do exercício 30, forneceu-se um número N e a calculadora "travou" ao pressionarmos três vezes seguidas a tecla **log**. Determine entre quais potências de 10 está o número N.

32. A população de uma cidade aumenta segundo a lei $P(t) = P_0 \cdot 1{,}03^t$, em que: P_0 é a população num ano qualquer, t é o número de anos após o ano-base e $P(t)$ é a população t anos após aquele em que ocorreu P_0.

a) Se em 1981 a população era de 600 000 habitantes, qual foi a população em 1992?
b) Se em 1990 a população foi de 671 968, qual era a população em 1980?
c) De quantos em quantos anos a população dessa cidade dobra?

33. Ao estudar uma cultura de bactérias, um pesquisador determinou a seguinte tabela:

Tempo (minutos)	0	8
Quantidade	2 400	3 600

Supondo que o número de bactérias aumente segundo a lei $Q(t) = Q_0 \cdot e^{k \cdot t}$, em que Q_0 é o valor inicial, determine:

a) o valor de k.
b) o número previsto de bactérias após 12 minutos do tempo inicial.

TESTES

34. Sabendo que $\log N = -1{,}309\,804$, então a característica e a mantissa do logaritmo de N são, respectivamente:

a) -1 e 0,309 804
b) -2 e 0,309 804
c) -1 e 0,690 196
d) -2 e 0,690 196
e) 0 e 0,309 804

35. (F. M. Santa Casa-SP) Admitindo-se $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$, os valores da característica e da mantissa de $\log 0{,}45$ serão, respectivamente:

a) -1 e 0,66
b) -1 e 0,54
c) -1 e 0,34
d) 0 e 0,66
e) 0 e 0,34

36. (U. E. Ponta Grossa-PR) Sendo $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}47$, então:

a) $\log_6 10 = \dfrac{10}{77}$
b) $\log_6 10 = \dfrac{1}{77}$
c) $\log_6 10 = \dfrac{1}{0{,}141}$
d) $\log_6 10 = \dfrac{100}{77}$
e) $\log_6 10 = \dfrac{1}{14{,}1}$

37. (UFSE) São dados $\log_{10} 2 = 0{,}30$ e $\log_{10} 3 = 0{,}48$. O valor de $x = \dfrac{\log_2 0{,}6}{\log_2 10}$ é:

a) $-0{,}22$
b) $-0{,}12$
c) $-0{,}08$
d) 0,88
e) 1,02

38. (Unifor-CE) Se $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$, então $\log 54$ é igual a:

a) 1,74
b) 1
c) 0,43
d) 0,41
e) 0,03

39. Sabendo que $\log 20 = 1{,}301\,03$ e que $\log 0{,}6 = \bar{1}{,}778\,15$, o valor de $\log 120$ é:

a) 2,071 89
b) 2,079 19
c) 0,778 15
d) $-13{,}169\,14$
e) 12

40. Numa certa calculadora científica, quando você tenta encontrar o logaritmo de um número negativo ou nulo, ela dá uma mensagem de erro. Suponha que nessa calculadora você digite o número 987 654 321 e pressione seguidamente a tecla **log *x***. A mensagem de erro aparecerá após essa tecla ser pressionada:

a) 9 vezes
b) 5 vezes
c) 3 vezes
d) 4 vezes
e) 2 vezes

41. Na mesma calculadora do teste 40, você digita um número inteiro e, após pressionar três vezes a tecla **log *x***, apareceu a mensagem de erro. Se o número digitado por você fosse multiplicado por 10 e a tecla **log *x*** fosse pressionada seguidamente, a mensagem de erro apareceria após pressionar:

a) 10 vezes
b) 13 vezes
c) 3 vezes
d) 7 vezes
e) 4 vezes

42. (Imes-SP) Sendo log 2 = 0,301 0 e log 3 = 0,477 1, o valor mais próximo de log $\sqrt{216}$ é:

a) 3,334 3
b) 2,334 3
c) 1,334 3
d) 1,168 0
e) 0,167 1

43. (Unifor-CE) Utilizando-se a tabela ao lado, conclui-se que o valor de $\sqrt[5]{10}$ é:

a) 0,3
b) 1,26
c) 1,58
d) 1,99
e) 2,51

N	$\log_{10} N$
1,26	0,1
1,58	0,2
1,99	0,3
2,51	0,4
3,16	0,5

Capítulo

10 Noções sobre Matemática Financeira

1. Porcentagem

Ao ler jornal, ao ouvir rádio ou assistir tevê, é comum encontrarmos notícias como estas:



Vamos entender o que significa cada uma dessas notícias.

A primeira informa que, para cada R$ 100,00 que se gastava de gasolina, houve um acréscimo de R$ 4,00, passando-se a gastar R$ 104,00.

A segunda notícia informa que, para cada 100 eleitores existentes no ano anterior, hoje existem 85.

A terceira informa que, na loja Pechinchão, na Semana do Consumidor, de cada R$ 100,00 comprados, somente R$ 75,00 serão pagos, pois R$ 25,00 representam o desconto.

A quarta informa que, para cada R$ 100,00 aplicados, houve um rendimento de R$ 6,00 no mês.

Problemas que envolvem situações como essas são típicos de porcentagem.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1

A figura ao lado mostra uma promoção numa revenda de carros. Nessa promoção, está sendo dado um desconto de 24% para pagamento à vista. Quanto custa, à vista, o carro anunciado?



Solução

A taxa de desconto é de 24%. Isso significa que, em cada 100 reais marcados, serão descontados 24.

Uma regra de três simples e direta resolve nosso problema:

Preço marcado (R$)	Desconto (R$)
100,00	24,00
20.000,00	x

Então:

$$\frac{100{,}00}{20.000{,}00} = \frac{24{,}00}{x} \Rightarrow \frac{1}{200} = \frac{24{,}00}{x} \Rightarrow x = 4.800{,}00 \text{ (desconto total)}$$

O preço à vista será, portanto:

R$ 20.000,00 − R$ 4.800,00 = R$ 15.200,00

Observações

1. Calcular 24% $\left(\text{ou } \frac{24}{100}\right)$ de R$ 20.000,00 é o mesmo que multiplicar 0,24 ou $\frac{24}{100}$ por R$ 20.000,00. Assim:

$$0{,}24 \times \text{R\$ } 20.000{,}00 = \text{R\$ } 4.800{,}00$$

ou

$$\frac{24}{100} \times \text{R\$ } 20.000{,}00 = \text{R\$ } 4.800{,}00$$

2. O preço à vista poderia ser encontrado de modo mais direto lembrando que, se em cada R$ 100,00 são descontados R$ 24,00, então, para cada R$ 100,00, serão pagos somente R$ 76,00. Assim sendo, o preço à vista é encontrado calculando-se 76% de R$ 20.000,00, ou seja:

$$0{,}76 \times \text{R\$ } 20.000{,}00 = \text{R\$ } 15.200{,}00$$

Exemplo 2

Um débito de R$ 60.000,00 foi pago após o vencimento. Por causa disso houve um acréscimo de 2% no preço, a título de juros e multa. De quanto foi o pagamento?

Solução

Novamente recorreremos a uma regra de três simples e direta:

Preço marcado (R$)	Acréscimo (R$)
100,00	2,00
60.000,00	x

Então:

$$\frac{100{,}00}{60.000{,}00} = \frac{2{,}00}{x} \Rightarrow \frac{1}{600} = \frac{2{,}00}{x} \Rightarrow x = 1.200{,}00 \text{ (acréscimo)}$$

Assim, houve um acréscimo de R$ 1.200,00 portanto, o pagamento feito foi de:

R$ 60.000,00 + R$ 1.200,00 = R$ 61.200,00

Observação: o resultado poderia ser obtido diretamente, calculando-se (100 + 2)%, ou seja, 102%, ou ainda 1,02 de R$ 60.000,00. Assim:

$$1{,}02 \times \text{R\$ } 60.000{,}00 = \text{R\$ } 61.200{,}00$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Determine:

a) 25% de 300
b) 12% de R$ 6.000,00
c) 1,5% de 100
d) 100% de 5,4
e) 120% de 15
f) 30% de 15%

2. Determine:

a) 35% de 1,2
b) 5% de 20%
c) 50% de 50%

3. Um automóvel de R$ 18.000,00 foi comprado, à vista, com desconto de 16%. Determine:

a) de quanto foi o desconto.
b) quanto foi pago à vista.

4. Uma mercadoria de R$ 120,00 foi paga depois do vencimento com uma multa de 10%. Quanto se pagou no total?

5. Na venda de certo produto há um imposto de 10%. Sobre esse imposto, o governo pretende cobrar mais 5%. Admitindo-se que isso ocorra, determine a porcentagem do imposto total sobre a venda.

6. A loja *A* vende uma mercadoria de R$ 4.000,00 com 30% de desconto para pagamento à vista. A loja *B* vende a mesma mercadoria por R$ 3.500,00, mas dando só 25% de desconto para pagamento à vista. Em qual das duas lojas é melhor negócio comprar? Quanto em dinheiro vai se lucrar comprando-se nessa loja?



7. Qual das ofertas seguintes é mais vantajosa para o comerciante:

a) vender uma mercadoria com 25% de desconto à vista?
b) vender com 1 mês de prazo para pagamento e trocando a duplicata por dinheiro, no mesmo dia da venda, num banco que cobra 25% do total da duplicata?

8. Um revendedor de máquinas agrícolas anuncia um trator por R$ 60.000,00, dando um desconto de 20% para pagamento à vista. Em outro revendedor concorrente, o mesmo trator está marcado com o preço de R$ 64.000,00. Para que a segunda loja possa vender, à vista, pelo mesmo preço da primeira, qual a porcentagem de desconto a ser dada?

Exemplo 3

Sabe-se que numa sala de aula 20% dos estudantes são meninos. Determinar o total de estudantes nas seguintes situações:

a) existem 12 meninos
b) existem 32 meninas

Solução

a) existem 12 meninos

Temos a seguinte regra de três simples e direta:



Total (estudantes)	Meninos
100	20
x	12

Temos: $\frac{100}{x} = \frac{20}{12} \Rightarrow x = \frac{1\,200}{20} \Rightarrow x = 60.$

Assim concluímos que o total de estudantes é 60.

b) existem 32 meninas

Se 20% são meninos, então 80% são meninas. Assim, temos:

Total (estudantes)	Meninas
100	80
x	32

Temos: $\frac{100}{x} = \frac{80}{32} \Rightarrow x = \frac{3\,200}{80} \Rightarrow x = 40.$

Assim concluímos que existem 40 estudantes no total.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

9. Determine o número N nos casos seguintes:

a) 36 é 15% de N

b) 6 é 24% de N

c) N é 12% de 48

d) 20 é N% de 80

e) 4,5 é N% de 15

f) N é 1,5% de 45

10. Ache o número de habitantes de uma cidade nos casos a seguir:

a) 42% dos habitantes são do sexo masculino e 116 000 do sexo feminino.

b) os 312 000 do sexo feminino correspondem a 39% do total.

11. Ao comprar uma mercadoria com 25% de desconto, economizei R$ 18,50. Qual era o preço da mercadoria e quanto foi pago por ela?

Exemplo 4

Num certo mês uma telefonista recebeu R$ 600,00 de salário. No mês seguinte, seu salário foi reajustado em 30%, mas como foi descontado x% relativo às suas faltas, ela acabou recebendo apenas R$ 702,00. Determinar x.

Solução

Se a telefonista não tivesse faltado, teria recebido:

$$\text{R\$ } 600{,}00 + 0{,}30 \times \text{R\$ } 600{,}00 = \text{R\$ } 780{,}00$$

O desconto referente às faltas foi, portanto:

$$\text{R\$ } 780{,}00 - \text{R\$ } 702{,}00 = \text{R\$ } 78{,}00$$

A regra de três simples e direta resolve nosso problema:

Total (R$)	Desconto (R$)
780,00	78,00
100,00	x

Temos: $\dfrac{780,00}{100,00} = \dfrac{78,00}{x} \Rightarrow \dfrac{780}{100} = \dfrac{78,00}{x} \Rightarrow x = 10,00$

O desconto foi de 10%.

Exemplo 5

Na venda de um produto, um comerciante desonesto cobrou de um consumidor R$ 40,00, mas não forneceu a devida nota fiscal. Dessa forma, o comerciante "embolsou" os 18% desse valor, relativos ao ICMS (Imposto sobre Circulação de Mercadorias e Serviços). Sabendo que o lucro do comerciante deveria ser de 25% sobre o custo da mercadoria, determinar:

a) o valor do imposto sonegado
b) qual foi o custo da mercadoria
c) a porcentagem real de lucro do comerciante

Solução

a) o valor do imposto sonegado
O imposto devido era de: 0,18 × R$ 40,00 = R$ 7,20

b) qual foi o custo da mercadoria
Chamando o custo da mercadoria de C, temos:

Custo		Lucro				Venda
C	+	0,25 · C	+	imposto	=	40,00

Como o imposto é de R$ 7,20, temos:

$$C + 0,25 \cdot C + 7,20 = 40,00 \Rightarrow 1,25 \cdot C = 32,80 \Rightarrow C = 26,24$$

O custo foi de R$ 26,24.

c) a porcentagem real de lucro do comerciante
O lucro do comerciante deveria ser de:

$$R\$\ 32,80 - R\$\ 26,24 = R\$\ 6,56$$

Quando ele sonegou o imposto ao não fornecer a nota fiscal, seu lucro passou a ser de:

$$R\$\ 6,56 + R\$\ 7,20 = R\$\ 13,76$$

Dessa forma temos a seguinte regra de três simples e direta:

Sobre (em R$)	Lucrou (em R$)
26,24	13,76
100,00	x

Assim:

$$\frac{26,24}{100,00} = \frac{13,76}{x} \Rightarrow \frac{2\,624}{100} = \frac{13,76}{x} \Rightarrow 2\,624 \times x = 1.376,00 \Rightarrow x \simeq 52,44$$

O lucro do sonegador passou a ser de quase 52,44.

Por isso, sempre ao comprar, exija nota fiscal, pois é com o dinheiro dos impostos que o governo constrói hospitais, escolas etc.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

12. Sabendo que o ICMS relativo à venda de certa mercadoria corresponde a 18% de seu preço, quanto um comerciante desonesto sonega de imposto ao vender a mercadoria por R$ 150,00 e não emitir a respectiva nota fiscal?

13. Um comerciante, após efetuar a venda de certa mercadoria, emitiu a devida nota fiscal. Sabendo que o ICMS devido corresponde a 18% sobre o valor da venda e que o imposto totalizou R$ 27,00, determine o preço da mercadoria vendida.

14. No mês de outubro um funcionário recebeu R$ 800,00. No mês seguinte o salário dele foi reajustado em 32%. Mas como houve um desconto de x% de vales de antecipações de pagamento, o funcionário acabou recebendo a importância de R$ 992,64. Determine x.

15. Sobre uma conta de R$ 54.000,00, vencida mas não paga, o devedor foi multado em 20%. Após certo tempo sem que houvesse o pagamento, devedor e credor chegaram a um acordo, com o credor oferecendo um desconto sobre o total da dívida.

a) Quanto o devedor acabaria pagando se o desconto dado fosse de 5%?
b) Qual seria a porcentagem do desconto se o devedor pagasse R$ 59.616,00?

16. Veja a tabela abaixo com os dados sobre os vencimentos de Antônio e Pedro num determinado mês.

	Salário (R$)	Aumento (%)	Desc. faltas	A receber (R$)
Antônio	720,00	28%	x % do total	875,52
Pedro	960,00	y %	R$ 48,00	1.200,00

Determine:

a) x % relativo às faltas de Antônio
b) y % correspondente ao aumento de Pedro

17. Um comerciante decide fazer uma promoção e reduz seus preços em 10%. Depois se arrepende e resolve remarcar os preços com um acréscimo de 10%. Os novos preços são maiores, menores ou iguais aos iniciais? Em que percentual?

18. Sabendo que o IPMF, "o imposto do cheque", representava uma cobrança de 0,25% sobre o valor de cheques emitidos, determine a quantia relativa ao IPMF cobrada na emissão de um cheque no valor de R$ 8.000,00.

19. Sabendo que o IPMF relativo a um cheque foi de R$ 1.612,50, de quanto foi o cheque?

20. Quando você descontava no banco um cheque no valor de R$ 120.000,00, você pagava 0,25% sobre essa quantia de IPMF. Nessas condições, qual é a porcentagem correspondente ao IPMF sobre o valor líquido recebido?

Exemplo 6

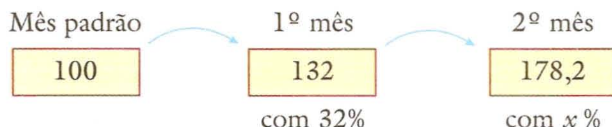
Num certo país, a inflação acumulada em 2 meses foi de 78,2%. Determinar:

a) a inflação do 2º mês, sabendo que a do 1º foi de 32%.
b) a inflação do 1º mês, sabendo que a do 2º foi de 35%.

Solução

a) a inflação do 2º mês

Chamando de x a inflação do 2º mês, temos:



Do 1º mês para o 2º, houve um aumento de:

$$178{,}2 - 132 = 46{,}2$$

A regra de três simples e direta resolve nosso problema:

Em	Aumento
132	46,2
100	x

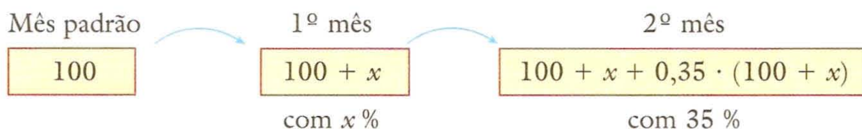
Então:

$$\frac{132}{100} = \frac{46{,}2}{x} \Rightarrow x = \frac{46{,}2 \cdot 100}{132} = 35$$

A inflação do 2º mês foi, portanto, de 35%.

b) a inflação do 1º mês

Chamando de x a inflação do 1º mês, temos:



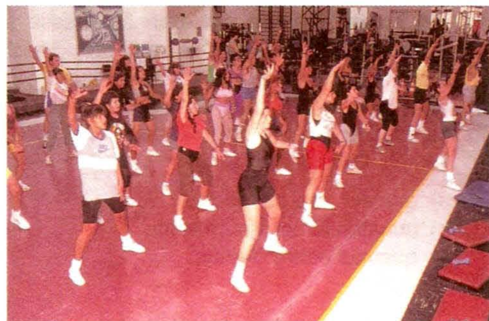
Como a inflação acumulada foi de 78,2 %, temos:

$$100 + x + 0{,}35 \cdot (100 + x) - 100 = 78{,}2 \Rightarrow x + 35 + 0{,}35 \cdot x = 78{,}2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1{,}35 \cdot x = 43{,}2 \Rightarrow x = 32$$

A inflação do 1º mês foi de 32%.

Exemplo 7

Uma academia de ginástica é freqüentada por 400 alunos, dos quais 20% são homens. Depois de uma promoção, o número de alunas aumenta e a porcentagem de homens cai para 16%. Quantas mulheres começaram a freqüentar a academia depois da promoção?


Nélio Rodrigues / Abril Imagens

Solução

Freqüentavam inicialmente a academia:

$$0{,}20 \times 400 = 80 \text{ homens}$$
$$0{,}80 \times 400 = 320 \text{ mulheres}$$

Chamando de x o número de mulheres que entraram depois da promoção, a situação ficou assim:

$$\begin{array}{rl} & 80 \text{ homens} \\ & \underline{320 + x \text{ mulheres}} \\ \text{Total:} & 400 + x \end{array}$$

Como 16% desse total são homens e, como sabemos, existem 80 deles, temos:

$$0{,}16 \cdot (400 + x) = 80 \Rightarrow 64 + 0{,}16 \cdot x = 80 \Rightarrow 0{,}16 \cdot x = 16 \Rightarrow x = 100$$

Assim sendo, entraram 100 mulheres a mais.

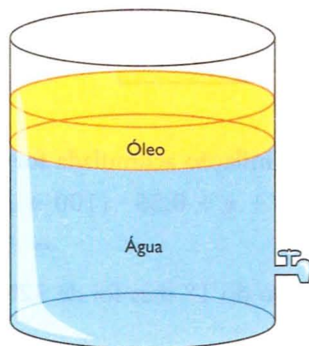
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

21. Num certo país, a inflação nos últimos 4 meses foi de 32%, 33%, 34% e 34%. Determine a inflação acumulada nesses 4 meses.

22. Num certo país, a inflação acumulada nos últimos 3 meses foi de 86%. Determine:

a) a inflação do 3º mês, sabendo que a do 1º foi de 20% e a do 2º, 25%.
b) a inflação do 2º mês, sabendo que a do 1º foi de 20% e a do 3º, 24%.

23. A figura mostra um tanque que contém 400 ℓ de água e 100 ℓ de óleo, o qual, por ser menos denso que a água, fica na parte de cima, e a água no fundo, de modo que, abrindo-se a torneira, sairá somente água. Determine quantos litros de água devem sair de tal forma que o óleo corresponda a 25% do total do líquido restante.



24. Na China, existem atualmente cerca de 750 ursos panda, espécie em extinção. Desse total, 52% são fêmeas e o restante, machos. Suponhamos que elas comecem a morrer, de tal modo que o número de fêmeas restantes represente apenas 25% do total de animais sobreviventes. Determine:

a) quantos são os machos;
b) quantas fêmeas morreram;
c) quantas sobreviveram.



Urso panda.

25. Um comerciante colocou etiquetas em seus produtos, mostrando os preços de venda, calculados com um lucro de 25% sobre o custo. Desejando numa remarcação garantir um lucro de 30% sobre o custo, determine o percentual de aumento nos preços das mercadorias.

2. Juros

Consideremos a seguinte questão:

A importância de R$ 600,00 é aplicada numa instituição financeira à taxa de 6% ao mês (a.m.), durante 3 meses. Qual o montante após esse tempo?

Problemas desse tipo, assim como outros sobre aplicações financeiras, descontos etc., são muito comuns nos dias de hoje.

Entendendo por **juro** o pagamento feito pela utilização do dinheiro aplicado, o problema dado é um típico problema de cálculo de juros.

Existem duas formas de o problema ser encarado:

a) Os juros só serão acrescentados ao capital inicialmente aplicado após o término da aplicação. Nessas condições dizemos que estamos calculando **juros simples**.

b) Os juros serão incorporados ao capital após cada período de tempo (no exemplo dado, o período de tempo é de 1 mês). Nessas condições dizemos que estamos calculando **juros compostos**.

Juros simples

No problema apresentado anteriormente, temos:

- capital aplicado .... R$ 600,00
- taxa % **ao mês** .... 6% ao mês, ou 0,06 ao mês
- tempo **em meses** .... 3 meses

} **Mesma unidade de tempo**

Temos que:

- após o 1º período, os juros serão: 0,06 · R$ 600,00 = R$ 36,00
- após o 2º período, os juros serão: R$ 36,00 + R$ 36,00 = R$ 72,00
- após o 3º período, os juros serão: R$ 72,00 + R$ 36,00 = R$ 108,00

Assim, o montante (capital mais rendimentos) será de:

R$ 600,00 + R$ 108,00 = R$ 708,00

Vamos generalizar, deduzindo uma fórmula para calcular os juros simples.

Sejam:

$$\begin{cases} C = \text{capital aplicado} \\ i = \text{taxa \% por período de tempo} \\ t = \text{número de períodos de tempo} \end{cases}$$

Então, temos:

- após o 1º período, o total de juros será: $C \cdot i$;
- após o 2º período, o total de juros será: $C \cdot i + C \cdot i$;
- após o 3º período, o total de juros será: $C \cdot i + C \cdot i + C \cdot i$;
- após o t-ésimo período, o total de juros será: $\underbrace{C \cdot i + C \cdot i + \ldots + C \cdot i}_{t \text{ parcelas}}$.

Assim, a fórmula que fornece o total de juros simples é:

$$\boxed{j = C \cdot i \cdot t}$$

O montante final é de:

$$\boxed{M = C + j}$$

Vamos resolver novamente nosso problema, utilizando as fórmulas citadas.

Calculando os juros simples, temos:

$$j = \text{R\$ } 600{,}00 \cdot 0{,}06 \cdot 3 = \text{R\$ } 108{,}00$$

O montante será de:

$$M = C + j = \text{R\$ } 600{,}00 + \text{R\$ } 108{,}00 = \text{R\$ } 708{,}00$$

Vejamos mais alguns exemplos.

Exemplo 1

Uma pessoa aplica a terça parte do seu capital a 5% ao mês, a quarta parte a 8% ao mês e o restante a 6% ao mês. No fim do mês recebe R$ 1.480,00 de rendimentos. Calcular o capital inicial.

Solução

Chamando de C o capital, temos:

- $\frac{C}{3}$ foi aplicado a 5% a.m.
- $\frac{C}{4}$ foi aplicado a 8% a.m.

Então resta a ser aplicado (a 6% a.m.):

$$C - \frac{C}{3} - \frac{C}{4} = \frac{12 \cdot C - 4 \cdot C - 3 \cdot C}{12} = \frac{5 \cdot C}{12}$$

Assim sendo, após 1 mês tem-se:

$$\frac{5}{100} \cdot \frac{C}{3} + \frac{8}{100} \cdot \frac{C}{4} + \frac{6}{100} \cdot \frac{5 \cdot C}{12} = 1.480,00$$

Multiplicando os dois membros da equação anterior por 1 200, encontramos:

$$20 \cdot C + 24 \cdot C + 30 \cdot C = 1.776.000{,}00$$

portanto:

$$C = 24.000{,}00$$

Assim, concluímos que o capital inicial era de R$ 24.000,00.

Exemplo 2

Determinar em quanto tempo um capital quadruplicará a juros simples quando aplicado a 10% ao mês.

Solução

Chamando de t o número de meses para que um capital C quadruplique, temos que os juros produzidos são o triplo do capital inicial, ou seja, $j = 3 \cdot C$.

Portanto:

$$j = C \cdot i \cdot t \Rightarrow 3 \cdot C = C \cdot i \cdot t \Rightarrow 3 \cdot C = C \cdot 0{,}10 \cdot t \Rightarrow 0{,}10 \cdot t = 3 \Rightarrow t = 30$$

O tempo necessário é de 30 meses, ou seja, dois anos e meio.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

26. Calcular os juros simples produzidos por um capital de R$ 36.000,00 quando aplicado:

a) a 8% a.m. em 5 meses
b) a 6,5% a.m. em 2 meses
c) a 8% a.m., na terça parte de um ano
d) a 5,5% a.m. em meio ano
e) a 20% ao ano em 1 ano
f) a 0,5% ao dia em 18 dias

27. Um capital de R$ 60.000,00 foi aplicado a juros simples. Determine a taxa de aplicação, sabendo que:

a) ele rendeu R$ 12.000,00 em 2 meses.
b) ele rendeu R$ 36.000,00 em 4 meses.
c) ele produziu um montante de R$ 78.000,00 em 2 meses.
d) ele rendeu R$ 1.200,00 em 2 dias.

28. Calcule o montante de um capital de R$ 6.400,00 aplicado a juros simples, nos casos seguintes:

a) depois de 6 meses, a 7,5% a.m.
b) depois de um quarto de ano, a 5,2% a.m.
c) depois de 8 dias, a 0,5% ao dia.

29. Calcule o tempo em que um capital de R$ 240.000,00 ficou aplicado a juros simples, de modo a:

a) ter rendido R$ 76.800,00, a 8% ao mês.
b) ter rendido R$ 8.640,00, a 0,4% ao dia.
c) ter duplicado, a 5% ao mês.
d) ter produzido um montante de R$ 360.000,00, a 10% ao mês.

30. Determine o capital que, aplicado a juros simples:

a) rende R$ 12.240,00, a 8,5% ao mês, em 4 meses.
b) rende R$ 48.000,00, a 30% ao ano, em 2 anos.
c) produz um montante de R$ 79.200,00, a 0,4% ao dia, em 25 dias.

31. Um capital C, aplicado a juros simples, triplicou em 16 meses. A que taxa % ao mês foi aplicado?

32. Para que um capital, investido a juros simples, duplique a 10% a.m., ele deve ficar aplicado durante quanto tempo?

Juros compostos

Quando estudamos juros simples, calculamos o montante produzido por R$ 600,00, aplicados a 6% a.m., depois de 3 meses. Obtivemos um montante final de R$ 708,00.

No entanto é muito mais comum as aplicações serem feitas a **juros compostos**, ou seja, após cada período de tempo, os juros são integrados ao capital, passando também a render juros, como, por exemplo, nas cadernetas de poupança.

Vamos refazer aquele problema, utilizando juros compostos:

- após o 1º período (mês), o montante será:

$$1{,}06 \cdot \text{R\$ } 600{,}00 = \text{R\$ } 636{,}00$$

- após o 2º período (mês), o montante será:

$$1{,}06 \cdot \text{R\$ } 636{,}00 = \text{R\$ } 674{,}16$$

- após o 3º período (mês), o montante será:

$$1{,}06 \cdot \text{R\$ } 674{,}16 = \text{R\$ } 714{,}61$$

Esse é o montante final, representado por M.

Observe que esse montante é maior do que o achado anteriormente, quando utilizamos juros simples.

Assim, como fizemos para juros simples, vamos encontrar uma fórmula para o cálculo de juros compostos.

Sejam:

$$\begin{cases} C = \text{capital inicial} \\ i = \text{taxa \% por período de tempo} \\ t = \text{número de períodos de tempo} \\ M = \text{montante final} \end{cases}$$

Então:

- após o 1º período (mês), o montante será: $M_1 = C + i \cdot C \Rightarrow M_1 = C \cdot (1 + i)$;
- após o 2º período (mês), o montante será: $M_2 = M_1 + i \cdot M_1 \Rightarrow M_2 = M_1 \cdot (1 + i) \Rightarrow$ $\Rightarrow M_2 = [C \cdot (1 + i)] \cdot (1 + i) \Rightarrow M_2 = C \cdot (1 + i)^2$;
- após o 3º período (mês), o montante será: $M_3 = M_2 + i \cdot M_2 \Rightarrow M_3 = M_2 \cdot (1 + i) \Rightarrow$ $\Rightarrow M_3 = [C \cdot (1 + i)^2] \cdot (1 + i) \Rightarrow M_3 = C \cdot (1 + i)^3$.

Procedendo de modo análogo, é fácil concluir que, após t períodos de tempo, o valor M_t, que indicaremos simplesmente por M, será:

$$\boxed{\mathbf{M = C \cdot (1 + i)^t}}$$

Assim, resolvendo novamente o problema dado, temos:

$$M = \text{R\$ } 600{,}00 \cdot (1 + 0{,}06)^3 \Rightarrow M = \text{R\$ } 600{,}00 \cdot 1{,}191\,016 \Rightarrow M = \text{R\$ } 714{,}61$$

Observação: na fórmula para o cálculo de M aparecem quatro variáveis. Podemos encontrar qualquer uma delas, desde que se conheçam as outras três.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1

Os juros produzidos pela caderneta de poupança são juros compostos, pois, após cada mês, os juros são incorporados ao capital. Nessas condições, qual o montante produzido por R$ 720.000,00, em 4 meses, a 10% ao mês?

Solução

Temos: $M = C \cdot (1 + i)^t$, em que:

$$\begin{cases} M = ? \\ C = \text{R\$ } 720.000{,}00 \\ i = 10\% \text{ ou } 0{,}1 \textbf{ ao mês} \\ t = 4 \textbf{ meses} \end{cases}$$

(para i e t:) **Mesma unidade de tempo**

Então:

$$M = \text{R\$ } 720.000{,}00 \cdot (1 + 0{,}1)^4 \Rightarrow M = \text{R\$ } 720.000{,}00 \cdot 1{,}464\,1 = \text{R\$ } 1.054.152{,}00$$

O montante final será de R$ 1.054.152,00.

EXERCÍCIO PROPOSTO

33. A quantia de R$ 60.000,00 foi aplicada a juros compostos. Determine o montante obtido:

a) depois de 2 meses, a 8% a.m.

b) depois de 4 meses, a 7% a.m.

c) depois de 3 dias, a 0,2% ao dia.

d) depois de um quarto de ano, a 10% ao mês .

Exemplo 2
Qual o capital que, aplicado em caderneta de poupança, produz um montante de R$ 41.674,50 em 3 meses, a 5% ao mês?

Solução

Temos: $M = C \cdot (1 + i)^t \Rightarrow C = \dfrac{M}{(1 + i)^t}$, em que:

$$\begin{cases} M = \text{R\$ } 41.674{,}50 \\ C = ? \\ i = 5\% \text{ ou } 0{,}05 \textbf{ ao mês} \\ t = 3 \textbf{ meses} \end{cases} \left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} \text{Mesma unidade de tempo}$$

Então:

$$C = \frac{\text{R\$ } 41.674{,}50}{(1{,}05)^3} = \frac{\text{R\$ } 41.674{,}50}{1{,}157\,625} = \text{R\$ } 36.000{,}00$$

O capital aplicado é R$ 36.000,00.

EXERCÍCIO PROPOSTO

34. Determine o capital que, aplicado a juros compostos:

a) produz um montante de R$ 13.996,80, em 2 meses, a 8% a.m.
b) produz um montante de R$ 224.972,80, em 3 meses, a 4% a.m.
c) produz R$ 5.730,48 de juros, em 3 meses, a 6% a.m.
d) produz R$ 480,48 de juros, em 2 dias, a 0,2% ao dia.

Exemplo 3
Determinar em quantos meses um capital de R$ 240.000,00 produz R$ 37.830,00 de rendimento, quando aplicado a juros compostos, a 5% ao mês.

Solução
Encontrando inicialmente o montante final, temos:

$$M = \text{R\$ } 240.000{,}00 + \text{R\$ } 37.830{,}00 = \text{R\$ } 277.830{,}00$$

Então: $M = C \cdot (1 + i)^t$, em que:

$$\begin{cases} M = \text{R\$ } 277.830{,}00 \\ C = \text{R\$ } 240.000{,}00 \\ i = 5\% \text{ ou } 0{,}05 \textbf{ ao mês} \\ t = ? \textbf{ meses} \end{cases} \left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} \text{Mesma unidade de tempo}$$

Assim:

$$(1 + i)^t = \frac{M}{C} \Rightarrow (1 + 0{,}05)^t = \frac{\text{R\$ } 277.830{,}00}{\text{R\$ } 240.000{,}00} = 1{,}157\,63$$

Portanto:

$$(1 + 0{,}05)^t = 1{,}157\,63$$

Aplicando logaritmos nos dois membros, temos:

$$t \cdot \log(1{,}05) = \log 1{,}157\,63 \Rightarrow t = \frac{\log 1{,}157\,63}{\log 1{,}05} = \frac{0{,}063\,57}{0{,}021\,19} = 3$$

O capital ficou aplicado durante 3 meses.

Exemplo 4

Foram aplicados R$ 50.000,00 a juros compostos a 10% a.m. Determinar depois de quanto tempo essa quantia rendeu R$ 23.205,00.

Solução

Temos: $M = C \cdot (1 + i)^t$ e $M = C + j$, em que t é o tempo em meses.

Então:

$$\text{R\$ } 50.000{,}00 \cdot (1 + 0{,}1)^t = \text{R\$ } 50.000{,}00 + \text{R\$ } 23.205{,}00 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 50.000 \cdot (1{,}1)^t = 73.205{,}00 \Rightarrow (1{,}1)^t = 1{,}464\,1$$

Aplicando logaritmos nos dois membros, encontramos:

$$t \cdot \log 1{,}1 = \log 1{,}464\,1 \Rightarrow t = \frac{\log 1{,}464\,1}{\log 1{,}1} = \frac{0{,}165\,57}{0{,}041\,39} = 4$$

O tempo de aplicação foi de 4 meses.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

35. Determine quanto tempo ficou aplicado um capital de R$ 200.000,00 a juros compostos, nos seguintes casos:

a) o montante foi de R$ 292.820,00, a 10% a.m.
b) o montante foi de R$ 203.015,02, a 0,5% ao dia.

36. Determine o tempo de aplicação de um capital de R$ 500.000,00 a juros compostos, de modo que:

a) a 8% a.m., renda juros de R$ 83.200,00.
b) a 0,5% ao dia, renda juros de R$ 5.012,50.

Exemplo 5

A que taxa percentual ao mês foi aplicado, em caderneta de poupança, um capital de R$ 300.000,00 para, na quarta parte do ano, produzir um montante de R$ 347.287,50?

Solução

Como o problema pede a taxa percentual **ao mês**, deveremos trabalhar com o tempo **em meses**. Como a quarta parte do ano equivale a 3 meses, temos:

$$M = C \cdot (1 + i)^t, \text{ em que } \begin{cases} M = \text{R\$ } 347.287{,}50 \\ C = \text{R\$ } 300.000{,}00 \\ i = \text{? \% \textbf{ao mês}} \\ t = 3 \textbf{ meses} \end{cases}$$

(i e t:) **Mesma unidade de tempo**

Então:

$$(1 + i)^t = \frac{M}{C} \Rightarrow (1 + i)^t = \frac{347.287{,}50}{300.000{,}00} \Rightarrow (1 + i)^t = 1{,}157\,6$$

Aplicando logaritmos nos dois membros, temos:

$$\log[(1+i)^3] = \log 1{,}1576 \Rightarrow 3 \cdot \log(1+i) = 0{,}0636 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log(1+i) \Rightarrow 0{,}0212 \Rightarrow (1+i) = 1{,}05 \Rightarrow i = 0{,}05$$

A taxa foi de 5% ao mês.

EXERCÍCIO PROPOSTO

37. A que taxa devem ser aplicados R$ 120.000,00 a juros compostos, de modo a:

a) produzir um montante de R$ 175.692,00 em 4 meses?
b) produzir um montante de R$ 142.572,00 na sexta parte do ano?
c) render R$ 17.388,00 de juros em 2 meses?
d) render R$ 961,92 de juros em 2 dias?

RELEMBRANDO CONCEITOS

Juros simples	Juros compostos
$j = C \cdot i \cdot t$	$M = C \cdot (1+i)^t$
$M = C + j$	$M = C + j$
j = juros simples	j = juros produzidos
C = capital aplicado	C = capital inicial
t = número de períodos de tempo	t = número de períodos de tempo
i = taxa % por período de tempo	i = taxa % por período de tempo
M = montante	M = montante final

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

38. Determine:

a) $(4\%)^2$ de 600 b) 4% de 600^2 c) (4% de 600) ao quadrado

39. O preço do produto *A* é 65% do preço do produto *B*, que representa 40% do preço do produto *C*, que custa R$ 130.000,00. Qual o preço do produto *A*?

40. Um ciclista, à velocidade constante de *v* km/h percorre a distância desde a cidade *A* até a cidade *B* em 10 horas. Em que percentual deverá aumentar sua velocidade para fazer o mesmo percurso em 8 horas?


M. Carr / Zephyr-Stock Photos

41. Sobre o preço etiquetado de certa mercadoria foram feitas três remarcações sucessivas (para cima) de 10% cada uma. Determine o percentual da remarcação total sobre o preço original marcado na etiqueta.

42. Se o preço do combustível foi reajustado duas vezes num certo mês, sendo o primeiro reajuste de 16% e o segundo, de 15%, determine o percentual do reajuste mensal do preço.

43. Quais das afirmações seguintes são verdadeiras?

a) Após o desconto de 15%, um produto passou a custar R$ 60.000,00. Seu preço antes da remarcação era de R$ 69.000,00.
b) 20% de 40 é o mesmo que 40% de 20.
c) Se a inflação de um certo mês foi de 30% e a do mês seguinte, de 32%, a inflação acumulada foi de 62%.
d) 35% de 80% é 28%.
e) 8% de 50% é o mesmo que 40% de 10%.

44. Supondo a taxa de aplicação constante, assinale qual das opções seguintes é mais vantajosa para a aplicação de R$ 500.000,00.

a) Durante 32 dias e receber de volta R$ 700.000,00.
b) Durante 40 dias e receber de volta R$ 740.000,00.

45. Para que um capital *C*, colocado a juros simples durante 2 meses, a 22% ao mês, produza o mesmo rendimento de quando aplicado a juros compostos, durante os 2 meses, qual deve ser a taxa % a.m. para a aplicação?

46. (Faap-SP) Uma certa loja faz a seguinte promoção: "Compre sua televisão hoje por R$ 142.805,00 e nós lhe devolveremos o dinheiro daqui a 4 meses". Se a taxa de inflação é de 30% ao mês, qual o desconto que está sendo oferecido?

47. A tabela seguinte mostra as várias faixas para desconto do Imposto de Renda (IR) na fonte de pagamento, para janeiro de 1994:

Tabela para cálculo do IR na fonte em janeiro		
Base de cálculo (R$)	**Alíquota (%)**	**Parcela a deduzir (R$)**
Até 642,80	isento	–
De 642,81 até 1.253,46	15	96,42
De 1.253,47 até 11.570,40	26,6	241,94
De 11.570,41 até 99.999,99	35	1.213,77

Determine o valor do IR a ser descontado na fonte de pagamento se o ganho da pessoa for:

a) de R$ 350,00
b) de R$ 900,00
c) de R$ 1.500,00
d) Quanto receberá, após descontado o IR, uma pessoa cujo salário é de R$ 780,00?

48. *A* devia a *B* a importância de R$ 150.000,00 e efetuou o pagamento depositando a importância na conta de *B*. No entanto, quando *B* sacou o dinheiro de sua conta, pagou 0,25% de IPMF. Assim sendo, para que *B* não tenha sido prejudicado, qual a quantia mínima que *A* deveria depositar de modo que *B* sacasse livre os R$ 150.000,00?

49. (Fuvest-SP) Um recipiente contém uma mistura de leite natural e de leite de soja, num total de 200 ℓ, dos quais 25% são de leite natural. Qual é a quantidade de leite de soja que deve ser acrescentada a essa mistura para que ela venha a conter 20% de leite natural?

50. (Vunesp) A diferença entre o preço de venda anunciado de uma mercadoria e o preço de custo é igual a R$ 2.000,00. Se essa mercadoria for vendida com um desconto de 10% sobre o preço anunciado, dará ainda um lucro de 20% ao comerciante. Determine seu preço de custo.

51. Na arrecadação do IPVA (Imposto sobre Propriedade de Veículos Automotivos) de 1994, o governo ofereceu para pagamento total antecipado (até 14 de janeiro) um desconto de 32%. Para o pagamento total com vencimento para 15 de fevereiro, o governo retirou o desconto.

a) Supondo que a taxa de aplicação de dinheiro nesse período fosse de 40% ao mês, seria mais vantajoso o pagamento antecipado com desconto ou o pagamento sem desconto?

b) A partir de que taxa de aplicação para o dinheiro o pagamento em 15 de fevereiro sem desconto seria mais vantajoso? (Resposta com 2 "casas" decimais.)

TESTES

52. (Unisinos-RS) A taxa de evasão escolar no final do 1º grau brasileiro é uma das mais altas do mundo: aproximadamente 70%. O Brasil tem um dos mais altos índices de analfabetismo, entre os países subdesenvolvidos mais populosos. (*IstoÉ*, 20.10.93.)

LONGE DAS AULAS							
Faixa etária	TOTAL	15 a 19	20 a 24	25 a 29	30 a 39	40 a 49	50 e mais
População analfabeta	17.732.692	1.405.489	1.276.786	1.227.484	2.750.534	3.178.937	7.893.399

Consultando os dados da tabela, pode-se afirmar que, aproximadamente:

a) 10,5% da população analfabeta está na faixa etária 20 a 24 anos.
b) 20,3% da população analfabeta está na faixa etária 40 a 49 anos.
c) 17,5% da população analfabeta está na faixa etária 30 a 39 anos.
d) 6,3% da população analfabeta está na faixa etária 15 a 19 anos.
e) 44,5% da população analfabeta tem 50 anos e mais.

53. (UFRS) Um negociante recebeu uma encomenda de 4,05 t de café torrado. Supondo que o café em grão perca 19% de seu peso na torrefação, quantas toneladas de café em grão precisa o negociante torrar para atender exatamente à encomenda?

a) 3,28 b) 4,00 c) 5,00 d) 6,00 e) 7,69

54. (Osec-SP) Uma pessoa tinha um total de x balas para distribuir. Numa primeira etapa, distribuiu 25% do total e, numa segunda, 40% do número restante. Se sobraram 18 balas, o valor de x é:

a) 34 b) 37 c) 38 d) 40 e) 45

55. (UFPI) A fabricação de um produto numa empresa foi de 120 000 toneladas em 1990 e de 145 200 toneladas em 1992. O aumento anual médio, na fabricação desse produto, alcançado pela empresa nesse período foi:

a) menor que 8%
b) entre 8% e 11%
c) entre 12% e 15%
d) entre 16% e 19%
e) maior que 20%

56. Numa fila, onde comprava ingressos para uma final de campeonato de futebol, um torcedor comenta que vai gastar R$ 73,00 com 2 ingressos para cadeiras numeradas e 5 para a arquibancada, enquanto o companheiro ao lado vai pagar R$ 74,00 por 4 ingressos para cadeiras numeradas e 2 para a arquibancada. Podemos afirmar, corretamente, que o preço do ingresso para arquibancada é:

a) R$ 16,00
b) R$ 7,00
c) R$ 8,00
d) R$ 9,00
e) R$ 10,00



Flávio Ciro / Abril Imagens

57. (Unifor-CE) Dos candidatos inscritos num concurso vestibular, sabe-se que o número de mulheres está para o de homens na razão $\frac{9}{11}$. A porcentagem de mulheres inscritas nesse concurso é:

a) 45% b) 42,5% c) 40% d) 39,5% e) 38%

58. (UFSE) Examine a tabela abaixo, que apresenta a variação percentual do preço da cesta básica em relação à semana anterior.

SEMANA	VARIAÇÃO
3ª semana de outubro	+8%
4ª semana de outubro	+5%

Nessas duas semanas, o aumento percentual em relação à 2ª semana de outubro foi de:

a) 13,4% b) 12,0% c) 9,8% d) 4,0% e) 1,12%

59. (Unifor-CE) Um grupo de amigos comprou um presente por R$ 630,00. Pretendiam dividir essa quantia entre si, em partes iguais. Como 2 membros do grupo não puderam cumprir o compromisso, cada um dos restantes teve sua parcela aumentada de R$ 36,00. O número de pessoas do grupo era, inicialmente:

a) 12 b) 15 c) 9 d) 8 e) 7

60. (Fuvest-SP) Uma loja vende seus artigos nas seguintes condições: à vista com 30% de desconto sobre o preço de tabela ou no cartão de crédito com 10% de acréscimo sobre o preço de tabela. Um artigo que à vista sai por R$ 7.000,00, no cartão sairá por:

a) R$ 13.000,00
b) R$ 11.000,00
c) R$ 10.010,00
d) R$ 9.800,00
e) R$ 7.700,00

61. (Mogi-SP) Um comerciante antes de colocar em oferta um determinado produto aumenta o seu preço em 20%. Se o desconto proposto é também de 20%, o comprador pagará pelo produto:

a) o preço inicial
b) o preço inicial com um aumento de 20%
c) o preço inicial com um aumento de 4%
d) o preço inicial com um desconto de 4%
e) o preço inicial com um desconto de 24%

62. (Osec-SP) Uma loja de departamentos instrui seus vendedores para calcular o preço da mercadoria, pelo cartão de crédito, dividindo o preço à vista por 0,80. Dessa forma, podemos concluir que o valor da compra sofreu:

a) redução de 20%
b) acréscimo de 20%
c) acréscimo de 80%
d) acréscimo de 25%
e) redução de 25%

63. Uma loja vendia camisetas com acréscimo de 50% sobre o custo. Como as vendas caíram, a loja ofereceu 20% de desconto no preço de venda, para pagamento à vista, a R$ 12,00 a unidade. Se a loja deseja lucrar R$ 100,00 com as vendas à vista, deverá vender:

a) 50 camisetas
b) 35 camisetas
c) 22 camisetas
d) 10 camisetas
e) 15 camisetas

64. (Mackenzie-SP) O preço de compra de um certo produto é x; se for vendido por k, haverá, em relação a x, um prejuízo de 20%. Então, se for vendido por $3k$, haverá, em relação a x, um lucro de:

a) 40% b) 140% c) 60% d) 160% e) 240%

65. (UFPI) Um usuário de cartão de crédito paga parte de sua dívida num determinado mês, deixando R$ 12.500,00 para serem pagos no vencimento seguinte. Trinta dias após, ele paga R$ 18.125,00. A taxa mensal de juros cobrada pela administradora do cartão foi de:

a) 30% ou menos
b) 31% a 35%
c) 36% a 40%
d) 41% a 45%
e) 46% ou mais

Capítulo

11 Trigonometria no triângulo retângulo

1. Introdução

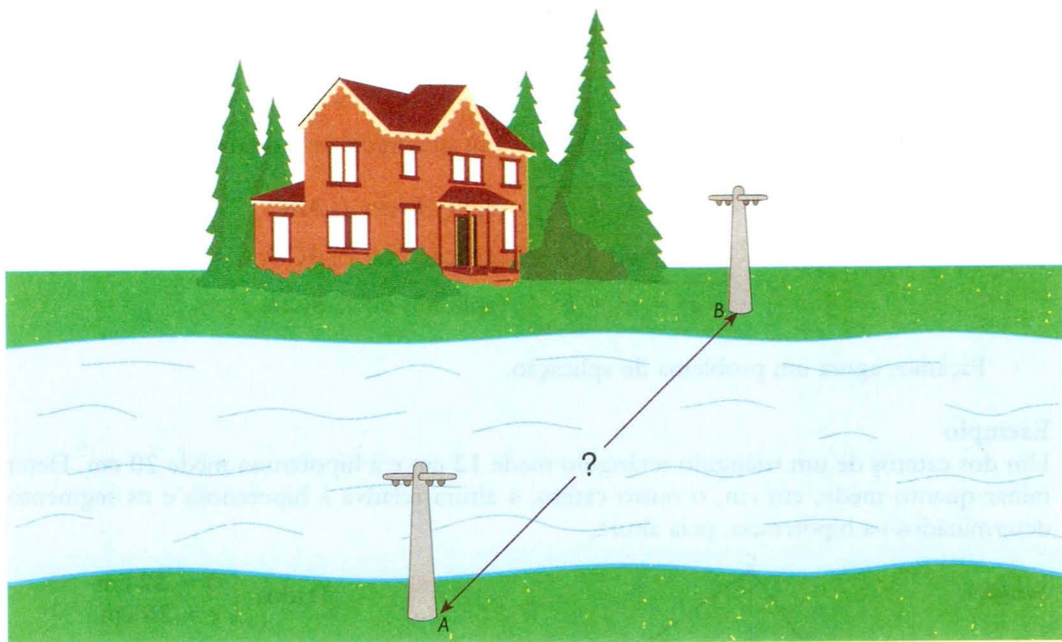
No 1º grau, já estudamos as relações entre os lados, entre os ângulos e entre lados e ângulos de um triângulo.

Neste capítulo vamos rever algumas dessas relações e aprender outras novas, para que, com esses conhecimentos e outros a serem estudados, possamos resolver problemas de aplicação mais complexos, como o da situação a seguir.

Imagine por exemplo que numa propriedade rural esteja sendo instalada uma rede de energia elétrica.

Para a ligação entre dois postes quaisquer, o eletricista necessita saber a distância entre eles a fim de calcular a metragem de fio a ser utilizada.

Num determinado trecho da propriedade, passa um pequeno rio, e a medição direta da distância entre dois postes *A* e *B* é impossível. Veja a ilustração:



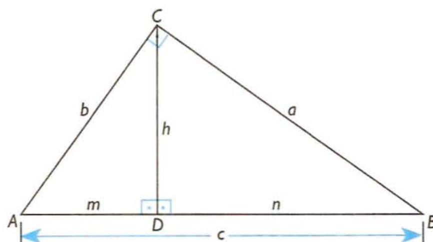
Como o eletricista calculará essa distância?

No final deste capítulo, você poderá ajudá-lo a solucionar o problema.

2. Revendo conceitos já estudados sobre triângulos retângulos

Vamos relembrar agora algumas relações importantes entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo. Essas relações foram vistas quando você cursou a 8ª série do 1º grau.

Seja o triângulo retângulo ABC (reto em $\hat{C}$) e $\overline{CD}$ a altura relativa à hipotenusa.



Observação: nas sentenças a seguir, quando falarmos em catetos, hipotenusa, projeção e altura, estaremos nos referindo às suas medidas.

Com base na **semelhança dos triângulos** ABC, ACD e CBD, foram provadas as seguintes afirmações:

- Cada cateto é média proporcional entre a hipotenusa e sua projeção ortogonal sobre ela, ou seja:

$$b^2 = c \cdot m \quad \text{e} \quad a^2 = c \cdot n$$

- A altura relativa à hipotenusa é média proporcional entre os dois segmentos que ela determina na hipotenusa, ou seja:

$$h^2 = m \cdot n$$

- O produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura, ou seja:

$$a \cdot b = c \cdot h$$

- **Teorema de Pitágoras**

  O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos, ou seja:

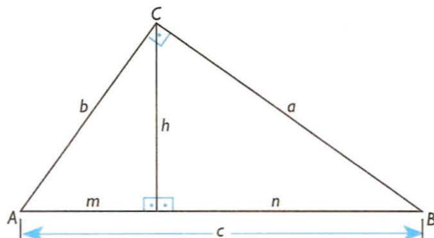
$c^2 = a^2 + b^2$	(aplicado no $\triangle ABC$)
$b^2 = m^2 + h^2$	(aplicado no $\triangle ACD$)
$a^2 = n^2 + h^2$	(aplicado no $\triangle BCD$)

Façamos agora um problema de aplicação.

Exemplo

Um dos catetos de um triângulo retângulo mede 12 cm e a hipotenusa mede 20 cm. Determinar quanto mede, em cm, o outro cateto, a altura relativa à hipotenusa e os segmentos determinados na hipotenusa, pela altura.

Solução



Dados $\begin{cases} b = 12 \text{ cm} \\ c = 20 \text{ cm} \end{cases}$

Achar $\begin{cases} a = ? \\ h = ? \\ m = ? \\ n = ? \end{cases}$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, temos $a^2 + b^2 = c^2$.

Então $a^2 + 144 = 400 \Rightarrow a^2 = 400 - 144 \Rightarrow a^2 = 256 \Rightarrow a = 16$.

Como $c \cdot n = a^2 \Rightarrow 20 \cdot n = 256 \Rightarrow n = \dfrac{256}{20} \Rightarrow n = \dfrac{128}{10} \Rightarrow n = 12{,}8$.

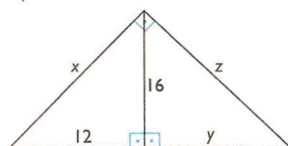
Temos: $m + n = c \Rightarrow m + 12{,}8 = 20 \Rightarrow m = 20 - 12{,}8 \Rightarrow m = 7{,}2$.

Como $c \cdot h = a \cdot b$, temos: $20 \cdot h = 16 \cdot 12 \Rightarrow h = \dfrac{\overset{4}{\cancel{16}} \cdot 12}{\underset{5}{\cancel{20}}} \Rightarrow h = \dfrac{48}{5} \Rightarrow h = 9{,}6$.

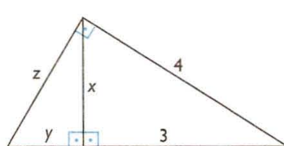
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Determine o valor de x, y e z nos triângulos abaixo:

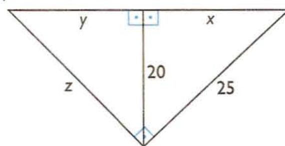
a)



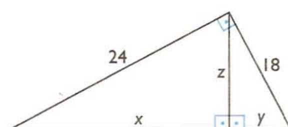
c)



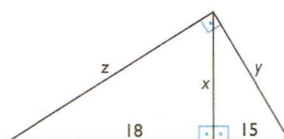
e)



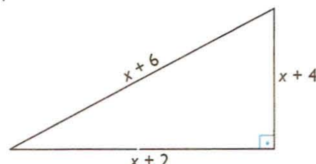
b)



d)



f)



2. Se a diagonal de um quadrado mede L, quanto mede:

a) seu lado? b) seu perímetro?

3. O lado de um triângulo eqüilátero mede L. Quando mede sua altura?

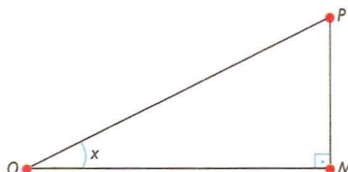
4. A altura de um triângulo eqüilátero mede h. Quanto mede seu lado?

5. Num triângulo retângulo a hipotenusa mede 3 cm a mais que o maior cateto e este mede 3 cm a mais que o menor cateto. Quanto mede cada um dos lados do triângulo?

6. Um observador está a 120 m de distância do topo de uma torre. Quando ele anda 42 m em direção ao pé da torre, sua distância ao topo passa a ser 90 m. Qual a altura da torre?

3. Aprendendo novos conceitos

Seja o triângulo retângulo OMP, reto em M.



Seja x a medida do ângulo $M\hat{O}P$. Podemos estabelecer entre as medidas de seus lados as seguintes razões:

Seno

Seno de x é a razão entre a medida do lado oposto ao ângulo $\hat{O}$ e a medida da hipotenusa. Indicando o **seno de x** por **sen x** e considerando $\overline{OP}$ como unidade de comprimento, temos:

$$\text{sen } x = \frac{MP}{OP} = \frac{MP}{1} = MP$$

Cosseno

Cosseno de x é a razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo $\hat{O}$ e a medida da hipotenusa. Indicando o **cosseno de x** por **cos x**, temos:

$$\cos x = \frac{OM}{OP} = \frac{OM}{1} = OM \Rightarrow \cos x = OM$$

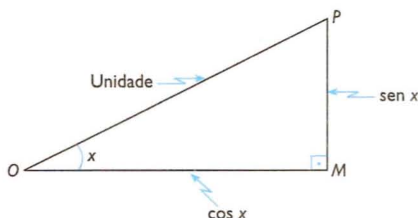
Tangente

Tangente de x é a razão entre as medidas do cateto oposto e do cateto adjacente ao ângulo $\hat{O}$. Indicando a **tangente de x** por **tg x**, temos:

$$\text{tg } x = \frac{MP}{OM}$$

A essas razões damos o nome de **razões trigonométricas**.

Vejamos novamente a figura:



Observação: com a finalidade de facilitar a memorização, ao falarmos em hipotenusa e em catetos estaremos nos referindo às suas medidas. Desse modo, temos:

$$\text{sen } x = \frac{\text{cateto oposto a } x}{\text{hipotenusa}}$$

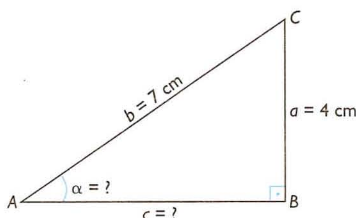
$$\cos x = \frac{\text{cateto adjacente a } x}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tg } x = \frac{\text{cateto oposto a } x}{\text{cateto adjacente a } x}$$

Exemplo

Em um triângulo retângulo ABC ($\hat{B}$ é reto) sabe-se que $a = 4$ cm e $b = 7$ cm. Determinar o seno, o cosseno e a tangente do menor de seus ângulos.

Solução



Achamos a medida do lado c aplicando o teorema de Pitágoras:

$$a^2 + c^2 = b^2 \Rightarrow 16 + c^2 = 49 \Rightarrow c^2 = 33 \Rightarrow c = \sqrt{33}$$

Como em um triângulo qualquer, ao menor lado opõe-se o menor ângulo, então o menor lado **mede** a, pois $4 < \sqrt{33}$.

Por questões didáticas, sendo α a medida do ângulo $\hat{A}$, indicaremos, por exemplo, sen α simplesmente por sen A. Assim:

$$\text{sen } A = \frac{a}{b} \Rightarrow \text{sen } A = \frac{4 \text{ cm}}{7 \text{ cm}} \Rightarrow \text{sen } A = \frac{4}{7}$$

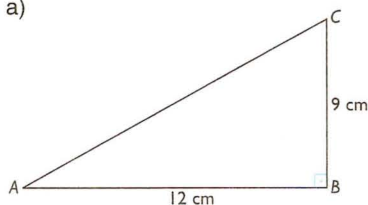
$$\cos A = \frac{c}{b} \Rightarrow \cos A = \frac{\sqrt{33} \text{ cm}}{7 \text{ cm}} \Rightarrow \cos A = \frac{\sqrt{33}}{7}$$

$$\text{tg } A = \frac{a}{c} \Rightarrow \text{tg } A = \frac{4 \text{ cm}}{\sqrt{33} \text{ cm}} \Rightarrow \text{tg } A = \frac{4}{\sqrt{33}} \text{ ou tg } A = \frac{4\sqrt{33}}{33}$$

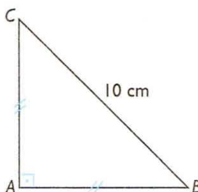
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. Determine o seno, o cosseno e a tangente de cada um dos ângulos agudos de um triângulo *ABC*, nos seguintes casos:

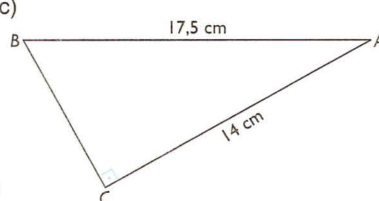
a)



b)



c)



8. Determine o seno, o cosseno e a tangente do maior ângulo agudo de um triângulo *ABC*, onde *a*, *b* e *c* são as medidas dos seus lados, nos seguintes casos:

a) $a = 4$ cm, $b = 8$ cm e o ângulo $\hat{C}$ é reto.

b) $a = 4$ cm, $b = 8$ cm e o ângulo $\hat{B}$ é reto.

9. O perímetro de um triângulo retângulo mede 264 m e a hipotenusa mede 110 m. Qual o seno do menor ângulo agudo desse triângulo retângulo?

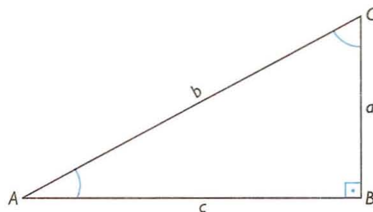
10. Num triângulo retângulo *ABC*, reto em $\hat{B}$, sabe-se que a hipotenusa mede 27,5 cm e que sen $\hat{A} = 0{,}6$. Determine quanto mede cada cateto desse triângulo.

11. Um triângulo retângulo *ABC* é reto em $\hat{B}$. Sabe-se que tg $A = 1$ e que um dos catetos mede 15 cm. Ache o perímetro do triângulo.

4. Propriedades e relações do seno, do cosseno e da tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo

Veremos, em seguida, algumas relações muito importantes entre as razões trigonométricas estudadas.

Observe o triângulo retângulo *ABC* da figura ao lado.



Temos: sen $A = \frac{a}{b}$ e cos $C = \frac{a}{b}$. (Deu a mesma coisa!)

Temos ainda: sen $C = \frac{c}{b}$ e cos $A = \frac{c}{b}$. (Deu a mesma coisa!)

Então, notando que a soma das medidas de $\hat{A}$ e $\hat{C}$ é 90° (ou seja, eles são complementares), podemos tirar uma conclusão importante:

> Se as medidas de dois ângulos somam 90°, o seno de um deles é igual ao cosseno do outro.

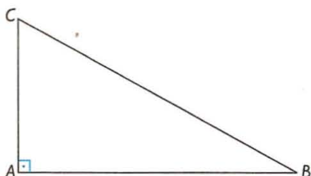
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

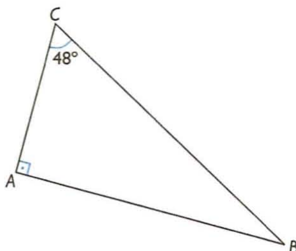
12. Nas figuras seguintes, determine o que se pede:

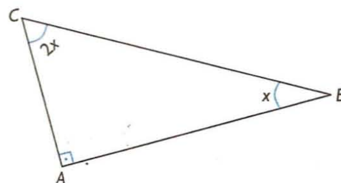
a) sen *C*, sendo dado cos $B = \frac{3}{8}$.

b) cos 48°, sendo dado sen $B = 0{,}283\,1$.

c) cos $(2x)$, sendo dado sen $x = 0{,}5$.







13. Determine quanto vale:

a) $\cos(90° - 32°)$, sendo $\text{sen } 32° = 0{,}529\,9$.
b) $\text{sen}(90° - 16°)$, sendo $\cos 16° = 0{,}961\,3$.
c) $\text{sen } 19°$, sendo $\cos 71° = 0{,}325\,6$.
d) $\cos(18°30')$, sendo $\text{sen}(71°30') = 0{,}948\,3$.
e) $\cos x$, sendo $\text{sen}(90° - x) = 0{,}723\,6$.
f) $\cos(90° - x)$, sendo $\text{sen } x = 0{,}192\,8$.

Calculemos agora o valor da expressão $(\text{sen } A)^2 + (\cos A)^2$, a qual também indicamos por $\text{sen}^2 A + \cos^2 A$.

Como $\text{sen } A = \dfrac{a}{b}$ e $\cos A = \dfrac{c}{b}$, temos:

$$\text{sen}^2 A + \cos^2 A = \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 = \frac{a^2 + c^2}{b^2}$$

Mas $a^2 + c^2 = b^2$ pelo teorema de Pitágoras. Portanto:

$$\text{sen}^2 A + \cos^2 A = \frac{\cancel{b^2}}{\cancel{b^2}} \Rightarrow \text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$$

Observe que esse resultado não depende do ângulo $\hat{A}$. Isso significa que, se procedermos de modo análogo, teremos para o ângulo $\hat{C}$ que $\text{sen}^2 C + \cos^2 C = 1$. Então, concluímos:

> Se x é a medida de um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo, temos:
> $$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Observação: você verá mais adiante que a relação acima é verdadeira para qualquer ângulo.

Calculemos agora o valor da tangente de um dos ângulos agudos, por exemplo, o ângulo $\hat{A}$.

Temos que: $\text{tg } A = \dfrac{a}{c}$.

Notemos que: $\dfrac{\text{sen } A}{\cos A} = \dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} \Rightarrow \dfrac{\text{sen } A}{\cos A} = \dfrac{a}{c}$. (Deu a mesma coisa!)

Então: $\text{tg } A = \dfrac{\text{sen } A}{\cos A}$.

Verifique, como exercício, que o mesmo ocorre ao calcular $\text{tg } C$.
Resumindo, vamos guardar:

> Se x é a medida de um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo, então:
> $$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

Observação: você verá mais adiante que essa relação é verdadeira também para outros ângulos.

Vejamos um exemplo de aplicação.

Exemplo

Se α e β são as medidas de dois ângulos agudos de um triângulo retângulo e sen $\alpha = \frac{1}{3}$, determinar sen β, cos β, cos α, tg α e tg β.

Solução

Como $\alpha + \beta = 90°$, temos que sen α = cos β, então: cos $\beta = \frac{1}{3}$.

Como $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{8}{9}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Sendo cos α = sen β, temos que sen $\beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Calculando as tangentes, temos:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{\frac{1}{\cancel{3}}}{\frac{2\sqrt{2}}{\cancel{3}}} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ ou } \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{tg}\,\beta = \frac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta} \Rightarrow \text{tg}\,\beta = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{\cancel{3}}}{\frac{1}{\cancel{3}}} \Rightarrow \text{tg}\,\beta = 2\sqrt{2}$$

Observação: lembrando que em qualquer triângulo retângulo a hipotenusa é o maior dos lados, concluímos:

> Para $0° < \alpha < 90°$ temos:
> $0 < \text{sen}\,\alpha < 1$, $0 < \cos\alpha < 1$ e $\text{tg}\,\alpha > 0$

EXERCÍCIO PROPOSTO

14. Sendo α e β as medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo, determine:

a) cos α, sen β, cos β, tg α e tg β, sabendo que sen $\alpha = \frac{1}{2}$.

b) sen α, cos α, sen β, tg α e tg β, sabendo que cos $\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

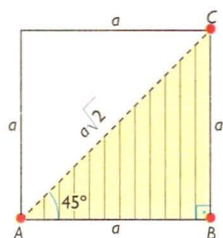
c) sen α, cos α e tg α, sabendo que sen $\beta = \frac{3}{5}$.

5. Como calcular os valores das razões trigonométricas

Os valores do seno, do cosseno e da tangente podem ser determinados utilizando uma calculadora científica ou fazendo uso de tabelas, chamadas **tábuas**.

No entanto, **para alguns ângulos**, esses valores podem ser determinados facilmente, conforme veremos em seguida.

a) **Ângulo de 45°**



Consideremos um quadrado cujo lado mede *a* unidades. O teorema de Pitágoras nos fornece a diagonal *d*:

$a^2 + a^2 = d^2 \Rightarrow d^2 = 2a^2 \Rightarrow d = a\sqrt{2}$.

Então, no triângulo retângulo *ABC*, temos:

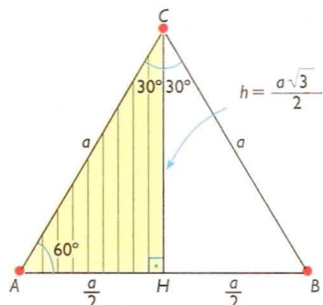
$$\text{sen } 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} \Rightarrow \text{sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \textbf{sen } \mathbf{45°} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} \Rightarrow \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \mathbf{cos\ 45°} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45° = \frac{\text{sen } 45°}{\cos 45°} \Rightarrow \text{tg } 45° = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \mathbf{tg\ 45° = 1}$$

É importante observar que esses valores **não dependem do valor de *a***.

b) **Ângulo de 60°**



Seja um triângulo eqüilátero cujo lado mede *a* unidades (ver figura). Como todo triângulo eqüilátero é também eqüiângulo, cada um dos seus ângulos mede 60°.

Traçando a **altura** $\overline{CH}$, temos que, sendo o triângulo eqüilátero, ela **será também mediana de** $\overline{AB}$ **e bissetriz de** $\hat{C}$.

A medida da altura (h = ?) é achada aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo *AHC*:

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4}. \text{ Então: } h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Desse modo, temos:

$$\text{sen } 60° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} \Rightarrow \text{sen } 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2a} \Rightarrow \textbf{sen } \mathbf{60°} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{\frac{a}{2}}{a} \Rightarrow \cos 60° = \frac{a}{2a} \Rightarrow \mathbf{cos\ 60°} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60° = \frac{\text{sen } 60°}{\cos 60°} \Rightarrow \text{tg } 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \textbf{tg 60°} = \sqrt{3}$$

Novamente obtivemos valores que **não dependem do valor de *a***.

c) **Ângulo de 30°**

Como 30° + 60° = 90°, temos:

$$\text{sen } 30° = \cos 60° \Rightarrow \textbf{sen 30°} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \text{sen } 60° \Rightarrow \textbf{cos 30°} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\text{sen } 30°}{\cos 30°} \Rightarrow \text{tg } 30° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \textbf{tg 30°} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ou } \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Outra vez obtivemos valores que **não dependem do valor de *a***. Isso é muito importante, pois os resultados serão os mesmos independentemente do tamanho das figuras.

Vamos guardar bem os dados da tabela abaixo, na qual se encontra um resumo de todos os valores encontrados.

$x \rightarrow$	30°	45°	60°
sen x	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg x	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Se você lembrar que $\frac{1}{2}$ é o mesmo que $\frac{\sqrt{1}}{2}$, fica mais fácil memorizar a tabela acima.

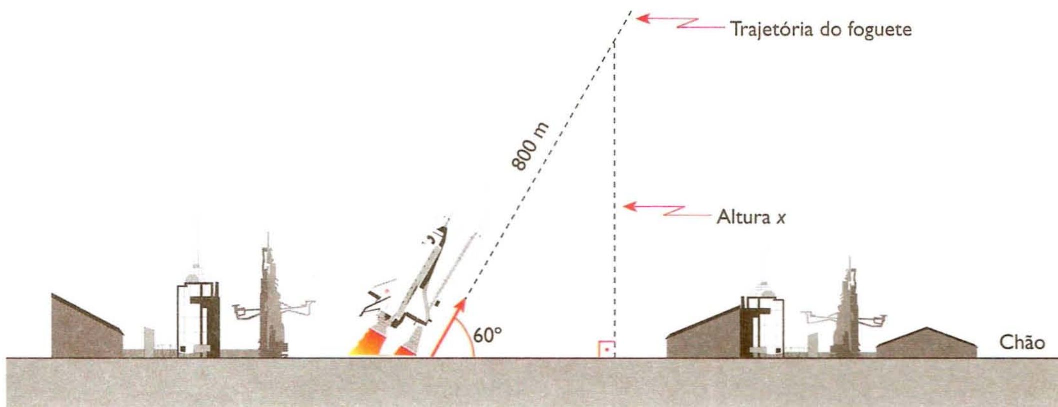
Vamos agora resolver alguns problemas práticos de aplicação.

Exemplo 1

Um foguete é lançado a 200 m/s, segundo um ângulo de inclinação de 60° (ver figura). Determinar a altura do foguete após 4 s, supondo a trajetória retilínea e a velocidade constante.

Solução

Após 4 s ele percorre 4 · (200 m) = 800 m.



Temos que: $\frac{x}{800} = \text{sen } 60° \Rightarrow x = 800 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x \simeq 692{,}8$

A altura é aproximadamente 692,8 m.

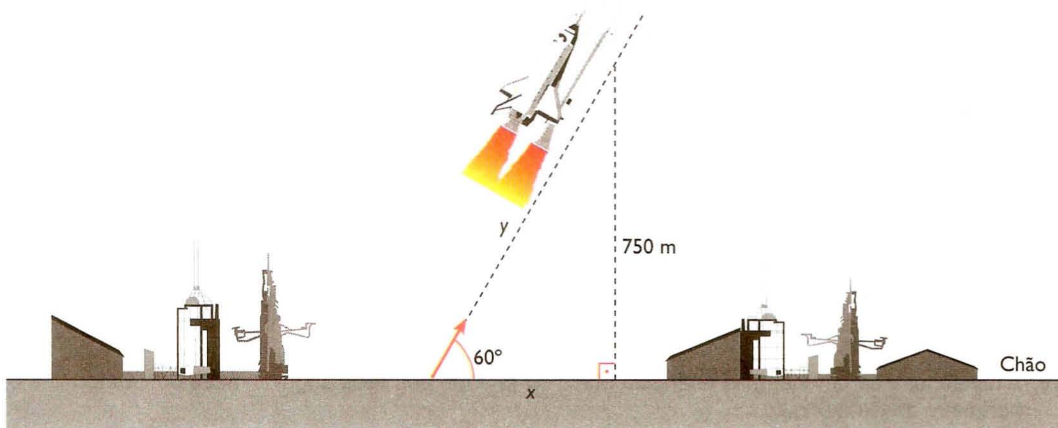
Exemplo 2

Suponha que, quando o foguete do exemplo 1 estiver a 750 m de altura, uma pessoa, do chão, veja-o exatamente no prumo.

a) A que distância essa pessoa está do ponto de lançamento?

b) Quantos metros o foguete percorreu?

Solução



a) Temos que: $\frac{750}{x} = \text{tg } 60° \Rightarrow \frac{750}{x} = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{750}{\sqrt{3}} \Rightarrow x \simeq 433$

A distância é de aproximadamente 433 m.

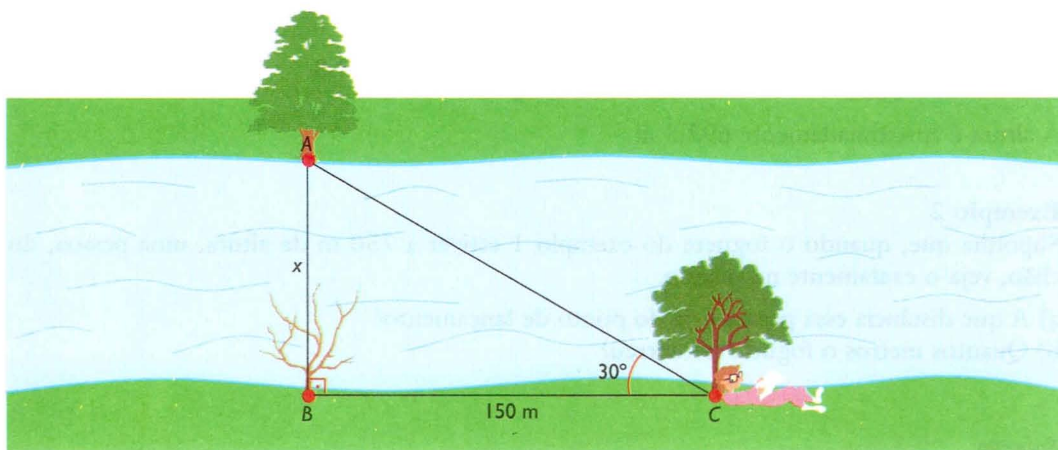
b) O foguete percorreu y m, em que: $\dfrac{750}{y} = \text{sen } 60° \Rightarrow y = \dfrac{750}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow y \simeq 866$ m

O foguete percorreu aproximadamente 866 m.

Exemplo 3

Uma pessoa está na margem de um rio, onde existem duas árvores (B e C na figura). Na outra margem, em frente a B, existe outra árvore A, vista de C segundo um ângulo de 30°, com relação a B. Se a distância de B a C é 150 m, qual é a largura do rio, nesse trecho?

Solução



Temos: $\dfrac{x}{150} = \text{tg } 30° \Rightarrow x = 150 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x \simeq 86{,}7$

A largura do rio é aproximadamente 86,7 m.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

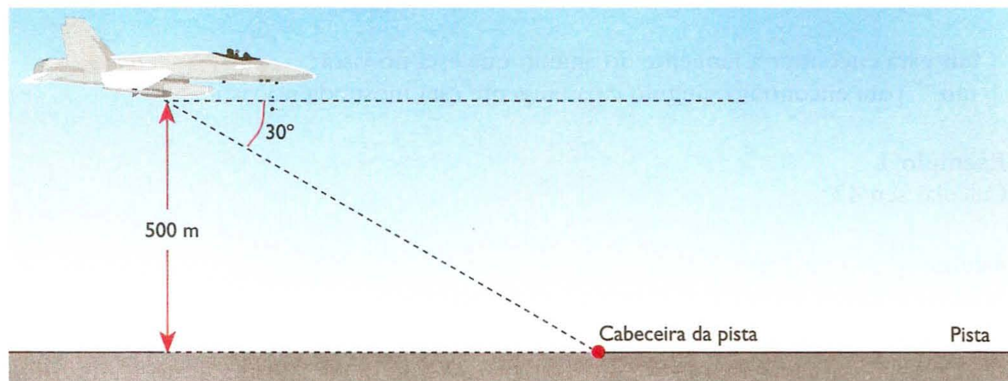
15. Em um triângulo retângulo um ângulo mede 30° e o lado oposto a esse ângulo mede 120 m. Calcule quanto mede cada um dos outros lados.

16. A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 60 m e um dos seus ângulos mede 60°. Determine o perímetro desse triângulo.

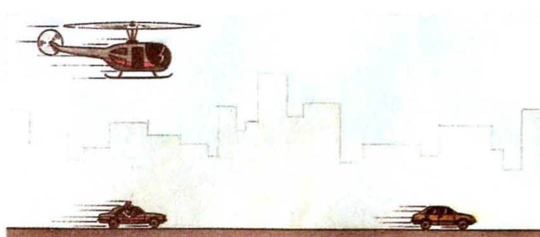
17. O menor cateto de um triângulo retângulo mede 15 cm e o maior dos ângulos agudos mede 60°. Ache a hipotenusa.

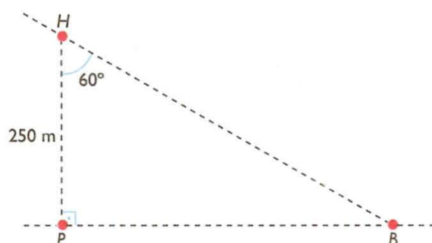
18. Num triângulo retângulo, um ângulo agudo mede a metade do outro. O menor cateto mede 25 m. Determine a medida de cada um dos outros lados.

19. Um avião está a 500 m de altura, quando dele se vê a cabeceira da pista de pouso segundo um ângulo de declive de 30°. A que distância o avião está da cabeceira da pista?



20. Um helicóptero e um carro da polícia perseguem um carro de bandidos. O helicóptero está a 250 m de altura; o carro da polícia está bem abaixo do helicóptero (no prumo). Do helicóptero o carro de bandidos é avistado segundo um ângulo de 60°. Qual é a distância entre o carro da polícia e o dos bandidos?





Vimos até aqui como trabalhar com as razões trigonométricas de apenas alguns ângulos particulares: 30°, 45° e 60°. Veremos em seguida como calcular as razões trigonométricas de um ângulo agudo qualquer.

Comentamos anteriormente que, para fazer isso, poderíamos utilizar uma calculadora científica ou uma tabela de dados, tabela essa que é chamada de **tábua de senos e cossenos**.

Analisaremos separadamente essas duas situações.

a) Cálculo das razões trigonométricas utilizando calculadora científica

Quando estudamos logaritmos, vimos que a utilização de uma calculadora científica nos cálculos requeria certa atenção, pois o conjunto de teclas que realizam essas operações varia para cada marca e tipo de calculadora.

Isso ocorre também para o cálculo das razões trigonométricas, de modo que, se você tem uma calculadora científica, é conveniente dar uma boa lida no manual de instruções para saber quais as teclas que serão utilizadas em seus cálculos.

Além disso, tenha o cuidado de verificar a unidade de medida de ângulos com que a calculadora está operando, ou seja, se o "modo" está em graus ou não.

Nos próximos exemplos, trabalharemos com um tipo de calculadora científica que utiliza as seguintes teclas:

sin para encontrar o seno do ângulo que está no visor;
$\mathbf{sin^{-1}}$ para encontrar o ângulo cujo seno está mostrado no visor;

$\begin{cases} \textbf{cos} \text{ para encontrar o cosseno do ângulo que está no visor;} \\ \textbf{cos}^{-1} \text{ para encontrar o ângulo cujo cosseno está mostrado no visor;} \end{cases}$

$\begin{cases} \textbf{tan} \text{ para encontrar a tangente do ângulo que está no visor;} \\ \textbf{tan}^{-1} \text{ para encontrar o ângulo cuja tangente está mostrada no visor.} \end{cases}$

Exemplo 1
Calcular sen 42°.

Solução
A tabela seguinte esclarece as etapas a serem executadas.

Dado	Calcular	Etapas	Resultado
Um ângulo que mede 42°.	sen 42°.	1. Posicione o "modo" em graus (*DEG*). 2. Digite 42. 3. Pressione **sin**.	Aproximadamente 0,669 1.

Observação: para o cálculo de cos 42°, por exemplo, o procedimento é o mesmo, apenas pressionando a tecla cos no item 3 das etapas do cálculo. Se você tem uma calculadora científica, faça essa operação como exercício. A resposta é 0,743 1 aproximadamente.

Exemplo 2
Sendo $\hat{A}$ um ângulo agudo de um triângulo retângulo tal que cos A = 0,829 0, determinar quantos graus mede o ângulo $\hat{A}$.

Solução
Ainda com a mesma calculadora, construímos a tabela:

Dado	Calcular	Etapas	Resultado
Um ângulo $\hat{A}$ cujo cosseno é 0,829 0.	Quantos graus mede o ângulo $\hat{A}$.	1. Posicione o "modo" em graus (*DEG*). 2. Digite 0,829 0. 3. Pressione $\mathbf{cos}^{-1}$.	Aproximadamente 34°.

Observação: para o cálculo do ângulo cujo seno fosse 0,829 0, por exemplo, o procedimento é o mesmo, apenas pressionando a tecla $\mathbf{sin}^{-1}$ no item 3 das etapas do cálculo. Se você tem uma calculadora científica, faça, como exercício, essa operação. A resposta será aproximadamente 56°.

Exemplo 3
Num triângulo retângulo *ABC*, $\hat{A}$ mede 23°. Determinar tg A.

Solução
Ainda com a mesma calculadora, construímos a tabela da página seguinte.

Dado	Calcular	Etapas	Resultado
Um ângulo que mede 23°.	tg 23°.	1. Posicione o "modo" em graus (*DEG*). 2. Digite 23. 3. Pressione **tan**.	Aproximadamente 0,424 5.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

(Somente para quem possuir uma calculadora científica. Dar a resposta com 4 "casas" decimais.)

21. Calcule:

a) sen 33° b) cos 21° c) tg 18°

22. Sendo *ABC* um triângulo retângulo em *B*, determine:

a) sen *A*, no caso de *A* medir 65°.
b) cos *C*, no caso de *C* medir 72°.
c) tg *A*, no caso de *A* medir 47°.

23. Sendo $\hat{A}$ um ângulo agudo de um triângulo retângulo, determine quantos graus mede $\hat{A}$, no caso de:

a) sen $A = 0,5878$ b) cos $A = 0,3746$ c) tg $A = 1,4281$

b) Cálculo das razões trigonométricas utilizando a tábua de senos e cossenos

Bem, agora que você viu que "é moleza" trabalhar com as razões trigonométricas quando temos em mãos uma calculadora científica, veremos como operar no caso de não podermos contar com esse recurso.

Para isso, necessitamos da seguinte tábua de senos e cossenos, na qual aparecem os senos e os cossenos dos ângulos de 1° a 45°.

Tábua de senos e cossenos

Ângulo	Seno	Cosseno	Ângulo	Seno	Cosseno	Ângulo	Seno	Cosseno
1°	0,017 5	0,999 8	16°	0,275 6	0,961 3	31°	0,515 0	0,857 2
2°	0,034 9	0,999 4	17°	0,292 4	0,956 3	32°	0,529 9	0,848 0
3°	0,052 3	0,998 6	18°	0,309 0	0,951 1	33°	0,544 6	0,838 7
4°	0,069 8	0,997 6	19°	0,325 6	0,945 5	34°	0,559 2	0,829 0
5°	0,087 2	0,996 2	20°	0,342 0	0,939 7	35°	0,573 6	0,819 2
6°	0,104 5	0,994 5	21°	0,358 4	0,933 6	36°	0,587 8	0,809 0
7°	0,121 9	0,992 5	22°	0,374 6	0,927 2	37°	0,601 8	0,798 6
8°	0,139 2	0,990 3	23°	0,390 7	0,920 5	38°	0,615 7	0,788 0
9°	0,156 4	0,987 7	24°	0,406 7	0,913 5	39°	0,629 3	0,777 1
10°	0,173 6	0,984 8	25°	0,422 6	0,906 3	40°	0,642 8	0,766 0
11°	0,190 8	0,981 6	26°	0,438 4	0,898 8	41°	0,656 1	0,754 7
12°	0,207 9	0,978 1	27°	0,454 0	0,891 0	42°	0,669 1	0,743 1
13°	0,225 0	0,974 4	28°	0,469 5	0,882 9	43°	0,682 0	0,731 4
14°	0,241 9	0,970 3	29°	0,484 8	0,874 6	44°	0,694 7	0,719 3
15°	0,258 8	0,965 9	30°	0,500 0	0,866 0	45°	0,707 1	0,707 1

Que tal fazer no seu caderno uma tábua mais completa do que essa, na qual aparecesse também uma coluna para a tangente? É só dividir o valor do seno pelo do cosseno...

Vamos aprender a utilizá-la, refazendo inicialmente os três exemplos do item anterior.

a) Calcular sen 42°.

b) Dado cos $A = 0{,}829\,0$, achar quantos graus mede $\hat{A}$.

c) Calcular tg 23°.

Solução

a) Calcular sen 42°.

Procuramos na tábua a linha correspondente ao ângulo de 42° e, na coluna correspondente ao **seno**, encontramos o valor 0,669 1.

b) Achar quantos graus mede $\hat{A}$, sendo cos $A = 0{,}829\,0$.

Procuramos nas colunas do **cosseno** o valor 0,829 0. Esse valor corresponde ao ângulo de 34°.

c) Calcular tg 23°.

Veja que na tábua que fornecemos não existe coluna referente à **tangente** (há tábuas que possuem essa coluna). No entanto temos que:

$$\text{tg } 23° = \frac{\text{sen } 23°}{\cos 23°}$$

Buscando na tábua os valores de sen 23° e cos 23°, encontramos sen 23° = 0,390 7 e cos 23° = 0,920 5. Efetuando os cálculos, obtemos tg 23 ≃ 0,424 4.

Observe que, nesses três exercícios, não tivemos muito trabalho, pois os valores procurados **estavam na tábua**. Mas isso nem sempre ocorre, como mostram os exemplos seguintes.

Exemplo 1

Calcular:

a) sen 71°

b) cos 50°

Solução

a) Calcular sen 71°.

O ângulo de 71° não consta em nossa tábua, pois ela vai só até 45°. Mas veja:

$$\text{sen } 71° = \cos (90° - 71°) = \cos 19° \text{ (Esse valor está na tábua!)}$$

Então, como cos 19° = 0,945 5, temos que sen 71° = 0,945 5.

b) Calcular cos 50°.

O ângulo de 50° também não consta em nossa tábua, mas:

$$\cos 50° = \text{sen } (90° - 50°) = \text{sen } 40° \text{ (Esse valor está na tábua!)}$$

Então, como sen 40° = 0,642 8, temos que cos 50° = 0,642 8.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

24. Utilizando a tábua de senos e cossenos, calcule:

a) sen 39° b) cos 16° c) tg 29°

25. Calcule:

a) sen 48° b) cos 85° c) tg 47°

26. Determine o valor de N nos seguintes casos:

a) $N = \dfrac{\text{sen } 30° + \text{sen } 40°}{3 \cdot \cos 12°}$

b) $N = \dfrac{2 \cdot \text{sen } 54° - 3 \cdot \cos 60°}{2 \cdot \text{sen } 30°}$

Exemplo 2

Calcular sen 18°20′.

Solução

Esse valor não está em nossa tábua, mas o ângulo de 18°20′ está "entre" 18° e 19°.
Observe na tábua, na coluna dos senos, que, à medida que o ângulo cresce, o valor do seno também cresce. Dessa forma, obteremos uma razoável aproximação se utilizarmos uma regra de três simples. Vejamos:

$$\text{sen } 18° = 0{,}309\,0 \text{ e sen } 19° = 0{,}325\,6$$

Assim, para um acréscimo de 1°, ou seja, 60′ no ângulo, houve um aumento nos senos de 0,325 6 − 0,309 0, ou seja, 0,016 6.
Então:

Aumento no ângulo	Aumento no seno
60′	0,016 6
20′	x

Assim:

$$\frac{60}{20} = \frac{0{,}016\,6}{x} \Rightarrow x \simeq 0{,}005\,5$$

portanto o valor de sen 18°20′ será aproximadamente 0,309 0 + 0,005 5, ou seja:

$$\text{sen } 18°20' \simeq 0{,}314\,5$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

27. Calcule:

a) sen 35°30′
b) sen 60°40′

Exemplo 3

Calcular cos 30°40′.

Solução

Esse ângulo não consta na tábua, mas está "entre" 30° e 31°.
Observe na tábua que, à medida que o ângulo cresce, o valor do cosseno diminui. Procedendo de modo análogo ao do exemplo 2, temos:

$$\cos 30° = 0{,}866\,0 \text{ e } \cos 31° = 0{,}857\,2$$

Dessa forma, para um aumento de 1°, ou seja, 60′ no ângulo, houve um decréscimo no cosseno de 0,866 0 − 0,857 2, ou seja, 0,008 8.

Então:

Aumento no ângulo	**Diminuição no cosseno**
60′	0,008 8
40′	x

Dessa forma temos:

$$\frac{60}{40} = \frac{0,008\,8}{x} \Rightarrow x \simeq 0,005\,9$$

portanto cos 30°40′ será aproximadamente 0,866 0 − 0,005 9, ou seja:

$$\cos 30°40' \simeq 0,860\,1$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

28. Calcule:

a) cos 42°30′

b) cos 30°20′

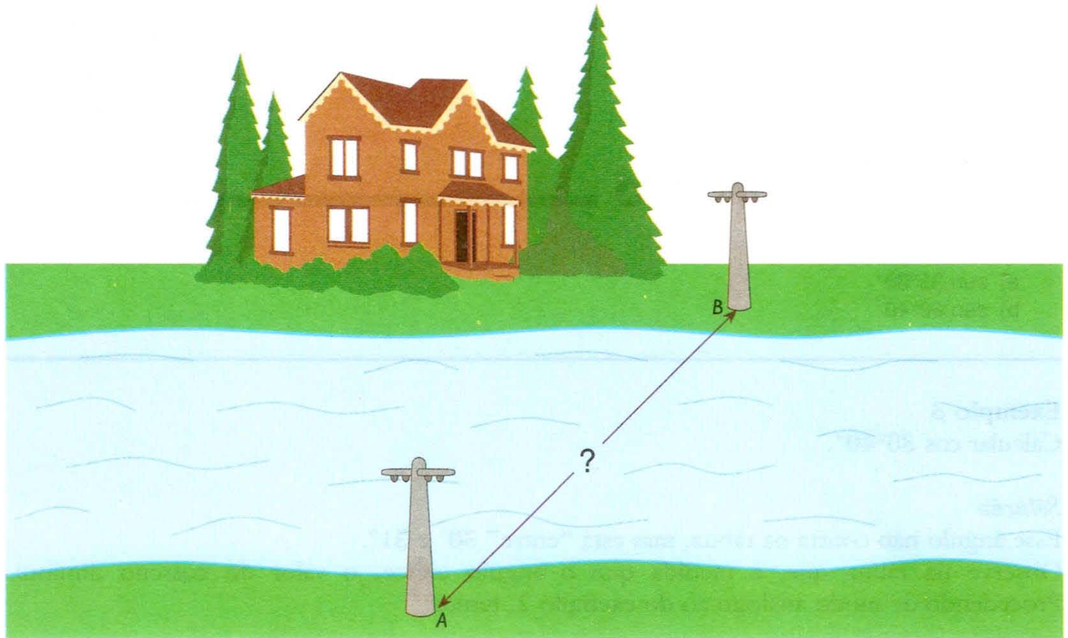
29. Calcule:

a) tg 25°30′

b) sen 10°20′ + cos 10°20′

Exemplo 4

No início deste capítulo vimos o problema de um eletricista que necessitava calcular a distância entre dois postes, mas a medição direta era impossível, pois entre os postes passava um rio. Vamos rever a figura apresentada anteriormente:



Com o que estudamos até aqui, já temos condições de ajudar o eletricista, calculando a distância entre os postes.

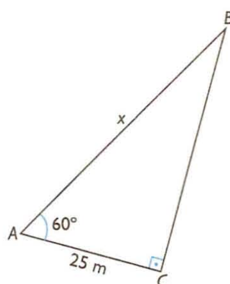
Solução

Chamando de x a distância procurada, vamos proceder da maneira seguinte:

a) a partir do ponto A, procuremos, em terra firme, encontrar um ponto C, tal que o triângulo ABC seja retângulo em C;

b) medimos a distância de A até C, bem como o ângulo $C\hat{A}B$.

Sejam, por exemplo, os seguintes valores encontrados:



Nessas condições, temos:

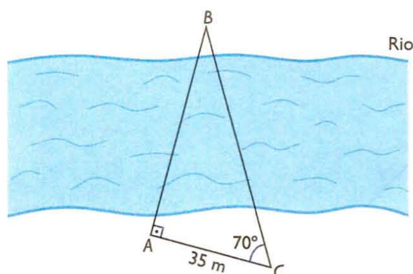
$$\frac{25}{x} = \cos 60° \Rightarrow x = \frac{25}{0,5} \Rightarrow x = 50$$

Dessa forma, concluímos que a distância procurada é de 50 m.

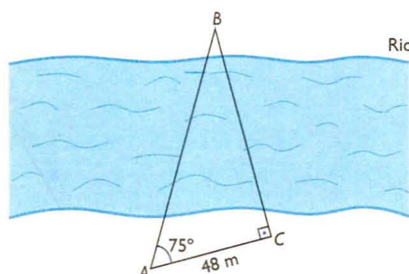
EXERCÍCIO PROPOSTO

30. A medição direta da distância entre os pontos A e B é impossível.
Calcule essa distância, nos casos seguintes:

a)



b)



6. A lei dos senos

Iremos aprender agora uma relação muito importante, envolvendo as medidas dos lados com os senos dos ângulos de um triângulo. Essa relação é chamada **lei dos senos**.

Mostraremos que ela é verdadeira apenas quando um triângulo for acutângulo. Mais adiante, no momento oportuno, você verá como ela é aplicada para qualquer tipo de triângulo.

Assim sendo, tomemos um triângulo acutângulo ABC, no qual a, b e c são as medidas de seus lados, e mostremos que é verdadeira a seguinte afirmação:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} \quad \text{(lei dos senos)}$$

Para isso, observemos as figuras a seguir.

A figura da esquerda mostra que:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{b} = \text{sen } A \\ \dfrac{x}{a} = \text{sen } B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = b \cdot \text{sen } A \\ x = a \cdot \text{sen } B \end{cases} \Rightarrow b \cdot \text{sen } A = a \cdot \text{sen } B \Rightarrow \frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} \quad \text{(I)}$$

A figura da direita mostra que:

$$\begin{cases} \dfrac{y}{c} = \text{sen } B \\ \dfrac{y}{b} = \text{sen } C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = c \cdot \text{sen } B \\ y = b \cdot \text{sen } C \end{cases} \Rightarrow c \cdot \text{sen } B = b \cdot \text{sen } C \Rightarrow \frac{c}{\text{sen } C} = \frac{b}{\text{sen } B} \quad \text{(II)}$$

De (I) e (II), concluímos que é verdadeira a afirmação:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} \quad \text{(lei dos senos)}$$

Assim, por exemplo, na figura:

podemos facilmente determinar os valores de x, y e α utilizando a lei dos senos. Veja:

Temos que $\alpha + 45° + 60° = 180°$, portanto $\alpha = 75°$.

A lei dos senos permite escrever:

$$\frac{x}{\text{sen } 45°} = \underbrace{\overbrace{\frac{y}{\text{sen } 60°} = \frac{10}{\text{sen } 75°}}^{\text{(I)}}}_{}$$

(com (II) relacionando $\frac{x}{\text{sen } 45°}$ e $\frac{10}{\text{sen } 75°}$)

De (I) temos que: $\dfrac{y}{\text{sen } 60°} = \dfrac{10}{\text{sen } 75°} \Rightarrow y = \dfrac{10 \cdot \text{sen } 60°}{\text{sen } 75°} \Rightarrow y \simeq 8,97$

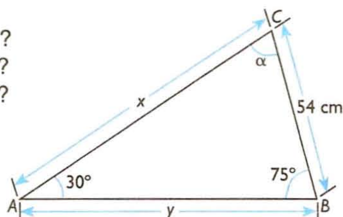
De (II) temos que: $\frac{x}{\text{sen } 45°} = \frac{10}{\text{sen } 75°} \Rightarrow x = \frac{10 \cdot \text{sen } 45°}{\text{sen } 75°} \Rightarrow x \simeq 7,32$

Assim sendo, os lados medem $x \simeq 7{,}32$ cm, $y \simeq 8{,}97$ cm e $\alpha = 75°$.

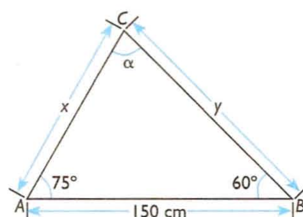
EXERCÍCIO PROPOSTO

31. Determine o que se pede em cada caso:

a) $\alpha = ?$
$x = ?$
$y = ?$



b) $\alpha = ?$
$x = ?$
$y = ?$



7. A lei dos cossenos

Assim como a lei dos senos, a lei dos cossenos é muito importante para a determinação de lados e ângulos de um triângulo.

Consideremos um triângulo acutângulo ABC e mostremos que é verdadeira a seguinte afirmação:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$$

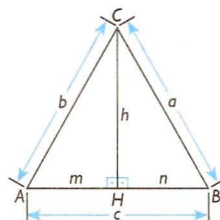
Mais adiante, no momento oportuno, você verá como aplicá-la num triângulo qualquer.

Veja a figura ao lado.

No triângulo retângulo CHB, pelo teorema de Pitágoras, temos $a^2 = h^2 + n^2$, ou seja:

$$a^2 = h^2 + (c - m)^2$$

Como $\begin{cases} \text{sen } A = \dfrac{h}{b}, \text{ então } h = b \cdot \text{sen } A \\ \cos A = \dfrac{m}{b}, \text{ então } m = b \cdot \cos A \end{cases}$



Portanto, como $h = b \cdot \text{sen } A$ e $m = b \cdot \cos A$, temos:

$a^2 = (b \cdot \text{sen } A)^2 + (c - b \cdot \cos A)^2$

$a^2 = b^2 \cdot \text{sen}^2 A + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A + b^2 \cdot \cos^2 A$

$a^2 = b^2 \cdot \underbrace{(\text{sen}^2 A + \cos^2 A)}_{1} + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$

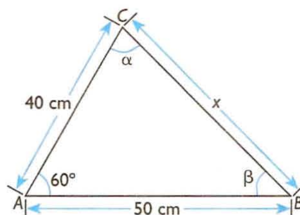
Dessa forma concluímos que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A \quad \text{(lei dos cossenos)}$$

De modo análogo demonstra-se que:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B \quad \text{e} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$$

Assim, por exemplo, dado o triângulo ABC:



podemos determinar x, α e β utilizando a lei dos cossenos.

Pela lei dos cossenos temos:

$$x^2 = 50^2 + 40^2 - 2 \cdot 50 \cdot 40 \cdot \cos 60^\circ$$

Substituindo cos 60° por 0,5, obtemos $x^2 = 2\,100$, portanto $x \simeq 45{,}83$.

Aplicando agora a lei dos senos, temos:

$$\frac{x}{\text{sen } 60^\circ} = \frac{50}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \frac{45,83}{\text{sen } 60^\circ} = \frac{50}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{50 \cdot \text{sen } 60^\circ}{45,83} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen } \alpha \simeq 0,94 \Rightarrow \alpha \simeq 71^\circ$$

Como $\beta = 180^\circ - 60^\circ - \alpha$, temos que $\beta \simeq 180^\circ - 60^\circ - 71^\circ$, portanto $\beta \simeq 49^\circ$.

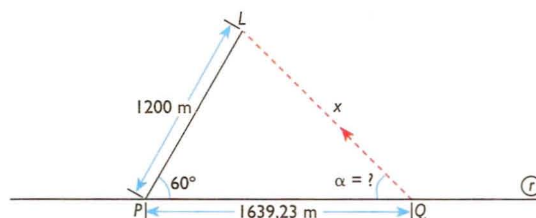
Assim sendo, os valores procurados são: $x \simeq 45{,}83$ m, $\alpha \simeq 71^\circ$ e $\beta \simeq 49^\circ$.

Veja em seguida mais dois exemplos de aplicação do assunto.

Exemplo 1

Uma equipe de trabalho parte de um ponto P, em linha reta, abrindo uma estrada de 1 200 m que forma um ângulo de 60° com a reta ⓡ (ver figura). Uma segunda equipe está em Q a 1 639,23 m da primeira e deve iniciar uma segunda estrada que ligará Q a L. Sob que ângulo deve seguir a segunda equipe e qual o comprimento da estrada?

Solução



Achamos x usando a lei dos cossenos:

$$x^2 = (1\,639{,}23)^2 + 1\,200^2 - 2 \cdot 1\,639{,}23 \cdot 1\,200 \cdot \overbrace{\cos 60^\circ}^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x \simeq 1\,469{,}69$$

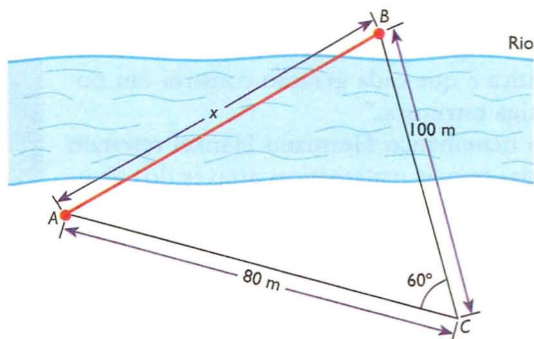
Usando a lei dos senos, achamos α:

$$\frac{1\,200}{\text{sen } \alpha} = \frac{1\,469,69}{\text{sen } 60^\circ} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{1\,200 \cdot \text{sen } 60^\circ}{1\,469,69} \Rightarrow \text{sen } \alpha = 0,71 \Rightarrow \alpha \simeq 45^\circ$$

O ângulo deve ser de 45° e o comprimento será 1 469,69 m aproximadamente.

Exemplo 2

Um observador está em A e necessita calcular sua distância até o ponto B, mas este ponto é inacessível a ele. No entanto, ele conta com os dados mostrados na figura:



Solução

Pela lei dos cossenos temos que:

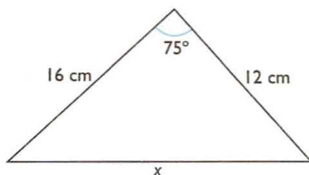
$$x^2 = 80^2 + 100^2 - 2 \cdot 80 \cdot 100 \cdot \cos 60° \Rightarrow x^2 = 8\,400 \Rightarrow x \simeq 91{,}65$$

A distância procurada é 91,65 m aproximadamente.

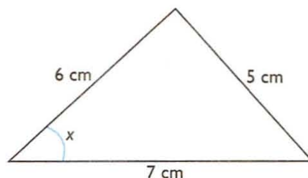
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

32. Nas figuras abaixo, determine x.

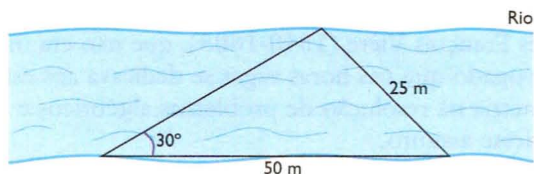
a)



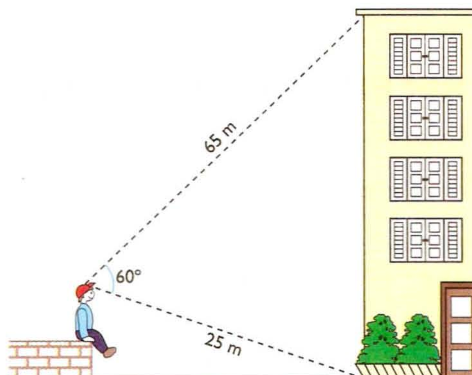
b)



33. Determine a largura do rio.



34. Um menino, sentado num muro, observa o topo e o "pé" de um prédio, conforme a figura ao lado. Determine a altura do prédio.



TÚNEL DO TEMPO



François Viète.

"Na maior parte das ciências uma geração põe abaixo o que outra construiu, e o que uma estabeleceu a outra desfaz. Somente na matemática é que cada geração constrói um novo andar sobre a antiga estrutura."

Essas palavras do matemático Hermann Hankel retratam o desenvolvimento das teorias matemáticas através dos séculos. De fato tais teorias não são o resultado do trabalho de um só homem ou de apenas uma nação, mas sim de uma evolução contínua e de muitas gerações.

A trigonometria não foge à regra. Muitos homens em muitas nações – como os egípcios e babilônios – estudaram as razões entre lados de triângulos semelhantes, mas é na Grécia que encontramos pela primeira vez um estudo sistemático entre arcos e o comprimento das cordas determinadas por esses arcos. Esse trabalho deve-se ao astrônomo grego Hiparco de Nicéia (180-125 a.C.), considerado o "pai da trigonometria". É muito provável ser dele a primeira tabela mostrando valores que relacionavam arcos e cordas. Essa tabela, a primeira tabela trigonométrica, muito contribuiu para o estudo da astronomia e serviu de suporte para os trabalhos de muitos astrônomos, entre eles Claudio Ptolomeu, que viveu no segundo século da era cristã. Trabalhando com a intenção de descobrir leis que justificassem o movimento dos corpos celestes, Ptolomeu escreveu *Syntaxis mathematica*, seu livro mais importante, que passou a ser chamado pelos estudiosos de sua obra de *Almagesto*, que significa "o maior".

Entre os árabes vamos encontrar o astrônomo Nasir Eddin (1201-1274), responsável pelo primeiro trabalho sobre trigonometria onde tal matéria era tratada de modo independente e não apenas como auxiliar da astronomia, como acontecia na Grécia e na Índia. Nesse trabalho são estudadas as seis funções trigonométricas usuais e fornecidas as regras para resolver vários casos de triângulos.

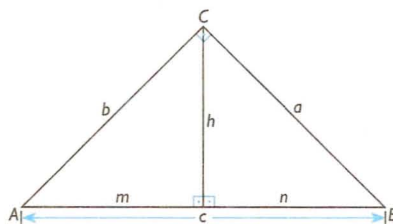
Na Europa, em fins do século XVI e começo do século XVII, houve um grande interesse pelos estudos da trigonometria. O nome "trigonometria" surgiu nessa época, como título de uma exposição feita por Bartholomeus Pitiscus (1561-1613).

Entre aqueles que mais contribuíram para o desenvolvimento da trigonometria encontra-se o francês François Viète (1540-1603), que não era matemático por profissão, mas sim um advogado que nas horas vagas se dedicava aos estudos da matemática. Ele usou a trigonometria na resolução de problemas algébricos e aritméticos, ampliando assim o alcance desse assunto.

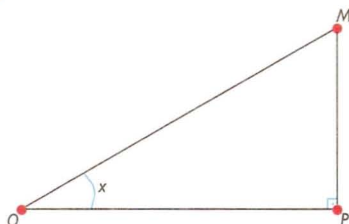
RELEMBRANDO CONCEITOS

Relações métricas num triângulo retângulo

a) $h^2 = m \cdot n$
b) $b^2 = c \cdot m$
c) $a^2 = c \cdot n$
d) $a \cdot b = c \cdot h$
e) $c^2 = b^2 + a^2$ (Pitágoras)
f) $b^2 = m^2 + h^2$ (Pitágoras)
g) $a^2 = n^2 + h^2$ (Pitágoras)



Razões trigonométricas num triângulo retângulo



$$\text{sen } x = \frac{PM}{OM} \qquad \cos x = \frac{OP}{OM}$$

$$\text{tg } x = \frac{PM}{OP}, \text{ ou seja, } \text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

Se as medidas de dois ângulos somarem 90° $\left(\text{ou } \frac{\pi}{2} \text{ rad}\right)$, então, o seno de um deles é igual ao cosseno do outro, ou seja:

$$\text{sen } x = \cos (90° - x)$$
$$\cos x = \text{sen } (90° - x)$$

Sendo x a medida de um ângulo, então vale a relação:

$$(\text{sen } x)^2 + (\cos x)^2 = 1, \text{ ou seja, } \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

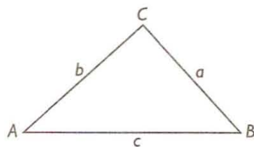
Valores do seno, cosseno e tangente de alguns ângulos

Ângulo de 30°	Ângulo de 45°	Ângulo de 60°
$\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$	$\text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$
$\text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\text{tg } 45° = 1$	$\text{tg } 60° = \sqrt{3}$

Lei dos senos

Num triângulo ABC tem-se:

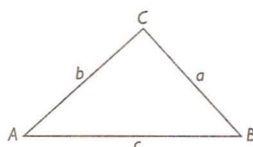
$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$



Lei dos cossenos

Num triângulo ABC tem-se:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$$



EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

35. Um triângulo retângulo tem o ângulo $\hat{B}$ reto. Sendo a e c as medidas dos catetos, determine a altura relativa ao lado $\overline{AC}$.

36. Num triângulo retângulo, a hipotenusa mede 10,2 cm a mais que o menor cateto, e este mede 5,1 cm a menos que o maior cateto. Determine:

a) quanto mede cada cateto.

b) qual o seno do maior ângulo agudo.

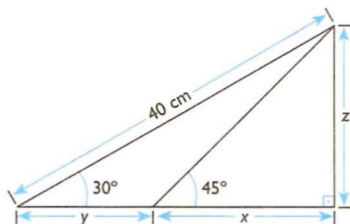
37. Um triângulo retângulo *ABC* é reto em *C*. Sabendo que cos $A = 0{,}6$, determine o valor de *N* nos casos seguintes:

a) $N = \text{sen } A + 3 \cdot \text{sen } B + \cos B$
b) $N = \text{tg } A + \text{tg } B$

38. Os raios do sol formam um ângulo de 60° com o nível do chão. Responda:

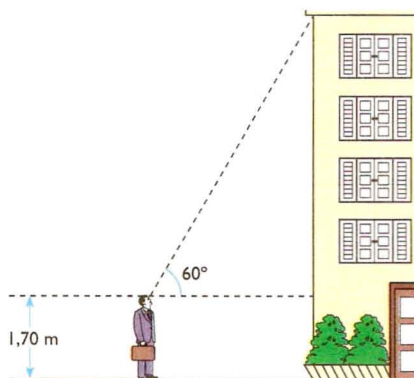
a) Qual o comprimento da sombra de um prédio de 45 m de altura?
b) Se a sombra de um prédio tiver 30 m de comprimento, qual a altura dele?

39. Na figura seguinte, determine *x*, *y* e *z*.



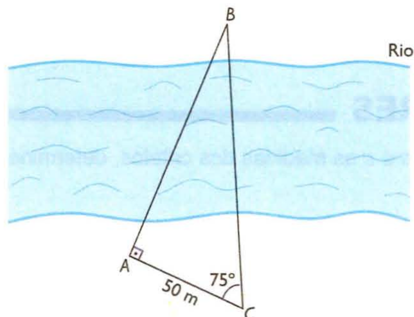
40. Uma pessoa de 1,70 m de altura vê o topo de um prédio segundo um ângulo de elevação de 60°.

a) Qual a altura do prédio, se a distância da pessoa a ele for 30 m?
b) Qual a distância da pessoa a ele, no caso de o prédio ter 40 m de altura?

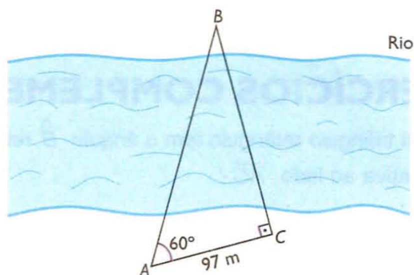


41. O ponto *A* está numa das margens de um rio e o ponto *B*, na outra. Determine a distância de *A* até *B*, nos casos:

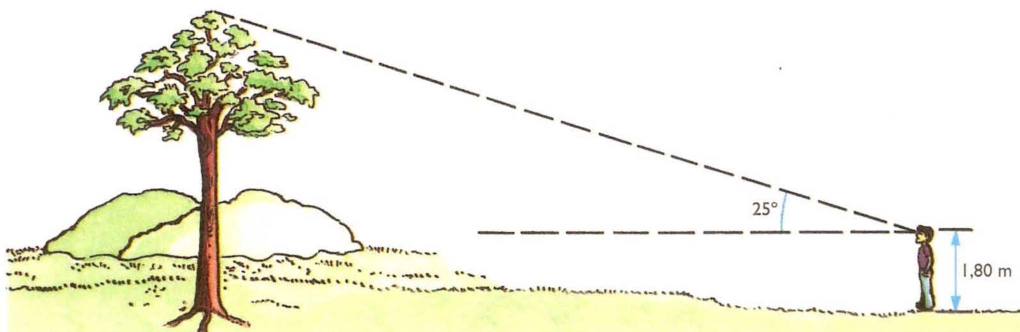
a)



b)



42. A distância de uma pessoa a uma árvore é de 45 m. Essa pessoa tem 1,80 m de altura e o ângulo de elevação segundo o qual ela vê o topo da árvore é de 25°. Determine a altura aproximada dessa árvore.



43. Quando Pedrinho e seu pai estavam passeando na praia, os raios de sol formavam um ângulo de 40° com o chão. Determine:

a) o comprimento da sombra de Pedrinho, sabendo que ele tem 1,20 m de altura.
b) a altura do pai dele, sabendo que a sua sombra mede 2 m.

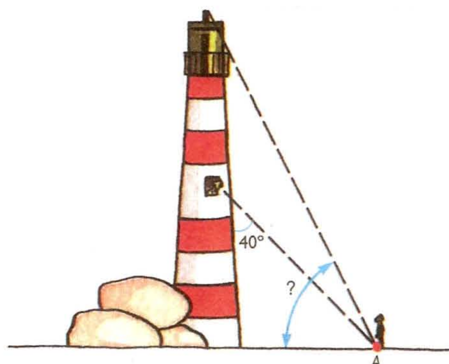


Melanie Carr / Stock Photos

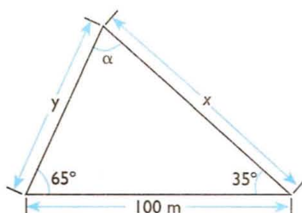
44. Um poste de 5 m de altura tem em seu topo uma luz acesa. Uma pessoa, de 1,80 m de altura, caminha a partir do poste até um prédio distante 15 m. Determine a que distância a pessoa estará do prédio quando sua sombra começar a atingir o prédio.

45. A janela de um farol está situada no ponto médio de sua altura. Alguém, situado nessa janela, vê um barqueiro no ponto *A*, sob um ângulo de 40°, conforme mostra a figura. Ache o ângulo sob o qual o barqueiro vê o topo do farol.

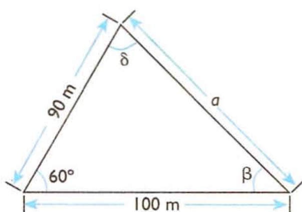
(Sugestão: use "aquela" tábua construída no caderno e que tem a coluna das tangentes, ou uma calculadora científica.)



46. No triângulo a seguir, determine x, y e α.

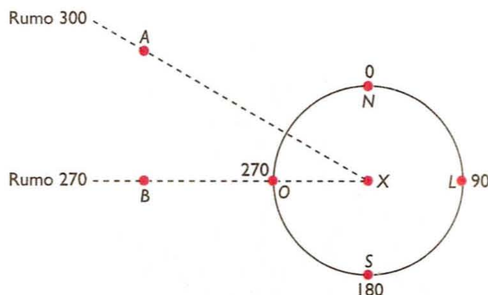


47. Determine a, δ e β no triângulo abaixo.



48. Um piloto de avião pretende ir de uma cidade X até uma cidade A e, para tanto, deve tomar o rumo 300. Sua chegada é prevista para 3 horas após a decolagem.

Ele levanta vôo, determina o rumo do avião, liga o piloto automático e... adormece! Três horas depois, não vendo a cidade A, o piloto percebe que havia determinado erroneamente o rumo 270, estando portanto na posição B. Veja a bússola com os rumos citados:

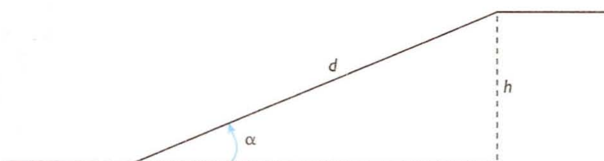


a) Qual o rumo que deve tomar para ir de B até A?

b) Quanto tempo demorará para fazer esse percurso?

49. (E. E. Mauá-SP) Determine as alturas de um triângulo ABC que é retângulo em $\hat{A}$, dados $AB = c$ e $AC = b$.

50. (UFGO) Uma pessoa deseja subir uma rampa de comprimento d que forma um ângulo α com a horizontal. Após subir a rampa, essa pessoa estará h metros acima da posição em que se encontrava inicialmente, como mostra a figura abaixo:



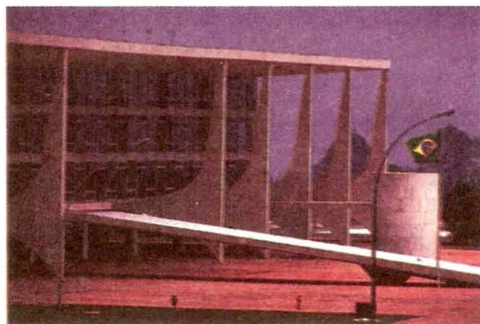
a) Que relação existe entre os valores de α, h e d?

b) Supondo $\alpha = 30°$ e $h = 1$ m, qual o valor de d?

51. (Unicamp-SP) Uma rampa de inclinação constante, como a que dá acesso ao Palácio do Planalto em Brasília, tem 4 metros de altura na sua parte mais alta. Uma pessoa, tendo começado a subi-la, nota que após caminhar 12,3 metros sobre a rampa está a 1,5 metro de altura em relação ao solo.

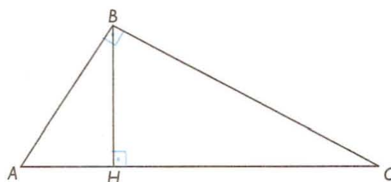
a) Faça uma figura ilustrativa da situação descrita.

b) Calcule quantos metros a pessoa ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa.


Ricardo Azoury / Pulsar

TESTES

52. (U. Católica de Salvador-BA) Na figura ao lado tem-se o triângulo ABC, retângulo em B, no qual o lado $\overline{BC}$ mede 8 cm. A altura $\overline{BH}$, relativa ao vértice B, mede 4,8 cm. A tangente do ângulo $B\hat{A}H$ é igual a:



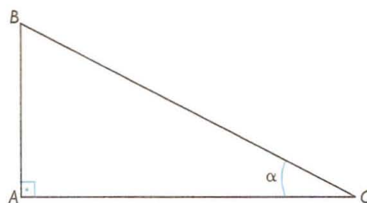
a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{4}{3}$ c) 1 d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{1}{2}$

53. (U. F. Santa Maria-RS) Num triângulo retângulo, o cosseno de um ângulo é $\frac{3}{5}$ e a hipotenusa mede 10 cm. A soma dos catetos, em centímetros, é:

a) 10 b) 12 c) 14 d) 16 e) $10\sqrt{3}$

54. (UFRS) No triângulo retângulo da figura, $\overline{BC} = 10$ e $\cos \alpha = 0{,}8$. O valor de $\overline{AB}$ é:

a) 8
b) 6
c) 5
d) 4
e) 2



55. Se os raios solares formam um ângulo α com o solo, qual é, aproximadamente, o comprimento da sombra de um edifício com 10 m de altura? $\left(\text{Dado: sen } \alpha = \frac{3}{5}\right)$

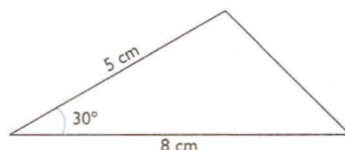
a) 16,6 m b) 15,5 m c) 14,4 m d) 13,3 m e) 12,2 m

56. (UFRS) O valor de sen 30° − cos 60° é:

a) 0 b) 1 c) $\frac{1 - \sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$ e) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$

57. (UFSE) A área, em centímetros quadrados, do triângulo representado na figura ao lado é:

a) $40\sqrt{2}$
b) $20\sqrt{3}$
c) $20\sqrt{2}$
d) 25
e) 10



58. (U. Católica de Salvador-BA) Na figura ao lado tem-se um trapézio isósceles cujos lados têm as medidas indicadas. A medida α do ângulo assinalado é:



a) 60° b) 45° c) 30° d) 22°30′ e) 15°

59. (Unifor-CE) As diagonais de um paralelogramo formam entre si um ângulo de 30° e seus comprimentos são $2\sqrt{3}$ cm e 4 cm. O perímetro desse paralelogramo, em centímetros, é:

a) $2\sqrt{13}$ b) $4\sqrt{13}$ c) $1 + \sqrt{13}$ d) $2 + 2\sqrt{13}$ e) $4 + 2\sqrt{13}$

60. (PUC-MG) O cosseno do menor ângulo interno do triângulo cujos lados medem 2 cm, 1 cm e 2 cm é igual a:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{6}{7}$ e) $\frac{7}{8}$

61. (UFES) Dado o triângulo abaixo, podemos afirmar que o valor de cos α é:

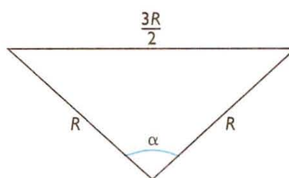
a) $\frac{1}{7}$

b) $-\frac{\sqrt{3}}{8}$

c) $\frac{\sqrt{7}}{4}$

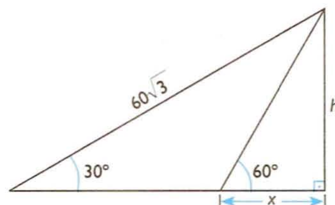
d) $-\frac{1}{8}$

e) $\frac{3\sqrt{7}}{8}$



62. (Imes-SP) Na figura, o valor de x é:

a) 20
b) 30
c) 40
d) 50
e) 60



63. (Unisinos-RS) Se num triângulo ABC temos: med $(A) = 30°$, med $(B) = 60°$ e med $(\overline{AB}) = 25$ cm, então med $(\overline{BC})$ é, em cm, igual a:

a) $25\sqrt{3}$ b) $25\sqrt{2}$ c) $12{,}5\sqrt{3}$ d) $12{,}5\sqrt{2}$ e) 12,5

64. (FEI-SP) Se em um triângulo ABC o lado AB mede 3 cm, o lado BC mede 4 cm e o ângulo interno formado entre os lados AB e BC mede 60°, então o lado AC mede:

a) $\sqrt{37}$ cm b) $\sqrt{13}$ cm c) $2\sqrt{3}$ cm d) $3\sqrt{3}$ cm e) $2\sqrt{2}$ cm

65. (Vunesp) Do quadrilátero $ABCD$ da figura ao lado, sabe-se que: os ângulos internos de vértices A e C são retos; os ângulos CDB e ADB medem, respectivamente, 45° e 30°; o lado CD mede 2 dm.
Então, os lados AD e AB medem, respectivamente, em dm:

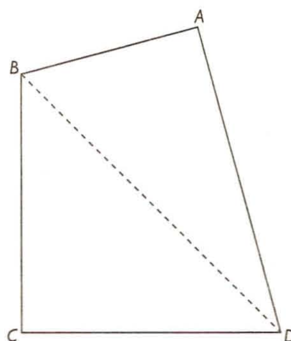
a) $\sqrt{6}$ e $\sqrt{3}$

b) $\sqrt{5}$ e $\sqrt{3}$

c) $\sqrt{6}$ e $\sqrt{2}$

d) $\sqrt{6}$ e $\sqrt{5}$

e) $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$



Capítulo

12 Trigonometria – arcos e ângulos

1. Introdução

No capítulo anterior, trabalhamos com várias relações envolvendo as medidas de lados e de ângulos de um triângulo. Entre as relações estudadas estavam as razões trigonométricas de ângulos agudos: seno, cosseno e tangente.

O ramo da matemática que estuda esses tipos de relações é chamado **trigonometria** (do grego *trígonon*, triângulo, e *metría*, medição, ato de medir).

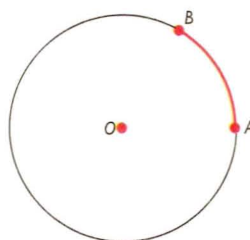
Os primeiros estudos sobre trigonometria tiveram origem nas relações existentes entre lados e ângulos num triângulo e datam de muito tempo.

Neste capítulo, prepararemos o terreno para o estudo de algumas novas funções, chamadas **funções trigonométricas**, entre as quais as funções seno e cosseno.

Essas funções são muito importantes, pois inúmeros fenômenos que ocorrem em nossa volta são descritos por funções desse tipo.

Assim, por exemplo, ocorre com a eletricidade, com as ondas sonoras, com estudos topográficos etc.

2. Arcos e ângulos



Dois pontos A e B quaisquer, tomados sobre uma circunferência, dividem-na em duas partes, cada uma delas chamada **arco da circunferência**.

A figura ao lado mostra o arco $\overset{\frown}{AB}$. Nele, o ponto A é a sua origem e B, a sua extremidade.

A medida do comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ pode ser feita utilizando-se qualquer das unidades usadas para medir seu raio, como o metro, o centímetro etc. As unidades mais comumente usadas são o **grau** e o **radiano**.

- **Medida de um arco utilizando o grau como unidade**

Com relação ao grau, já sabemos que é uma unidade de medida de um arco de circunferência, tal que:

Um grau (1°) corresponde a $\frac{1}{360}$ da circunferência onde está o arco a ser medido.

Portanto a circunferência tem 360°.

Sabemos ainda que:

$1° \text{ tem } 60' \text{ e } 1' \text{ tem } 60''$

e que, a partir de segundos, voltamos a utilizar o sistema decimal, usando décimos, centésimos etc. (de segundo).

Assim:

a) $12° \, 20'$ significa 12 graus e 20 minutos;
b) $5° \, 10' \, 30''$ significa 5 graus, 10 minutos e 30 segundos;
c) $30° \, 15' \, 10{,}5''$ significa 30 graus, 15 minutos, 10 segundos e 5 décimos de segundo.

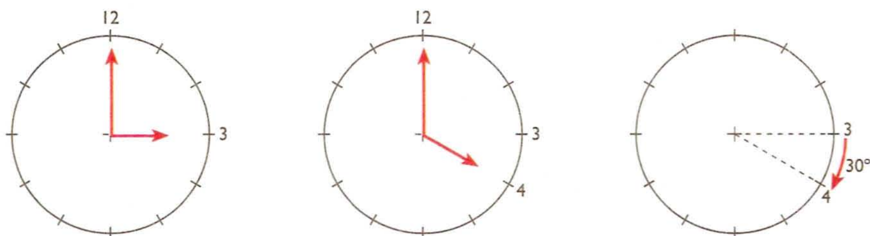
Vejamos um exemplo de aplicação.

Considerando-se um relógio com ponteiro das horas e ponteiro dos minutos, calcular:

a) o deslocamento do ponteiro das horas em 1 hora.
b) o deslocamento do ponteiro das horas em 1 minuto.
c) o deslocamento do ponteiro dos minutos em 1 hora.
d) o deslocamento do ponteiro dos minutos em 1 minuto.
e) o menor arco determinado pelos dois ponteiros quando for 3 h 10 min.

Solução

a) Veja o que ocorre, por exemplo, das 3 h às 4 h.



Notando que o mostrador está dividido em 12 partes iguais (uma para cada hora), então, para cada hora, corresponderá um deslocamento de $360° \div 12$, ou seja, em 1 hora o ponteiro das horas se desloca 30°.

b) Já sabemos que em 1 hora (60 min) o ponteiro das horas se desloca 30°. Temos a seguinte regra de três simples e direta:

Tempo (min)		**Deslocamento (graus)**
60	→	30
1	→	x

Temos que: $\frac{60}{1} = \frac{30}{x} \Rightarrow 60 \cdot x = 30 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ ou $0,5$.

Então, em cada minuto o ponteiro das horas se desloca 0,5°, ou seja, 30'.

c) Em 1 hora o ponteiro dos minutos dá uma volta completa, ou seja, o deslocamento é de 360°.

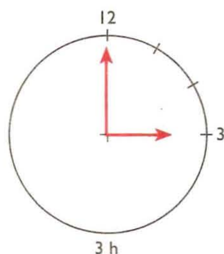
d) Em 1 hora (60 min) o ponteiro dos minutos se desloca 360°. Temos a regra de três simples e direta mostrada a seguir.

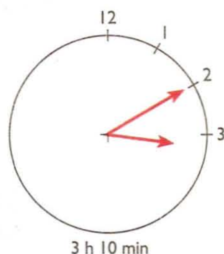
Tempo (min)	Deslocamento (graus)
60	360
1	x

Então: $\frac{60}{1} = \frac{360}{x} \Rightarrow 60 \cdot x = 360 \Rightarrow x = 6.$

Portanto, em cada minuto o ponteiro dos minutos se desloca 6°.

e) Vamos analisar o que ocorre desde as 3 h até 3 h 10 min.





Às 3 h o arco era de $3 \cdot 30°$, ou seja, 90°.
Nos 10 min o ponteiro das horas se deslocou $10 \cdot \frac{1}{2}$ grau, ou seja, 5° (aumentou o arco).

Nos mesmos 10 min o ponteiro dos minutos se deslocou $10 \cdot 6°$, ou seja, 60° (diminuiu o arco).
Então o arco procurado mede: $90° + 5° - 60° = 35°$.
O menor arco às 3 h 10 min mede 35°.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Um relógio tem o ponteiro de horas e o de minutos. Determine o deslocamento do ponteiro das horas depois de passados:

a) 4 h

b) 25 min

c) 2 h 15 min



Luiz Antonio

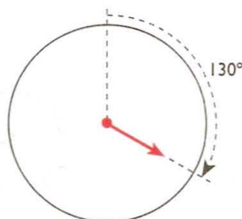
2. Nesse mesmo relógio, determine o deslocamento do ponteiro dos minutos depois de passados:

a) 20 min b) 30 min 30 s

3. Ainda com o mesmo relógio, calcule o menor dos ângulos determinados pelos ponteiros quando marcarem:

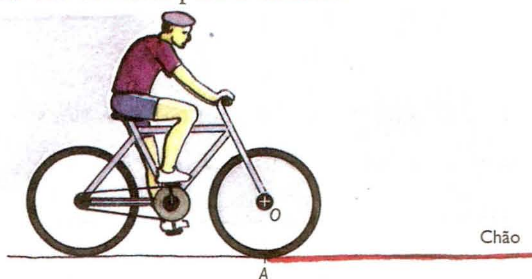
a) 3 h 20 min b) 1 h 15 min c) 7 h 30 min

4. Um relógio perdeu o ponteiro dos minutos, mas ainda tem o das horas. Num determinado momento, esse ponteiro está posicionado como mostra a figura ao lado. Que horas são?

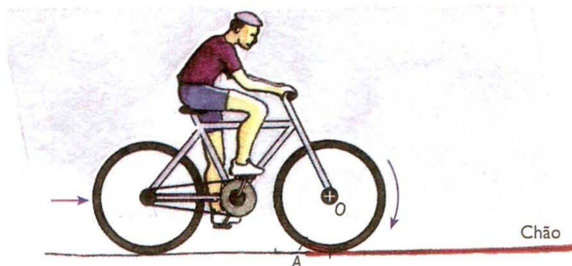


- **Medida de um arco usando o radiano como unidade**

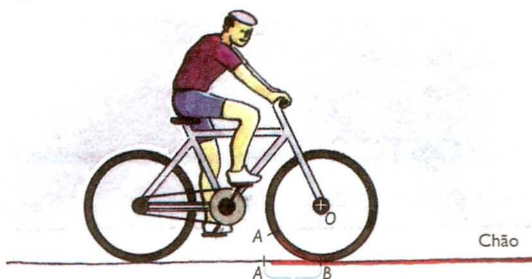
Vamos entender o que é radiano através da situação a seguir.
Um ciclista começa a rodar sua bicicleta para a direita...



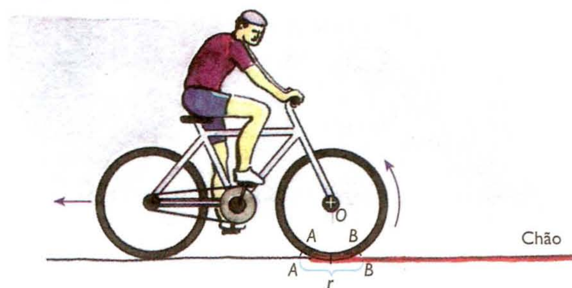
... e, quando percebe que no chão existe tinta vermelha, que está "pintando" o pneu...



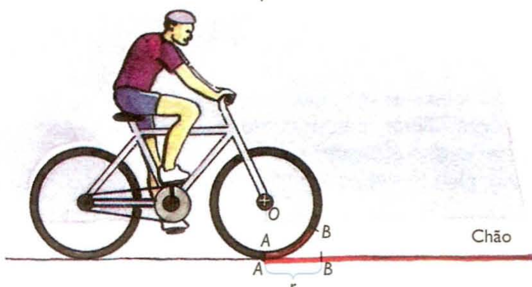
... ele pára. Só que, ao parar, ele já havia avançado uma distância igual ao raio da roda da bicicleta.



O ciclista volta, de ré, para a posição inicial.



Posição inicial.



Pois bem, o ciclista voltou à posição inicial mas, nisso, uma parte do pneu foi pintada de vermelho! Exatamente a parte correspondente ao arco $\widehat{A'B'}$ da figura e **cujo comprimento é igual ao do raio**.

Um arco cujo comprimento é igual ao do raio da circunferência onde se encontra mede **1 radiano** e é indicado por **1 rad**. No nosso exemplo, $\widehat{A'B'}$ mede 1 rad.

Então, definimos:

> **Radiano** é uma unidade de medir arcos. É um arco de comprimento igual ao raio da circunferência onde está o arco a ser medido.

Observação: é importante notar que, como o **comprimento de uma circunferência** é dado por $C = 2 \cdot \pi \cdot r$, em que r é a medida do raio, então, em radianos, a circunferência toda terá:

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot \cancel{r}^{\,1}}{\cancel{r}_{\,1}} \text{ rad, ou seja, } 2\pi \text{ rad } (\pi \text{ vale aproximadamente } 3{,}14).$$

Dessa forma, para uma circunferência qualquer, temos que 360° correspondem a 2π rad, ou seja:

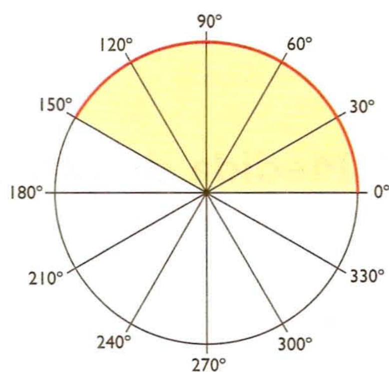
> 180° correspondem a π rad.

A transformação da medida de um arco dada em graus para radianos (e vice-versa) é feita simplesmente aplicando-se uma regra de três simples e direta.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1

Exprimir 150° em radianos.



Solução

Temos a regra de três simples e direta:

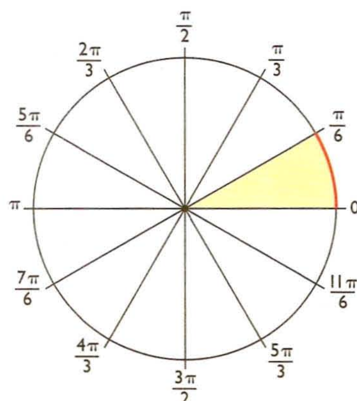
Arco (graus)	**Arco (rad)**
180	π
150	x

Então: $\dfrac{\cancel{180}^{\,6}}{\cancel{150}_{\,5}} = \dfrac{\pi}{x} \Rightarrow 6x = 5\pi \Rightarrow x = \dfrac{5\pi}{6}$.

O arco mede $\dfrac{5\pi}{6}$ rad.

Exemplo 2

Exprimir $\dfrac{\pi}{6}$ rad em graus.



Solução

Como π rad corresponde a 180°, então $\dfrac{\pi}{6}$ rad corresponderá a $\dfrac{180°}{6}$, ou seja, 30°.

Exemplo 3

Exprimir em graus o arco de $\frac{\pi}{50}$ rad.

Solução

Como π rad corresponde a 180°, então $\frac{\pi}{50}$ rad corresponderá a $\frac{180°}{50}$.

Vamos dividir 180° por 50:

$$\begin{array}{r|l} 180° & 50 \\ \hline \underbrace{30°}_{\text{Resto}} & 3° \end{array} \qquad \begin{array}{r} 30° \text{ (resto)} \\ \times\ 60 \\ \hline 1\,800' \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1\,800' & 50 \\ \hline 300' & 36' \\ 00 & \end{array}$$

O arco procurado mede 3° 36′.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5. Exprima em radianos:

a) 60° b) 30° c) 45° d) 120°

6. Dê em graus:

a) $\frac{2\pi}{3}$ rad b) $\frac{3\pi}{4}$ rad c) $\frac{7\pi}{6}$ rad d) $\frac{\pi}{15}$ rad

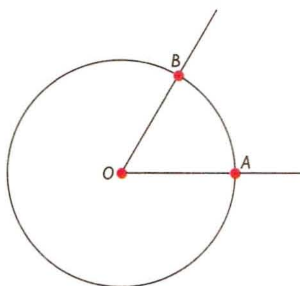
7. Transforme:

a) 1° em radianos b) 1 rad em graus

3. Medida de um ângulo central

Vimos em nossos estudos de 1º grau que um ângulo, com vértice no centro de uma circunferência, é chamado **ângulo central**.

A figura abaixo mostra o ângulo central $A\hat{O}B$.



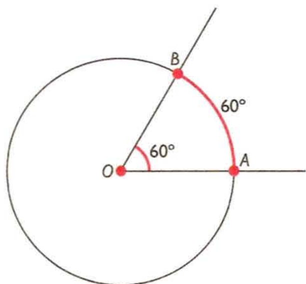
É muito conveniente adotar como unidade de medida de um ângulo central o ângulo que determina na circunferência um arco unitário.

Dessa forma:

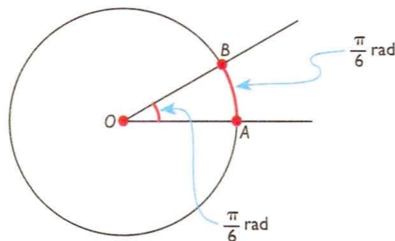
> O número que exprime a medida do ângulo $A\hat{O}B$ é o mesmo que exprime a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$.

Assim

a) Se a unidade de medida for o grau e o arco $\widehat{AB}$ medir, por exemplo, 60°, então o ângulo $A\hat{O}B$ também medirá 60°.



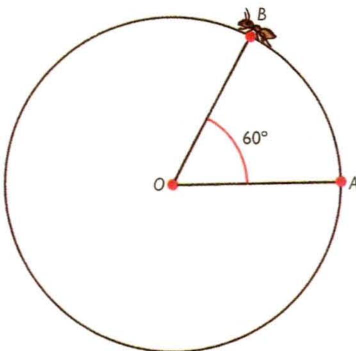
b) Se a unidade de medida for o radiano e o arco $\widehat{AB}$ medir, por exemplo, $\frac{\pi}{6}$ rad, então o ângulo $A\hat{O}B$ também medirá $\frac{\pi}{6}$ rad.



Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1

A circunferência da figura abaixo tem 8 cm de raio. Um inseto parte do ponto A e anda sobre ela até o ponto B. Sabendo que a medida do ângulo central $A\hat{O}B$ é 60°, determinar quantos centímetros andou o inseto.



Solução

Temos a seguinte regra de três simples e direta:

Ângulo central (graus)	**Comprimento do arco** (cm)
360	$2 \cdot \pi \cdot 8$
60	x

Então:

$$\frac{360}{60} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 8}{x} \Rightarrow x = \frac{2 \cdot \pi \cdot 8 \cdot 60}{360} \Rightarrow x = \frac{3,14 \cdot 8}{3} \Rightarrow x \simeq 8,37$$

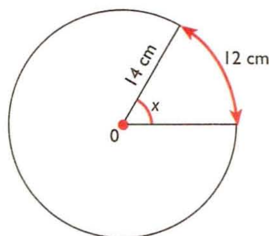
Portanto o inseto andou aproximadamente 8,37 cm.

Exemplo 2

Numa circunferência que tem 28 cm de diâmetro, um arco tem 12 cm de comprimento. Qual é a medida (em rad) do ângulo central correspondente?

Solução

Se o diâmetro mede 28 cm, então o raio mede 14 cm. Temos a seguinte regra de três simples e direta:



Comprimento do arco (cm)	Ângulo central (rad)
$2 \cdot \pi \cdot 14$	$2 \cdot \pi$
12	x

Portanto:

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot 14}{12} = \frac{2 \cdot \pi}{x} \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 12}{2 \cdot 14} \Rightarrow x \simeq 0,86$$

Assim sendo, o ângulo central mede aproximadamente 0,86 rad.

Observação: de um modo geral, chamando de S o comprimento de um arco, de α a medida, em radianos, do ângulo central correspondente, e de r a medida do raio, temos a seguinte regra de três:

Comprimento do arco	Medida do ângulo central (em rad)
$2 \cdot \pi \cdot r$	2π
S	α

Então:

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{S} = \frac{2\pi}{\alpha}, \text{ portanto } \boxed{S = \alpha \cdot r}$$

Utilizemos essa fórmula para solucionar o problema dado.

Como $S = 12$ cm e $r = 14$ cm, temos:

$$12 \text{ cm} = \alpha \cdot 14 \text{ cm} \Rightarrow \alpha = \frac{12}{14} \Rightarrow \alpha \simeq 0{,}86 \text{ rad}$$

Exemplo 3

Determinar quanto mede o raio de uma circunferência, sabendo que um arco que mede 10 cm corresponde a um ângulo central de $\frac{5}{6}$ radianos.

Solução

Seja r a medida do raio, em cm. Temos a regra de três simples e direta:

Comprimento do arco (cm)	Ângulo central (rad)
$2 \cdot \pi \cdot r$	$2 \cdot \pi$
10	$\frac{5}{6}$

Assim sendo:

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{10} = \frac{2 \cdot \pi}{\frac{5}{6}} \Rightarrow \frac{r}{10} = \frac{6}{5} \Rightarrow r = \frac{6 \cdot 10}{5} \Rightarrow r = 12$$

Portanto o raio da circunferência mede 12 cm.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

(Para os exercícios seguintes, usar $\pi = 3{,}14$.)

8. Determine:

a) o comprimento de um arco de circunferência (em cm), sabendo que ela tem 12 cm de raio e o ângulo central correspondente mede 20°.
b) o ângulo central (em rad) correspondente a um arco de 15 cm de comprimento, sabendo que ela tem raio de 20 cm.
c) a medida do raio de uma circunferência (em cm), sabendo que nela um ângulo central de 15° corresponde a um arco de 30 cm.

9. A roda dianteira de uma bicicleta tem 40 cm de raio.

a) Quantos metros ela percorre ao dar 5 000 voltas?
b) Quantas voltas ela deve dar para percorrer 9 420 m?



Juca Martins / Pulsar

4. O ciclo trigonométrico

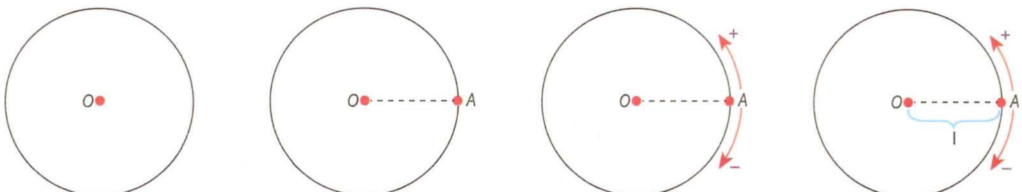
Quando em nossos estudos de 1º grau estabelecemos a idéia de eixo, na verdade o que fizemos foi o seguinte:

a) Tinha-se uma reta.
b) Tomou-se um de seus pontos.
c) Estabeleceu-se um sentido positivo.
d) Estabeleceu-se uma unidade de medir.



Que tal fazermos isso com uma circunferência?
Veja:

a) Temos uma circunferência.
b) Tomemos um de seus pontos como origem dos arcos.
c) Estabeleçamos um sentido positivo para os arcos.
d) Estabeleçamos o radiano como unidade de medida de arcos.

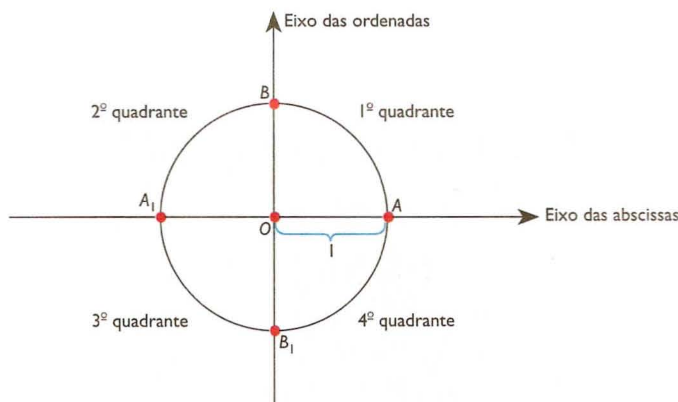


Dessa forma, obtemos um **ciclo trigonométrico**.
Então:

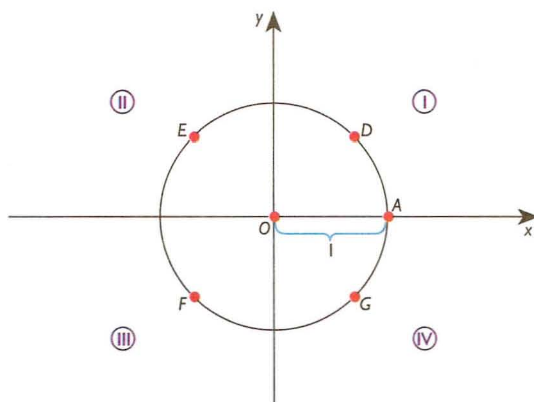
Ciclo trigonométrico ou simplesmente **ciclo** é uma circunferência orientada, na qual o raio mede 1.

Considerando então um ciclo trigonométrico, podemos estabelecer um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, com origem no centro do ciclo. Dessa forma, o plano cartesiano fica dividido em quatro regiões, cada uma chamada **quadrante**.

Veja a figura:



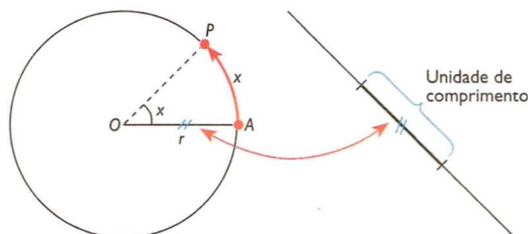
Assim, na figura:



dizemos que:

- $\widehat{AD}$ é um arco do 1º quadrante;
- $\widehat{AE}$ é um arco do 2º quadrante;
- $\widehat{AF}$ é um arco do 3º quadrante;
- $\widehat{AG}$ é um arco do 4º quadrante.

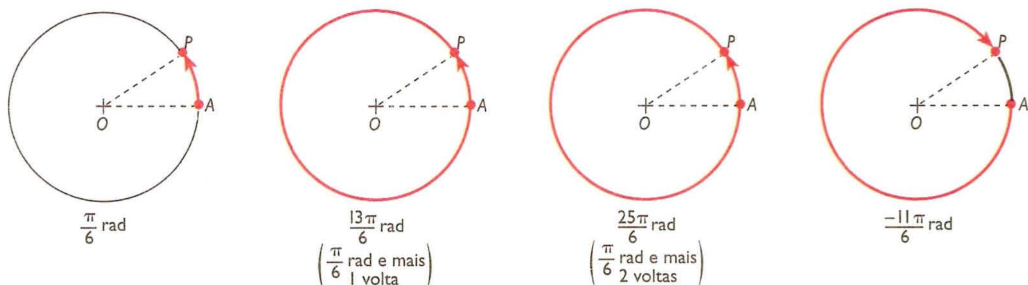
Observe agora a figura:



Notemos que a cada número real x corresponde um ponto P do ciclo, tal que $\widehat{AP}$ mede x. O ponto P é a **imagem** de x no ciclo.

Observação: é importante observar que a cada $x \in \mathbb{R}$ corresponde **um só ponto** P, mas para cada ponto P existem infinitos arcos de origem A e extremidade P e, conseqüentemente, infinitos valores de x.

Veja um exemplo disso nas figuras seguintes. Os arcos de medidas $\frac{\pi}{6}$ rad, $\frac{13\pi}{6}$ rad, $\frac{25\pi}{6}$ rad e $\frac{-11\pi}{6}$ rad possuem a mesma origem A e a mesma extremidade P.



Esse fato sugere a idéia de definirmos um arco trigonométrico.

5. O arco trigonométrico

Seja a_0 a medida de um arco $\widehat{AP}$ em radianos, tal que $0 \leqslant a_0 < 2\pi$. Chamamos **arco trigonométrico** o conjunto dos números a do tipo:

$$a = a_0 + k \cdot \underbrace{2\pi}_{\text{1 volta}}, \text{ onde } k \in \mathbb{Z}, \text{ ou seja, } k \in \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$$

Assim:

- se $k = 0$, obtemos $a = a_0$, que é a primeira determinação positiva do arco $\widehat{AP}$;
- se $k = -1$, obtemos $a = a_0 - 2\pi$, que é a primeira determinação negativa do arco $\widehat{AP}$.

No último exemplo visto, $\frac{\pi}{6}$ rad é a primeira determinação positiva do arco $\widehat{AP}$, $\frac{13\pi}{6}$ rad é a segunda, $\frac{25\pi}{6}$ rad é a terceira etc.; $\frac{-11\pi}{6}$ rad é a primeira determinação negativa.

Observação: no caso de a_0 ser a medida do arco $\widehat{AP}$ em graus, tal que $0° \leqslant a_0 < 360°$, chamamos arco trigonométrico o conjunto dos números a do tipo:

$$a = a_0 + k \cdot 360°, \text{ onde } k \in \mathbb{Z}$$

Na prática, o encontro da primeira determinação positiva é feito, inicialmente, encontrando o número de voltas.

Exemplo 1

Obter a primeira determinação positiva dos arcos cujas medidas são:

a) 125° b) 1 250° c) $\frac{13\pi}{3}$ rad d) 380° 30′

Solução

a) 125°

Como $0° < 125° < 360°$, então a primeira determinação positiva é 125°.

b) 1 250°

Observando que cada 360° corresponde a uma volta no ciclo, temos que:

$$\begin{array}{r|l} 1\,250° & 360° \\ \cline{2-2} 170° & 3 \text{ (voltas)} \end{array}$$

portanto $1\,250° = 3 \cdot 360° + 170°$.

Então a primeira determinação positiva é 170°.

c) $\dfrac{13\pi}{3}$ rad

Lembrando que cada 2π rad corresponde a uma volta no ciclo, temos:

$$\frac{13\pi}{3} \text{ rad} = \frac{12\pi}{3} \text{ rad} + \frac{\pi}{3} \text{ rad} = \underbrace{4\pi \text{ rad}}_{\textbf{2 voltas}} + \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

Assim sendo, a primeira determinação positiva é $\dfrac{\pi}{3}$ rad.

d) 380° 30′

Temos que: $380°\,30' = \underbrace{360°}_{\textbf{1 volta}} + 20°\,30'$

Então a primeira determinação positiva é 20° 30′.

Exemplo 2

Calcular a primeira determinação positiva e a primeira determinação negativa dos arcos cujas medidas são:

a) $-45°$ b) 400° c) $-800°$ d) $\dfrac{-15\pi}{2}$ rad

Solução

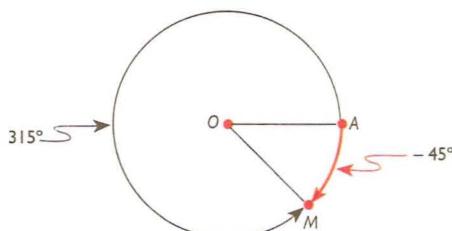
a) $-45°$

Essa é a primeira determinação negativa. Como a primeira determinação negativa do arco trigonométrico $a = a_0 + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$, ocorre quando $k = -1$, temos que:

$$-45° = a_0 - 1 \cdot 360° \Rightarrow a_0 = 360° - 45° \Rightarrow a_0 = 315°$$

Então a primeira determinação positiva é 315° e a primeira determinação negativa é $-45°$.

Veja a ilustração:



b) 400°

Temos que 400° = 360° + 40°.

Assim sendo, a primeira determinação positiva é 40°.

O arco trigonométrico é, portanto:

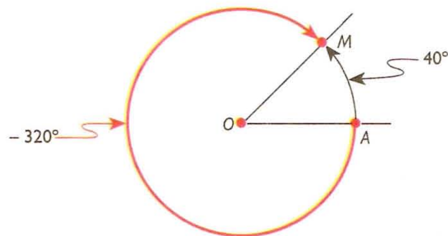
$$a = 40° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$$

Como a primeira determinação negativa ocorre quando $k = -1$, temos:

$$a = 40° - 360° \Rightarrow a = -320°$$

Dessa forma concluímos que a primeira determinação positiva é 40° e a primeira determinação negativa é −320°.

Veja a ilustração:



c) −800°

Note que cada −360° corresponde a uma volta no ciclo, dada no sentido negativo. Então:

$$-800° = \underbrace{-360° - 360°}_{\textbf{2 voltas}} - 80°$$

Assim, a primeira determinação negativa é − 80°.

Como no arco trigonométrico $a = a_0 + k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{Z}$, a primeira determinação negativa ocorre quando $k = -1$, temos:

$$-80° = a_0 - 360° \Rightarrow a_0 = 360° - 80° \Rightarrow a_0 = 280°$$

d) $\dfrac{-15\pi}{2}$ rad

Como cada -2π rad corresponde a uma volta no ciclo, dada no sentido negativo, temos que:

$$\frac{-15\pi}{2} \text{ rad} = \frac{-12\pi}{2} \text{ rad} - \frac{3\pi}{2} \text{ rad} = \underbrace{-6\pi \text{ rad}}_{\textbf{3 voltas}} - \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$

Assim, $\dfrac{-3\pi}{2}$ rad é a primeira determinação negativa. Como no arco trigonométrico $a = a_0 + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a primeira determinação negativa ocorre quando $k = -1$, temos:

$$\frac{-3\pi}{2} = a_0 - 1 \cdot 2\pi \Rightarrow a_0 = 2\pi - \frac{3\pi}{2} \Rightarrow a_0 = \frac{\pi}{2}$$

Dessa forma concluímos que a primeira determinação positiva é $\dfrac{\pi}{2}$ rad e a primeira determinação negativa é $\dfrac{-3\pi}{2}$ rad.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

10. Dê a primeira determinação positiva dos arcos cujas medidas são:

a) 54° b) 840° c) $\frac{\pi}{8}$ rad d) $\frac{19\pi}{4}$ rad

11. Calcule a primeira determinação negativa dos arcos cujas medidas são:

a) 64° b) 540° 24′ c) $\frac{5\pi}{3}$ rad d) $\frac{15\pi}{2}$ rad

12. Obtenha a primeira determinação positiva e a primeira determinação negativa dos arcos de medidas:

a) −100° b) −800° c) $\frac{-3\pi}{8}$ rad d) $\frac{-13\pi}{4}$ rad

13. No arco trigonométrico $a = a_0 + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, calcule:

a) a primeira determinação negativa, se a primeira determinação positiva for $\frac{3\pi}{8}$ rad.

b) a primeira determinação positiva, se a primeira determinação negativa for $\frac{-5\pi}{6}$ rad.

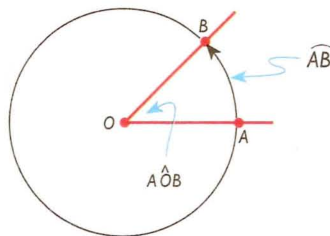
14. No arco trigonométrico $a = a_0 + k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{Z}$, calcule:

a) a primeira determinação negativa, se a primeira determinação positiva for 145°.
b) a primeira determinação positiva, se a primeira determinação negativa for −240°.

RELEMBRANDO CONCEITOS

Veja a figura ao lado.

O número que exprime a medida do ângulo central $A\hat{O}B$ é o mesmo que exprime a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$.



Unidades de medida de arco (ou de ângulo central)

1 **Grau**, indicado por 1°, corresponde a $\frac{1}{360}$ da circunferência onde está o arco a ser medido.

1 grau tem 60 minutos, ou seja: $1° = 60'$.

1 minuto tem 60 segundos, ou seja: $1' = 60''$.

1 **Radiano**, indicado por 1 rad, corresponde ao arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência onde está o arco a ser medido.

O comprimento (S) de um arco cujo ângulo central, em radianos, mede α e o raio mede r é dado por:

$$S = \alpha \cdot r$$

Arco trigonométrico

$a = a_0 + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, com $0 \leq a_0 \leq 2\pi$, é chamado arco trigonométrico.

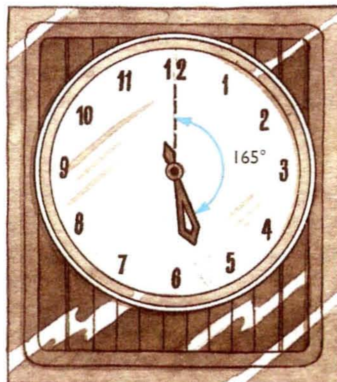
Para $k = 0$, obtemos $a = a_0$, chamada primeira determinação positiva do arco.

Para $k = -1$, obtemos $a = a_0 - 2\pi$, chamada primeira determinação negativa do arco.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

15. Quando Pedrinho comprou sua bicicleta, o pneu era bem borrachudo e tinha 35 cm de raio. Nessa época, para ir de sua casa à escola, o pneu girava 345 vezes. Depois de muito uso, o pneu ficou "careca", tendo perdido 0,5 cm de sua casca. Quantas vezes a roda da bicicleta deverá girar para fazer o mesmo trajeto, agora com pneu "careca"? (Usar $\pi = 3,14$.)

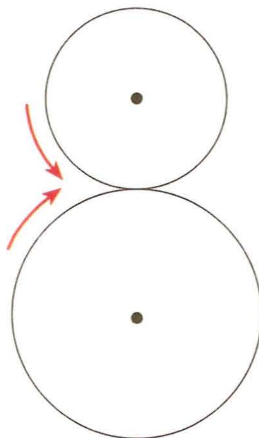
16. O relógio de parede de um matemático tem mostrador circular e perdeu o ponteiro dos minutos; só ficou o ponteiro das horas. No entanto o matemático não se incomoda muito com isso, pois, quando quer saber as horas, ele mede o ângulo que o ponteiro forma com a reta que passa pelo número 12 e pelo centro do mostrador. Se numa manhã, ao acordar, a posição do ponteiro das horas era igual à da figura ao lado, responda: A que horas exatamente ele acordou?



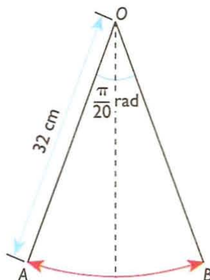
17. Na figura ao lado, vemos dois roletes circulares. Quando o rolete maior gira, o atrito faz com que o menor gire também. Considerando que os raios dos roletes medem 45 cm e 25 cm, responda:

a) Quantas voltas completas dará o pequeno, se o grande der 68 voltas?

b) Quantas voltas completas deu o grande, se o pequeno fez 1 251 voltas?



18. Uma pedra está amarrada na ponta de um barbante e a outra ponta está presa em O (ver figura). Ela executa o movimento de um pêndulo de relógio desde A até B. Se o barbante mede 32 cm e o ângulo $A\hat{O}B$ é de $\frac{\pi}{20}$ rad, determine quantos centímetros percorre a pedra.



19. Numa pista de autorama uma curva tem 60 cm e é arco de uma circunferência. Se o ângulo central correspondente é de $\frac{\pi}{12}$ rad, determine o raio da circunferência.

20. (Fesp-SP) A medida em radianos de um arco de 12° é:

a) $\frac{\pi}{15}$ b) $\frac{\pi}{12}$ c) $\frac{\pi}{8}$ d) $\frac{\pi}{6}$ e) $\frac{\pi}{10}$

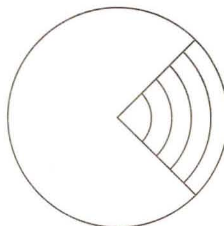
21. O ângulo agudo formado pelos ponteiros de um relógio quando ele marca 1 h 20 min é:

a) 120° b) 110° c) 100° d) 90° e) 80°

22. (UFPI) Supondo que o movimento dos ponteiros de um relógio seja contínuo (não aos saltos), o ângulo que esses ponteiros formam quando o relógio marca 11 horas e 45 minutos é:

a) 60° 30' b) 72° c) 60° d) 82° 30' e) 85°

23. (U. Bauru-SP) Na figura ao lado tem-se 5 arcos de circunferências concêntricas e igualmente espaçados entre si. Sabendo-se que a soma dos comprimentos desses arcos é igual ao comprimento da circunferência maior, assinale a alternativa que indica a medida do ângulo central comum a todas as circunferências:



a) 120°
b) 90°
c) 72°
d) 60°
e) 45°

24. (Faap-SP) Dois ciclistas percorrem, no mesmo sentido, uma pista circular de 50 metros de diâmetro. A cada volta, o primeiro percorre 2,5 m a mais do que o segundo. Supondo que mantenham o mesmo ritmo, o primeiro ciclista terá percorrido 1 radiano a mais do que o segundo após:



a) 20 voltas
b) 15 voltas
c) 10 voltas
d) 5 voltas
e) 2,5 voltas

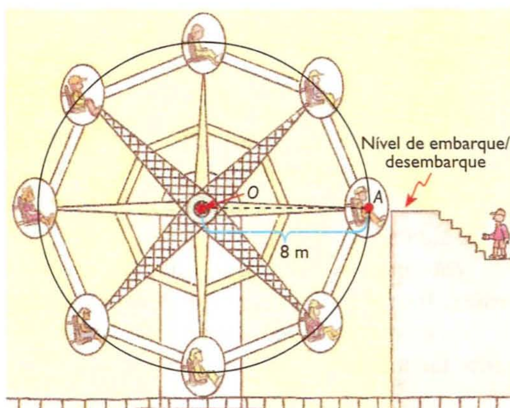
Capítulo

13 Funções trigonométricas

1. Introdução

Todos, seguramente, já tiveram oportunidade de ver uma roda-gigante em algum parque de diversões, ou mesmo pela televisão. Alguns até já "andaram" nela.

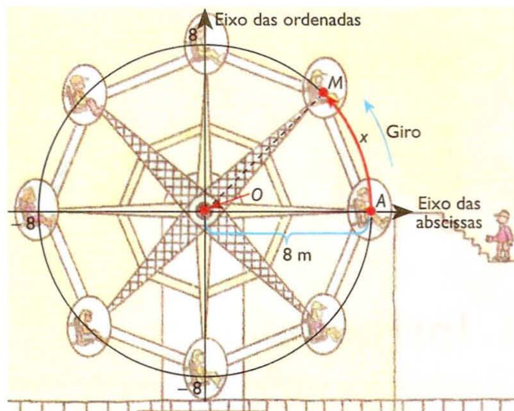
Agora imagine uma roda-gigante cujo raio tenha, digamos, 8 metros, e que o setor de embarque/desembarque, que chamaremos de nível, seja como o mostrado na figura.



Você vai entrar em um de seus compartimentos, e a roda vai girar no sentido anti-horário. Quando ela começa a girar, a sua posição relativamente ao nível começa a mudar. A tabela seguinte mostra de metro em metro a sua posição.

Você estará	Posição relativa ao nível	Observação	Sua posição será indicada por
...	0 m	está no nível	0
subindo	1 m acima		1
subindo	2 m acima		2
...	...		...
subindo	7 m acima		7
subindo	8 m acima	altura máxima	8
descendo	7 m acima		7
descendo	6 m acima		6
...	...		...
descendo	1 m acima		1
descendo	0 m	está no nível	0
descendo	1 m abaixo		−1
descendo	2 m abaixo		−2
...	...		...
descendo	7 m abaixo		−7
descendo	8 m abaixo	altura mínima	−8
subindo	7 m abaixo		−7
subindo	6 m abaixo		−6
...	...		...
subindo	1 m abaixo		−1
subindo	0 m	está no nível	0

Então, se estabelecermos um sistema cartesiano ortogonal com origem no centro da roda-gigante, e considerando a roda-gigante como uma circunferência na qual a sua posição num certo instante qualquer é M, teremos o gráfico ao lado.



Veja que, para cada número real x, existe em correspondência um ponto M, tal que o arco $\overset{\frown}{AM}$ mede x, e, para cada arco $\overset{\frown}{AM}$, existe em correspondência um número real que varia desde -8 até 8, e que representa a sua altura com relação ao nível.

Então, temos que a altura é uma função de x. Poderíamos chamar essa função de "função roda-gigante".

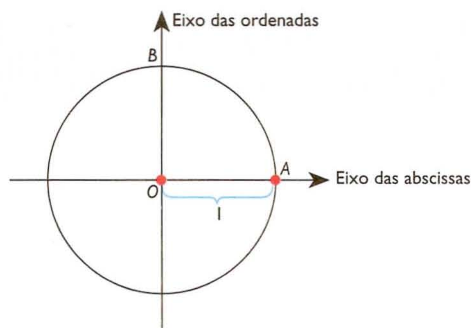
Note que, se a roda continuar a girar, você passará novamente pelas mesmas posições anteriores. Isso significa dizer que a nossa função é periódica.

Você entendeu bem essa função? Que bom! Assim você entenderá a **função seno** com bastante facilidade.

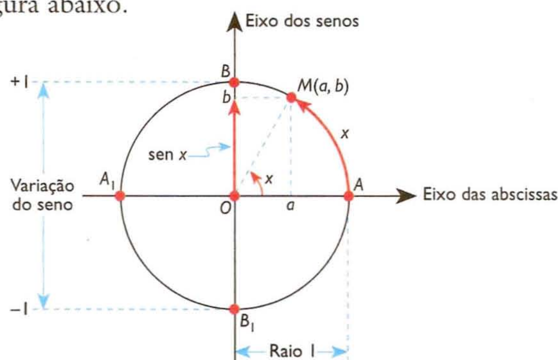
2. A função seno

Agora que já aprendemos o que é um ciclo trigonométrico, e até já andamos de roda-gigante, vamos definir uma função muito importante: **a função seno**. Você verá que ela é bastante parecida com a nossa "função roda-gigante".

Para tanto, tomemos um sistema cartesiano ortogonal de origem O, e um ciclo trigonométrico de centro em O, onde A é a origem dos arcos, como mostra a figura ao lado.



Agora observe a figura abaixo.



Para cada número real x existe em correspondência um ponto M, tal que o arco $\overset{\frown}{AM}$ mede x, e o ângulo $A\hat{O}M$ também mede x.

Chamando de a a abscissa do ponto M, e de b a sua ordenada, temos:

$$M(a, b)$$

O número b, **ordenada do ponto M** é chamado **seno de x**, e é indicado por:

$$\textbf{sen}\ x = b$$

Por esse motivo, o eixo das ordenadas é também chamado de **eixo dos senos**.

Definimos a função seno como:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = \text{sen } x$$

Partindo do ponto A, vamos dar uma volta completa no ciclo. Dessa forma, observando as ordenadas dos pontos A, B, A_1 e B_1, podemos informar os valores da função seno para alguns arcos. Veja:

Medida x do arco em radianos:	Extremidade do arco está no ponto:	Ordenada do ponto é:	O valor de sen x é:
0	$A(1, 0)$	0	$\text{sen } 0 = 0$
$\frac{\pi}{2}$	$B(0, 1)$	1	$\text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$
π	$A_1(-1, 0)$	0	$\text{sen } \pi = 0$
$\frac{3\pi}{2}$	$B_1(0, -1)$	-1	$\text{sen } \frac{3\pi}{2} = -1$
2π	$A(1, 0)$	0	$\text{sen } 2\pi = 0$

Vamos fazer uma análise mais detalhada da função seno:

• O **domínio** da função $f(x) = \text{sen } x$ é $\mathbb{R}$.

• O **conjunto imagem** da função $f(x) = \text{sen } x$ é $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$, ou seja: $\text{Im}(f) = [-1, 1]$.

• A função é periódica.

Dizemos que uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **é periódica** se, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, tivermos:

$$f(x + p) = f(x), \text{ com } p \in \mathbb{R} \quad \text{(I)}$$

O menor valor positivo de p tal que (I) ocorra é chamado **período** da função f.

Assim sendo, como todos os valores do seno encontrados na primeira volta no ciclo se repetem nas voltas subseqüentes, então, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ temos que:

k é o número de voltas

$$\text{sen}(x + k \cdot 2\pi) = \text{sen } x \quad \text{(II)}$$

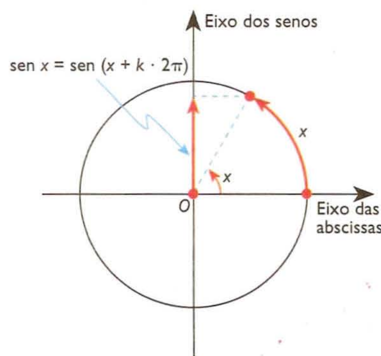
O menor valor positivo tal que (II) ocorra é $k = 1$.

Trocando k por 1 em (II), encontramos:

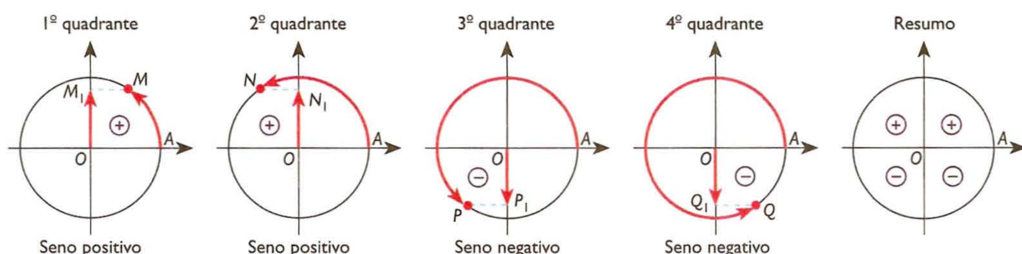
Período

$$\text{sen}(x + 1 \cdot 2\pi) = \text{sen } x \Rightarrow \text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen } x$$

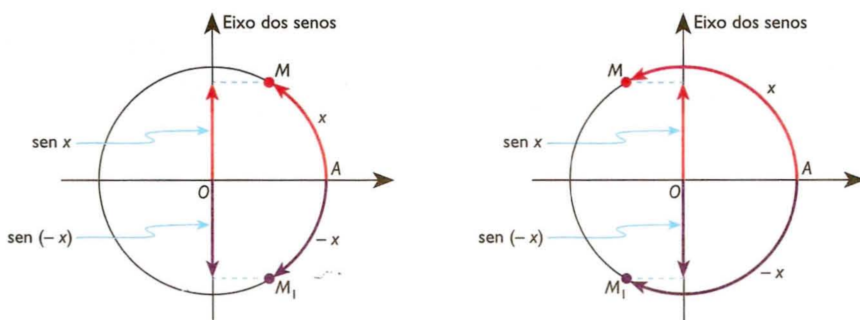
Dessa forma concluímos que a função $f(x) = \text{sen } x$ **é periódica de período 2π rad.**



• **Sinal da função $y = \text{sen } x$**: analisando o sinal da função $y = \text{sen } x$ em cada um dos quadrantes, temos:



• A função $f(x) = \text{sen } x$ é uma função ímpar.
Veja as figuras:



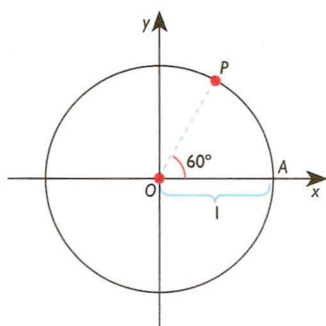
Nos dois casos temos $\text{sen}(-x) = -\text{sen } x$. Isso ocorre para qualquer $x \in \mathbb{R}$.
Assim, concluímos:

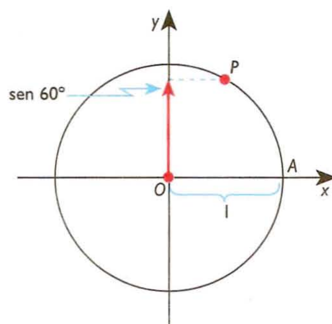
$$y = \text{sen } x \text{ é função ímpar.}$$

Observação: muitas vezes necessitamos encontrar o seno de um arco que está medido em graus, como, por exemplo, sen 60°. Devemos entender isso como uma composição de duas funções:

a) A primeira faz corresponder a 60° um ponto do ciclo.

b) A segunda faz corresponder ao ponto do ciclo a sua ordenada.





Na prática, procuramos exprimir a sua medida em radianos. Assim, $\text{sen } 60° = \text{sen } \frac{\pi}{3}$.

Essa observação, com as oportunas adaptações, será válida para as outras funções trigonométricas que estudaremos mais adiante.

Gráfico da função $y = \text{sen } x$

Quando vimos a trigonometria no triângulo retângulo, aprendemos que:

$$\text{sen } 30° = \frac{1}{2}, \text{ sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

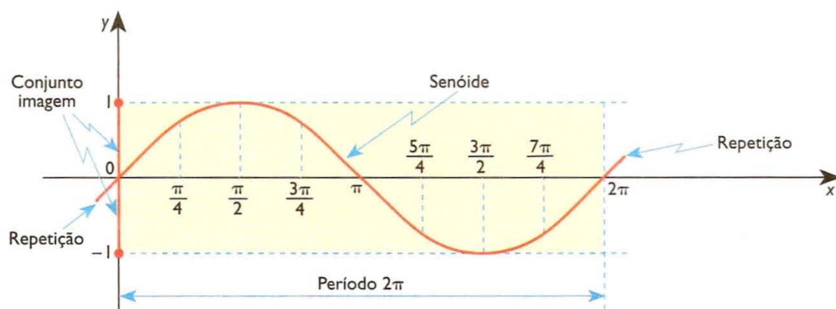
Utilizando esses valores, e observando o comportamento da ordenada de um ponto P que se move sobre o ciclo no sentido anti-horário, dando uma volta completa, podemos construir a tabela.

Tabela

x rad	$f(x) = \text{sen } x$
cresce de 0 a $\frac{\pi}{4}$	cresce de 0 a $\frac{\sqrt{2}}{2}$
cresce de $\frac{\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{2}$	cresce de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ a 1
cresce de $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{3\pi}{4}$	decresce de 1 a $\frac{\sqrt{2}}{2}$
cresce de $\frac{3\pi}{4}$ a π	decresce de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ a 0
cresce de π a $\frac{5\pi}{4}$	decresce de 0 a $\frac{-\sqrt{2}}{2}$
cresce de $\frac{5\pi}{4}$ a $\frac{3\pi}{2}$	decresce de $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ a -1
cresce de $\frac{3\pi}{2}$ a $\frac{7\pi}{4}$	cresce de -1 a $\frac{-\sqrt{2}}{2}$
cresce de $\frac{7\pi}{4}$ a 2π	cresce de $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ a 0

Fizemos x variar de 0 a 2π levando em conta o fato de ser a função $y = \text{sen } x$ periódica, de período 2π. O gráfico da função $y = \text{sen } x$ é chamado **senóide**.

Gráfico



Resumindo, temos:

1) Função $y = \text{sen } x$ ou $f(x) = \text{sen } x$.
2) O domínio é $D(f) = \mathbb{R}$.
3) O conjunto imagem é $\text{Im}(f) = [-1, 1]$.
4) A função é periódica, de período 2π rad.
5) O sinal de função é:
   - positivo no 1º e no 2º quadrante;
   - negativo no 3º e no 4º quadrante.
6) A função é ímpar.
7) A função é:
   - crescente no 1º e no 4º quadrante;
   - decrescente no 2º e no 3º quadrante.

Vamos agora analisar o comportamento de algumas funções que envolvem o seno.

Exemplo 1

Determinar o domínio, a imagem, o gráfico e o período das funções definidas por:

a) $y = 2 \cdot \text{sen } x$

b) $y = -3 + \text{sen } x$

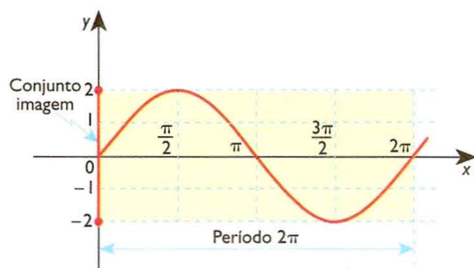
Solução

a) $y = 2 \cdot \text{sen } x$

Tabela

x rad	sen x	$y = 2 \cdot \text{sen } x$
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	1	2
π	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	-2
2π	0	0

Gráfico



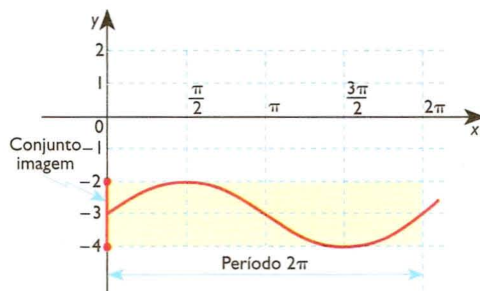
O domínio é $D(f) = \mathbb{R}$.
A imagem é $\text{Im}(f) = [-2, 2]$, ou seja:
$\text{Im}(f) = \{ y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y \leq 2 \}$.
O período é 2π rad.

b) $y = -3 + \text{sen } x$

Tabela

x rad	sen x	$y = -3 + \text{sen } x$
0	0	-3
$\frac{\pi}{2}$	1	-2
π	0	-3
$\frac{3\pi}{2}$	-1	-4
2π	0	-3

Gráfico

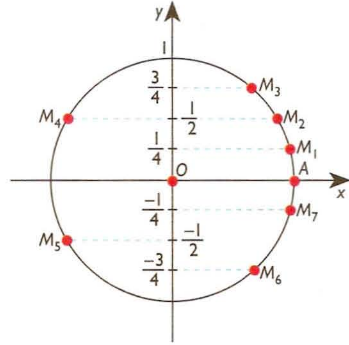


O domínio é $D(f) = \mathbb{R}$.
A imagem é $\text{Im}(f) = [-4, -2]$, ou seja:
$\text{Im}(f) = \{ y \in \mathbb{R} \mid -4 \leq y \leq -2 \}$.
O período é 2π rad.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Na figura ao lado, as medidas dos arcos $\widehat{AM_1}$, $\widehat{AM_2}$, $\widehat{AM_3}$, $\widehat{AM_4}$, $\widehat{AM_5}$, $\widehat{AM_6}$ e $\widehat{AM_7}$, em radianos, são respectivamente x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 e x_7. Determine:

   a) sen x_1
   b) sen x_2
   c) sen x_4
   d) sen x_5
   e) sen x_3 + sen x_7 − sen x_6



2. Lembrando que a função seno é uma função ímpar, verifique quais das sentenças abaixo são verdadeiras:

   a) sen (−30°) = −sen 30°
   b) −sen (−45°) = sen 45°
   c) sen (−60°) = sen 60°
   d) $\text{sen}\left(\frac{-\pi}{12}\right) = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)$
   e) $-\text{sen}\left(\frac{-\pi}{12}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)$
   f) $\text{sen}\left(\frac{-\pi}{12}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)$

3. Dê o domínio, a imagem, o período, e construa o gráfico das funções:

   a) $f(x) = 3 \cdot \text{sen } x$
   b) $y = -2 + \text{sen } x$

Exemplo 2

Construa o gráfico e determine o domínio, a imagem e o período das funções:

a) $f(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$

b) sen $(-2x)$

Solução

a) $f(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$

Observe a coluna auxiliar colocada na tabela abaixo. Nela estão sendo atribuídos valores ao arco $\frac{x}{2}$ desde 0 rad até 2π rad.

Tabela

$\frac{x}{2}$ rad	x rad	$f(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	π	1
π	2π	0
$\frac{3\pi}{2}$	3π	−1
2π	4π	0

Rascunho

$\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = 0$

$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \pi$

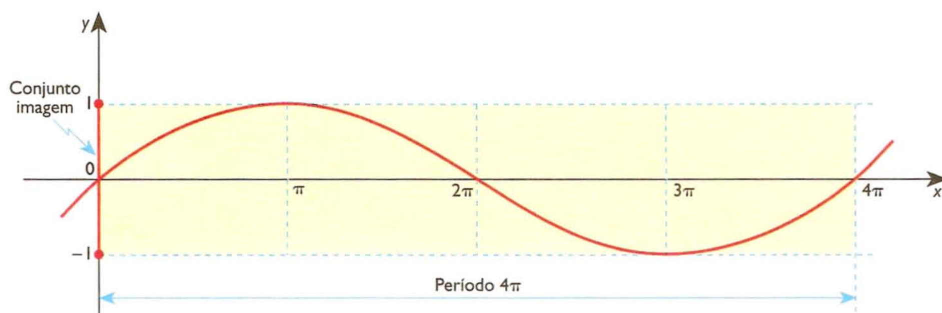
$\frac{x}{2} = \pi \Rightarrow x = 2\pi$

$\frac{x}{2} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = 3\pi$

$\frac{x}{2} = 2\pi \Rightarrow x = 4\pi$

Os valores que serão utilizados na construção do gráfico estão nas colunas destacadas.

Gráfico



D(f) = ℝ.
Im(f) = [−1, 1].
O período é 4π rad.

b) $y = \text{sen}(-2x)$

Procedendo como no exemplo anterior, temos:

Tabela

$-2x$ rad	x rad	$y = \text{sen}(-2x)$
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	1
π	$\frac{-\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{-3\pi}{4}$	−1
2π	$-\pi$	0

Rascunho

$-2x = 0 \Rightarrow x = 0$

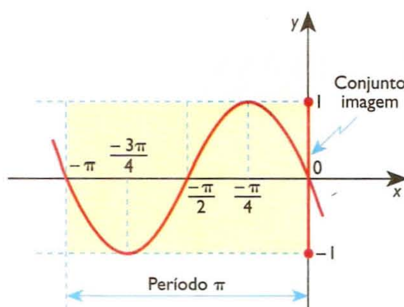
$-2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{-\pi}{4}$

$-2x = \pi \Rightarrow x = \frac{-\pi}{2}$

$-2x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{-3\pi}{4}$

$-2x = 2\pi \Rightarrow x = -\pi$

Gráfico



Então: D(f) = ℝ.
Im(f) = [−1, 1].
O período é π, pois $0 - (-\pi) = 0 + \pi = \pi$.

Observação: nestes dois últimos exercícios houve mudança de período. Essa mudança ocorre quando **multiplicamos o arco** por uma constante (não-nula e diferente de 1).

De um modo geral temos que o período da função $y = \text{sen } kx$ é dado por $\frac{2\pi}{|k|}$ $(k \neq 0)$. Conferindo isso, temos:

a) No caso $y = \text{sen } \frac{x}{2}$ vem $k = \frac{1}{2}$. O período é $\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

b) No caso $y = \text{sen } (-2x)$ temos $k = -2$. O período é $\frac{2\pi}{|-2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

4. Dê o domínio e a imagem das funções:

a) $y = \text{sen}\left(\frac{x}{8}\right)$ b) $f(x) = \text{sen}(-3x)$ c) $f(x) = \text{sen}\left(\frac{-x}{3}\right)$

5. Dê o período das funções seguintes:

a) $y = \text{sen } (7x)$ b) $f(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{5}\right)$ c) $f(x) = \text{sen}\left(\frac{-3x}{2}\right)$

6. Construa o gráfico das funções:

a) $y = \text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)$

b) $f(x) = \text{sen } (-x)$

7. Na função $f(x) = \text{sen } (k \cdot x)$, determine k de modo que o período da função seja:

a) $\frac{5\pi}{3}$ rad

b) $\frac{\pi}{6}$ rad

Exemplo 3

Construir o gráfico e dar o domínio, a imagem e o período das funções seguintes:

a) $f(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ b) $y = -1 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)$

Solução

a) $f(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Procedendo como no exemplo anterior, temos a seguinte tabela:

Tabela

$\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ rad	x rad	$f(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
0	$\frac{-\pi}{2}$	0
$\frac{\pi}{2}$	0	1
π	$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	π	-1
2π	$\frac{3\pi}{2}$	0

Rascunho

$x + \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{-\pi}{2}$

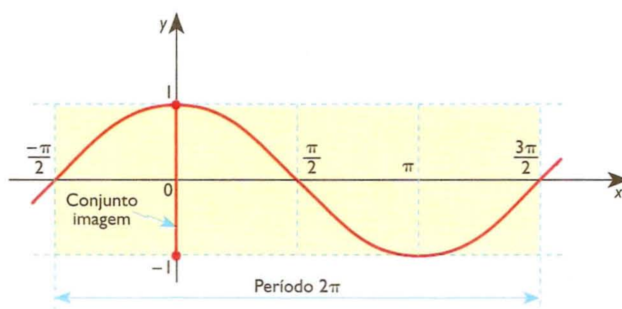
$x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 0$

$x + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$x + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \pi$

$x + \frac{\pi}{2} = 2\pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$

Gráfico



D(f) = ℝ.
Im(f) = [−1, 1].
O período é 2π rad.

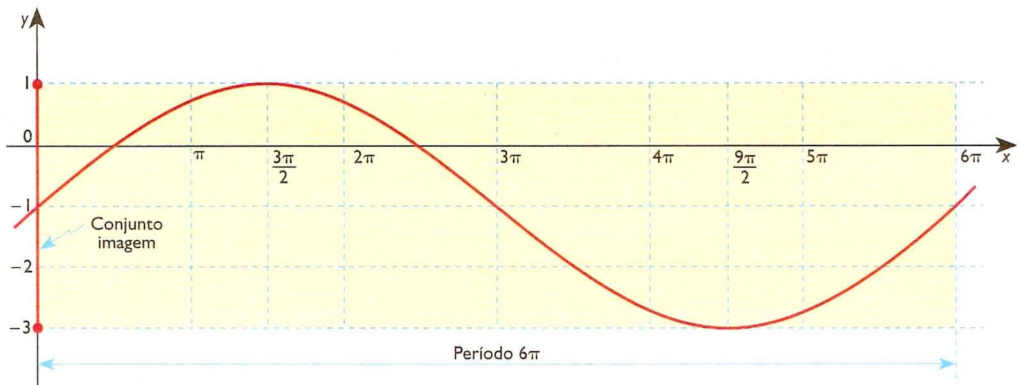
b) $y = -1 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)$

Veja que agora na tabela aparecem várias colunas auxiliares.

Tabela

$\frac{x}{3}$ rad	x rad	$\text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)$	$2 \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)$	$y = -1 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)$
0	0	0	0	-1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	1	2	1
π	3π	0	0	-1
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{2}$	-1	-2	-3
2π	6π	0	0	-1

Gráfico



$D(f) = \mathbb{R}$.
$Im(f) = [-3, 1]$.
O período é 6π rad.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

8. Dê o período das funções seguintes:

a) $f(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ b) $y = 2 + \text{sen}\left(\frac{3x}{8}\right)$ c) $y = -3 + \text{sen}\left(\frac{3x}{2}\right)$

9. Construa o gráfico e dê a imagem e o período das funções seguintes:

a) $f(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ b) $y = \text{sen}\,(3x - \pi)$ c) $f(x) = 2 - 2 \cdot \text{sen}\,(x + \pi)$

10. Sabendo-se que *a* e *b* são números reais positivos e tais que $y = a + b \cdot \text{sen}\,(c \cdot x)$, determine:

a) *a* e *b* de modo que a imagem da função seja $[-1, 2]$.

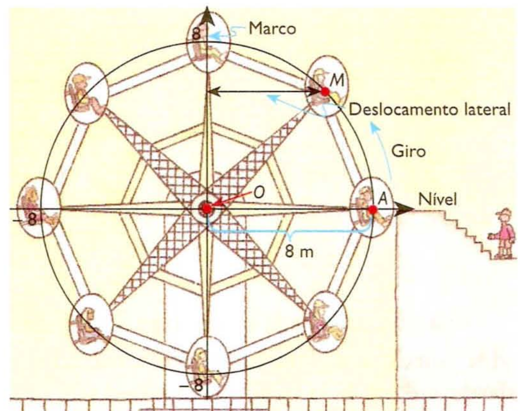
b) *a*, *b* e *c* de modo que a imagem seja $[-6, -1]$ e o período $\frac{2\pi}{3}$.

3. A função cosseno

Você está lembrado da "função roda-gigante" que vimos no início deste capítulo, quando aprendemos a função seno?

Pois bem, vamos imaginar que você está naquela mesma roda-gigante, que gira no sentido anti-horário.

À reta vertical que passa no ponto *O*, chamaremos de **marco**. Num dado instante, você está no ponto *M*, conforme mostra a figura ao lado.

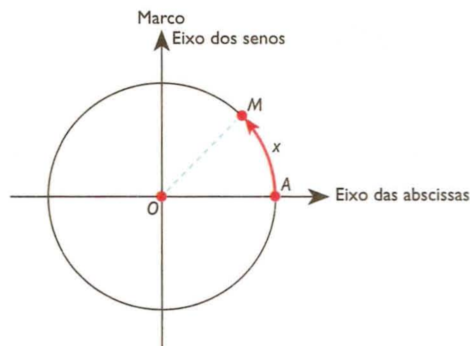


Chamaremos de **deslocamento lateral** a sua posição com relação ao marco.

Dessa forma, quando a roda começa a girar, o seu deslocamento lateral começa a mudar. A tabela seguinte mostra o deslocamento lateral de metro em metro.

Você estará indo para	Sua posição relativa ao marco	Observação	Seu deslocamento lateral será indicado por
...	8 m à direita	desloc. máximo à direita	8
esquerda	7 m à direita		7
...	...		...
esquerda	2 m à direita		2
esquerda	1 m à direita		1
esquerda	0 m	está no marco	0
esquerda	1 m à esquerda		−1
esquerda	2 m à esquerda		−2
...	...		...
esquerda	7 m à esquerda		−7
esquerda	8 m à esquerda	desloc. máximo à esquerda	−8
direita	7 m à esquerda		−7
direita	6 m à esquerda		−6
...	...		...
direita	2 m à esquerda		−2
direita	1 m à esquerda		−1
direita	0 m	está no marco	0
direita	1 m à direita		1
direita	2 m à direita		2
...	...		...
direita	7 m à direita		7
direita	8 m à direita	desloc. máximo à direita	8

Então, estabelecendo um sistema cartesiano ortogonal com origem no eixo da roda-gigante, e considerando esta uma circunferência na qual sua posição num certo instante qualquer é M, teremos:



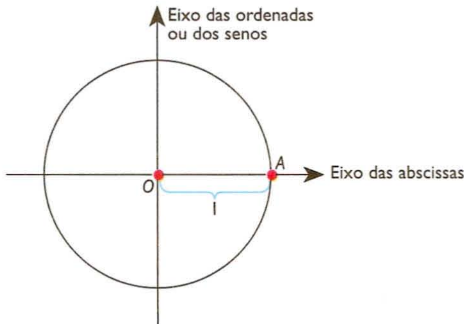
Veja que para cada número real x existe em correspondência um ponto M, tal que o arco $\widehat{AM}$ mede x, e para cada arco $\widehat{AM}$ existe em correspondência um número real que varia desde -8 até 8, o qual representa o seu deslocamento lateral com relação ao marco.

Então, temos que o seu deslocamento lateral é uma função de x. Poderíamos chamar essa função de "função deslocamento lateral".

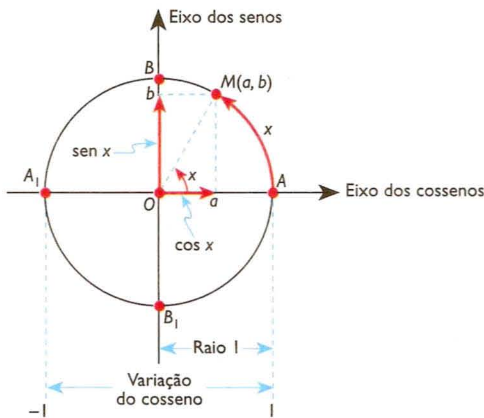
Note que, se a roda continuar a girar, você passará novamente pelas mesmas posições anteriores. Por esse motivo dizemos que a função é periódica.

Se você entendeu bem essa nossa função, você entenderá com facilidade a **função cosseno**, que iremos definir agora.

Para isso tomemos um sistema cartesiano ortogonal de origem O, e um ciclo trigonométrico de centro em O, onde A é a origem dos arcos, como mostra a figura:



Observe a figura seguinte.



Para cada número real x existe em correspondência um ponto M, tal que o arco $\widehat{AM}$ mede x, e o ângulo $A\hat{O}M$ também mede x.

Chamando de a a abscissa do ponto M, e de b a sua ordenada, temos:

$$M\,(a,\ b)$$

O número a, **abscissa do ponto M**, é chamado **cosseno de x**, e é indicado por:

$$\mathbf{cos}\ x = a$$

Por esse motivo, o eixo das abscissas é também chamado de **eixo dos cossenos**.

Definimos a função cosseno como:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = \cos x$$

Partindo do ponto A, vamos dar uma volta completa no ciclo. Dessa forma, observando as abscissas dos pontos A, B, A_1 e B_1, podemos informar os valores da função cosseno para alguns arcos. Veja:

Medida x do arco em radianos:	Extremidade do arco está no ponto:	Abscissa do ponto é:	O valor de cos x é:
0	$A(1, 0)$	1	$\cos 0 = 1$
$\frac{\pi}{2}$	$B(0, 1)$	0	$\cos \frac{\pi}{2} = 0$
π	$A_1(-1, 0)$	-1	$\cos \pi = -1$
$\frac{3\pi}{2}$	$B_1(0, -1)$	0	$\cos \frac{3\pi}{2} = 0$
2π	$A(1, 0)$	1	$\text{sen } 2\pi = 1$

Como fizemos com a função seno, vamos fazer uma análise mais detalhada da função cosseno:

• O domínio da função $f(x) = \cos x$ é $\mathbb{R}$.

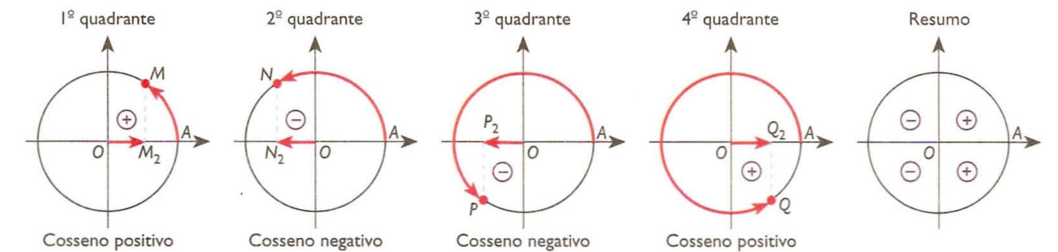
• O conjunto imagem da função $f(x) = \cos x$ é $\text{Im}(f) = \{ y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$, ou seja: $\text{Im}(f) = [-1, 1]$.

• A função é periódica de período 2π rad, pois para qualquer valor de x temos que:

$$\cos (x + k \cdot 2\pi) = \cos x$$

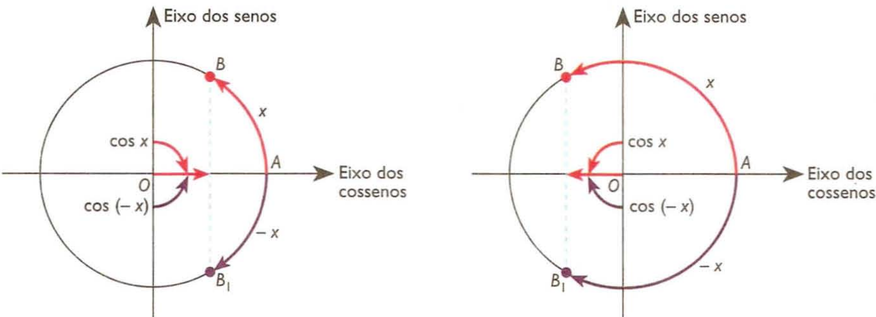
k: **nº de voltas**

• **Sinal da função $y = \cos x$:** estudando o sinal da função $y = \cos x$ em cada um dos quadrantes, temos:



• A função $f(x) = \cos x$ é uma função par.

Observemos as figuras abaixo:



Nos dois casos temos $\cos(-x) = \cos x$. Isso ocorre para qualquer $x \in \mathbb{R}$.
Então, concluímos:

$y = \cos x$ é função par.

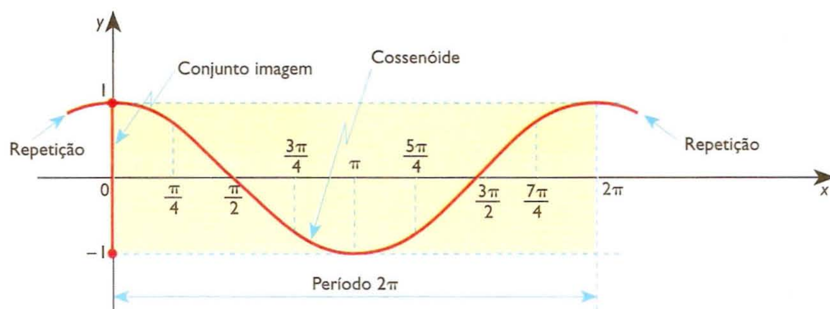
Gráfico da função y = cos x

Devido à periodicidade da função, faremos o gráfico cartesiano, fazendo x variar de 0 a 2π. O gráfico da função $y = \cos x$ é chamado **cossenóide**.

Tabela

x rad	$f(x) = \cos x$
cresce de 0 a $\frac{\pi}{4}$	decresce de 1 a $\frac{\sqrt{2}}{2}$
cresce de $\frac{\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{2}$	decresce de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ a 0
cresce de $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{3\pi}{4}$	decresce de 0 a $\frac{-\sqrt{2}}{2}$
cresce de $\frac{3\pi}{4}$ a π	decresce de $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ a -1
cresce de π a $\frac{5\pi}{4}$	cresce de -1 a $\frac{-\sqrt{2}}{2}$
cresce de $\frac{5\pi}{4}$ a $\frac{3\pi}{2}$	cresce de $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ a 0
cresce de $\frac{3\pi}{2}$ a $\frac{7\pi}{4}$	cresce de 0 a $\frac{\sqrt{2}}{2}$
cresce de $\frac{7\pi}{4}$ a 2π	cresce de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ a 1

Gráfico



Em resumo, temos:

1) Função $y = \cos x$ ou $f(x) = \cos x$.
2) O domínio é $D(f) = \mathbb{R}$.
3) O conjunto imagem é $Im(f) = [-1, 1]$.
4) A função é periódica, de período 2π rad.
5) O sinal da função é:
- positivo no 1º e no 4º quadrante;
- negativo no 2º e no 3º quadrante.

6) A função é par.
7) A função é:
- crescente no 3º e no 4º quadrante;
- decrescente no 1º e no 2º quadrante.

Exemplo 1

Construa o gráfico, determine o domínio e a imagem das funções definidas por:

a) $y = 2 \cdot \cos x$

b) $y = -3 + \cos x$

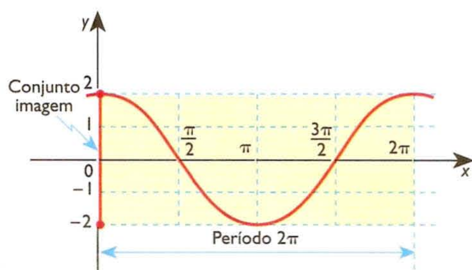
Solução

a) $y = 2 \cdot \cos x$

Tabela

x rad	$\cos x$	$y = 2 \cdot \cos x$
0	1	2
$\frac{\pi}{2}$	0	0
π	-1	-2
$\frac{3\pi}{2}$	0	0
2π	1	2

Gráfico



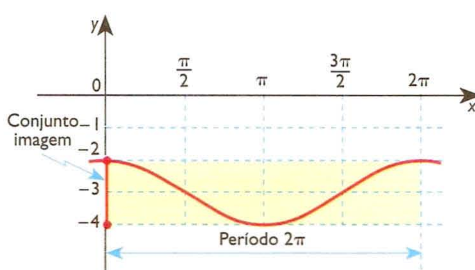
$D(f) = \mathbb{R}$.
$Im(f) = [-2, 2]$.

b) $y = -3 + \cos x$

Tabela

x rad	$\cos x$	$y = -3 + \cos x$
0	1	-2
$\frac{\pi}{2}$	0	-3
π	-1	-4
$\frac{3\pi}{2}$	0	-3
2π	1	-2

Gráfico

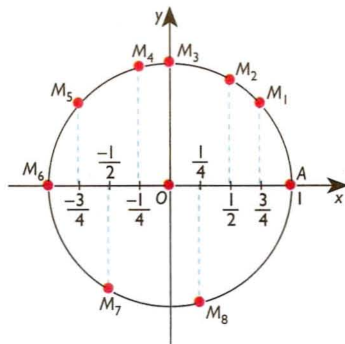


$D(f) = \mathbb{R}$.
$Im(f) = [-4, -2]$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

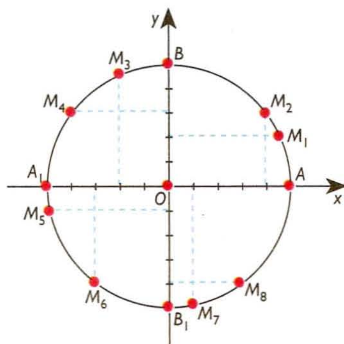
11. A figura mostra um ciclo trigonométrico no qual as medidas dos arcos $\overset{\frown}{AM_1}$, $\overset{\frown}{AM_2}$, $\overset{\frown}{AM_3}$, $\overset{\frown}{AM_4}$, $\overset{\frown}{AM_5}$ e $\overset{\frown}{AM_6}$ são, em radianos, respectivamente x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 e x_6. Determine:

a) $\cos x_1$
b) $\cos x_2$
c) $\cos x_4$
d) $\cos x_7$
e) $\cos x_8$
f) $\cos x_3 + 2 \cdot \cos x_5 - \cos x_6$



12. A figura ao lado mostra um ciclo trigonométrico, no qual os diâmetros $\overline{AA_1}$ e $\overline{BB_1}$ foram divididos em 10 partes iguais. Chamando as medidas dos arcos $\overset{\frown}{AM_1}$, $\overset{\frown}{AM_2}$, $\overset{\frown}{AM_3}$, $\overset{\frown}{AM_4}$, $\overset{\frown}{AM_5}$, $\overset{\frown}{AM_6}$, $\overset{\frown}{AM_7}$ e $\overset{\frown}{AM_8}$ respectivamente de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 e x_8, determine:

a) $\text{sen } x_1$
b) $\cos x_3$
c) $\text{sen } x_5$
d) $\cos x_7$



13. Na figura do exercício anterior, determine o valor de N nos casos:

a) $N = \cos x_2 + \text{sen } x_4 + \cos x_6 - 2 \cdot \text{sen } x_8$
b) $N = 2 \cdot (\text{sen } x_1 - \cos x_7) - 3 \cdot (\text{sen } x_5 - \cos x_3)$

14. Lembrando que a função cosseno é uma função par, verifique quais das sentenças abaixo são verdadeiras:

a) $\cos(-30°) = -\cos 30°$
b) $-\cos(-45°) = \cos 45°$
c) $\cos(-60°) = \cos 60°$
d) $\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$
e) $-\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$
f) $\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

15. Dar o domínio, a imagem, o período e o gráfico da função:

a) $y = 3 \cdot \cos x$
b) $f(x) = -2 - \cos x$

Exemplo 2

Construa o gráfico e determine o domínio, a imagem e o período das funções:

a) $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

b) $f(x) = \cos(-2x)$

Solução

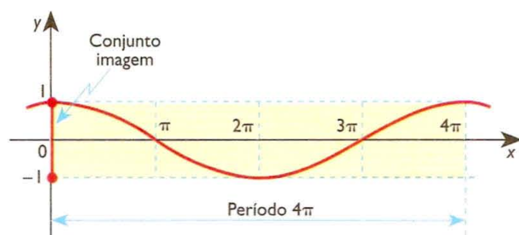
a) $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

Observe a coluna auxiliar na tabela abaixo.

Tabela

$\frac{x}{2}$ rad	x rad	$y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$
0	0	1
$\frac{\pi}{2}$	π	0
π	2π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	3π	0
2π	4π	1

Gráfico



D(f) = ℝ.
Im(f) = [−1, 1].

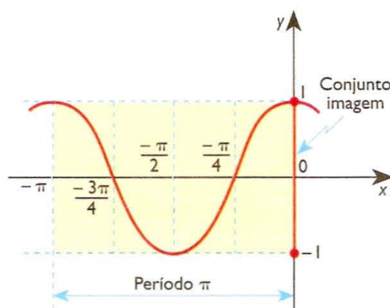
b) $f(x) = \cos(-2x)$

Observe a coluna auxiliar na tabela abaixo.

Tabela

$-2x$ rad	x rad	$f(x) = \cos(-2x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0
π	$\frac{-\pi}{2}$	-1
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{-3\pi}{4}$	0
2π	$-\pi$	1

Gráfico



D(f) = ℝ.
Im(f) = [−1, 1].

Como na função seno, também o período da função cosseno muda quando o arco x aparece multiplicado por um número k ($k \neq 0$ e $k \neq 1$). O valor do período é obtido da mesma forma que foi feita para a função seno, ou seja, dividindo-se 2π rad por $|k|$, ou seja, $p = \frac{2\pi}{|k|}$.

Assim:

- no caso *a*, o arco aparece multiplicado por $\frac{1}{2}$, portanto o período é

$$p = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$$

- no caso *b*, o arco aparece multiplicado por -2, portanto o período é

$$p = \frac{2\pi}{|-2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

16. Dê o período das funções definidas por:

a) $y = \cos 8x$ b) $f(x) = \cos(-5x)$ c) $y = \cos\left(\frac{5x}{3}\right)$ d) $f(x) = -1 + \cos\left(\frac{x}{4}\right)$

17. Construa o gráfico e dê o período e o conjunto imagem das funções:

a) $y = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ b) $y = \cos(-3x)$

Exemplo 3

Dar o domínio, a imagem, o período e o gráfico da função definida por

$y = 1 + 2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Solução

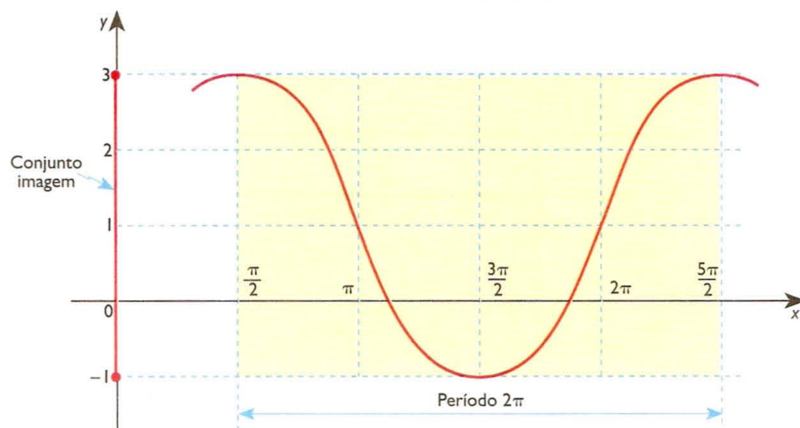
Tabela

$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ rad	x rad	$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$	$2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$	$y = 1 + 2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
0	$\frac{\pi}{2}$	1	2	3
$\frac{\pi}{2}$	π	0	0	1
π	$\frac{3\pi}{2}$	−1	−2	−1
$\frac{3\pi}{2}$	2π	0	0	1
2π	$\frac{5\pi}{2}$	1	2	3

$x - \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$; $x - \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$; $x - \frac{\pi}{2} = 2\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{2}$;

$x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \pi$; $x - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = 2\pi$

Gráfico



$D(f) = \mathbb{R}$.
$Im(f) = [-1, 3]$.
Período $= 2\pi$ rad.

EXERCÍCIO PROPOSTO

18. Nas funções abaixo, construa o gráfico, dê o conjunto imagem e o período.

a) $y = -1 + 2 \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

b) $y = 2 - \cos(2x - \pi)$

Exemplo 4

Determinar para quais valores de k existe x tal que:

a) $\text{sen } x = \frac{3k + 5}{2}$

b) $\cos x = \frac{k^2 + 9k + 7}{7}$

Solução

a) $\text{sen } x = \frac{3k + 5}{2}$

Como para qualquer valor de x tem-se $-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$, então:

$$\underbrace{\overbrace{-1 \leqslant \frac{3k+5}{2}}^{\text{(I)}} \leqslant 1}_{\text{(II)}}$$

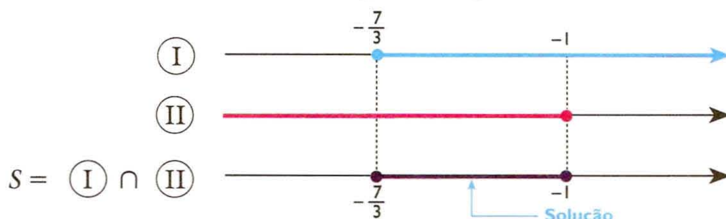
A condição (I) nos fornece:

$$\frac{3k + 5}{2} \geqslant -1 \Rightarrow 3k + 5 \geqslant -2 \Rightarrow k \geqslant -\frac{7}{3}$$

A condição (II) nos fornece:

$$\frac{3k + 5}{2} \leqslant 1 \Rightarrow 3k + 5 \leqslant 2 \Rightarrow k \leqslant -1$$

O conjunto solução é a intersecção de (I) com (II). Então:



Portanto o conjunto solução é:

$$S = \left\{k \in \mathbb{R} \mid -\frac{7}{3} \leqslant k \leqslant -1\right\}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

16. Dê o período das funções definidas por:

a) $y = \cos 8x$ b) $f(x) = \cos(-5x)$ c) $y = \cos\left(\frac{5x}{3}\right)$ d) $f(x) = -1 + \cos\left(\frac{x}{4}\right)$

17. Construa o gráfico e dê o período e o conjunto imagem das funções:

a) $y = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ b) $y = \cos(-3x)$

Exemplo 3

Dar o domínio, a imagem, o período e o gráfico da função definida por

$y = 1 + 2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Solução

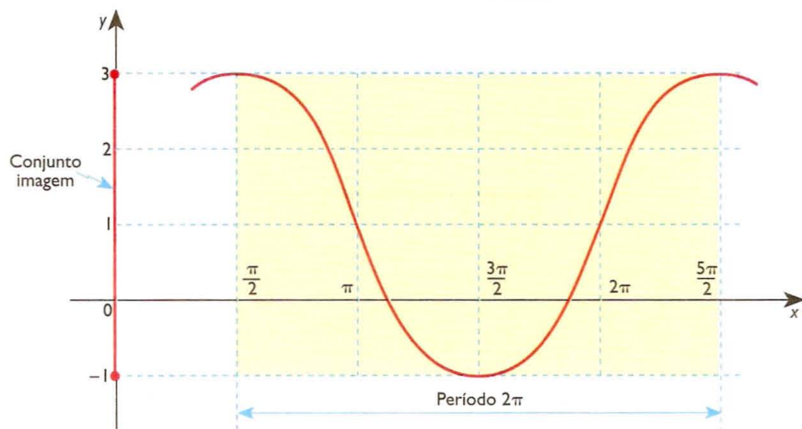
Tabela

$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ rad	x rad	$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$	$2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$	$y = 1 + 2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
0	$\frac{\pi}{2}$	1	2	3
$\frac{\pi}{2}$	π	0	0	1
π	$\frac{3\pi}{2}$	-1	-2	-1
$\frac{3\pi}{2}$	2π	0	0	1
2π	$\frac{5\pi}{2}$	1	2	3

$x - \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$; $x - \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$; $x - \frac{\pi}{2} = 2\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{2}$;

$x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \pi$; $x - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = 2\pi$

Gráfico



$D(f) = \mathbb{R}$.
$Im(f) = [-1, 3]$.
Período $= 2\pi$ rad.

EXERCÍCIO PROPOSTO

18. Nas funções abaixo, construa o gráfico, dê o conjunto imagem e o período.

a) $y = -1 + 2 \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

b) $y = 2 - \cos(2x - \pi)$

Exemplo 4

Determinar para quais valores de k existe x tal que:

a) $\text{sen } x = \dfrac{3k + 5}{2}$

b) $\cos x = \dfrac{k^2 + 9k + 7}{7}$

Solução

a) $\text{sen } x = \dfrac{3k + 5}{2}$

Como para qualquer valor de x tem-se $-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$, então:

$$\underbrace{\overbrace{-1 \leqslant \frac{3k+5}{2}}^{\text{(I)}} \leqslant 1}_{\text{(II)}}$$

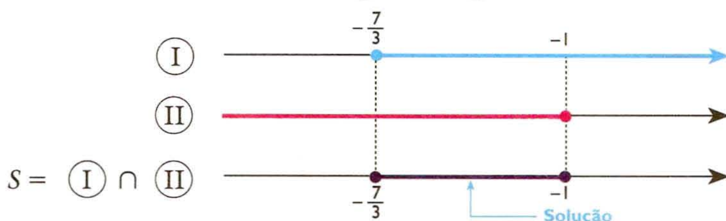
A condição (I) nos fornece:

$$\frac{3k + 5}{2} \geqslant -1 \Rightarrow 3k + 5 \geqslant -2 \Rightarrow k \geqslant -\frac{7}{3}$$

A condição (II) nos fornece:

$$\frac{3k + 5}{2} \leqslant 1 \Rightarrow 3k + 5 \leqslant 2 \Rightarrow k \leqslant -1$$

O conjunto solução é a intersecção de (I) com (II). Então:



Portanto o conjunto solução é:

$$S = \left\{k \in \mathbb{R} \mid -\frac{7}{3} \leqslant k \leqslant -1\right\}$$

b) $\cos x = \dfrac{k^2 + 9k + 7}{7}$

Como $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ para qualquer valor de x, devemos ter:

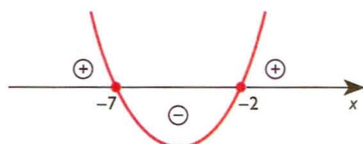
$$\overbrace{-1 \leqslant \underbrace{\frac{k^2 + 9k + 7}{7}}_{\text{(II)}}}^{\text{(I)}} \leqslant 1$$

A condição (I) nos fornece:

$$\frac{k^2 + 9k + 7}{7} \geqslant -1 \Rightarrow k^2 + 9k + 7 \geqslant -7 \Rightarrow k^2 + 9k + 14 \geqslant 0$$

Calculando as raízes de $f(k) = k^2 + 9k + 14$, encontramos $k = -7$ ou $k = -2$.

O sinal da função $f(k) = k^2 + 9k + 14$ varia assim:



Como $f(k) \geqslant 0$, a solução da condição (I) é:

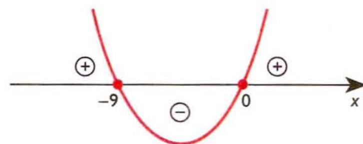


A condição (II) nos fornece:

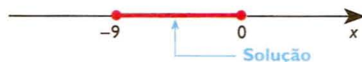
$$\frac{k^2 + 9k + 7}{7} \leqslant 1 \Rightarrow k^2 + 9k + 7 \leqslant 7 \Rightarrow k^2 + 9k \leqslant 0$$

Calculando as raízes de $g(k) = k^2 + 9k$, encontramos $k = -9$ ou $k = 0$.

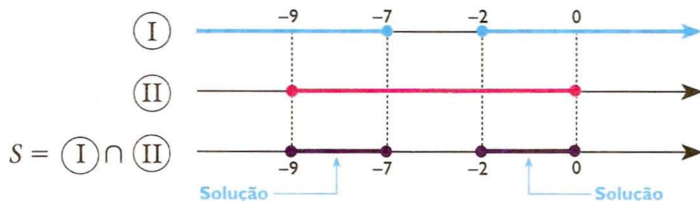
O sinal de $g(k) = k^2 + 9k$ varia assim:



Como $g(k) \leqslant 0$, a solução da condição (II) é:



A solução final é a intersecção de (I) com (II).



Portanto o conjunto solução é:

$$S = \{k \in \mathbb{R} \mid -9 \leqslant k \leqslant -7 \text{ ou } -2 \leqslant k \leqslant 0\}$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

19. Determine para quais valores reais de p existe x real tal que:

a) $\text{sen } x = \dfrac{7p + 3}{5}$

b) $\cos x = \dfrac{4 - 9p}{7}$

c) $\text{sen } x = \dfrac{p^2 - 10p + 12}{12}$

d) $\cos x = \dfrac{p^2 + 7p + 3}{3}$

Exemplo 5

Determinar para quais valores de p a sentença $\text{sen } x = \dfrac{4p - 5}{2 - p}$ pode ser verdadeira.

Solução

Conforme visto no exemplo anterior, devemos ter:

$$\overbrace{-1 \leqslant \frac{4p-5}{2-p}}^{\text{(I)}} \leqslant 1 \quad \text{com} \quad \underbrace{\frac{4p-5}{2-p} \leqslant 1}_{\text{(II)}}$$

A condição (I) nos fornece:

$$\frac{4p - 5}{2 - p} \geqslant -1$$

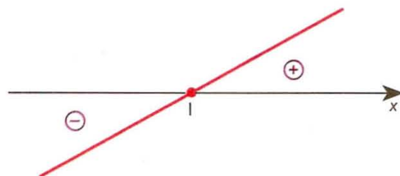
Observação: não podemos multiplicar os dois membros por $(2 - p)$, pois $(2 - p)$ nem sempre é positivo! Dessa forma prepararemos melhor essa inequação e, em seguida, analisaremos os sinais do numerador e do denominador.

Temos:

$$\frac{4p - 5}{2 - p} \geqslant -1 \Rightarrow \frac{4p - 5}{2 - p} + 1 \geqslant 0 \Rightarrow \frac{4p - 5 + (2 - p)}{2 - p} \geqslant 0 \Rightarrow \frac{\overbrace{3p - 3}^{f(p)}}{\underbrace{2 - p}_{g(p)}} \geqslant 0 \quad \text{(III)}$$

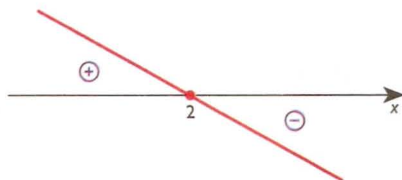
a) **análise do numerador $f(p) = 3p - 3$**

A raiz de $f(p) = 3p - 3$ é 1, e o sinal de $f(p) = 3p - 3$ varia assim:



b) **análise do denominador $g(p) = 2 - p$**

A raiz de $g(p) = 2 - p$ é 2, e o sinal de $g(p) = 2 - p$ varia assim:



Lembrando que o denominador deve ser sempre diferente de zero, vamos fazer uma tabela com os sinais do numerador e do denominador, para determinarmos como varia o sinal da fração de (III).

Tabela

		1	2
numerador $f(p) = 3p - 3$	−	+	+
denominador $g(p) = 2 - p$	+	+	−
quociente $\dfrac{f(p)}{g(p)}$	−	+	−

1 ●——○ 2 Solução

Como, de acordo com (III), devemos ter o quociente maior ou igual a zero, então, a solução parcial que corresponde à condição (I) é:

$$S_1 = \{p \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant p < 2\}$$

A condição (II) nos oferece:

$$\frac{4p - 5}{2 - p} \leqslant 1$$

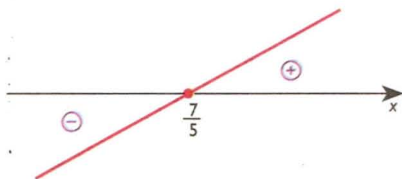
Procedendo como no estudo da condição (I), temos que:

$$\frac{4p - 5}{2 - p} \leqslant 1 \Rightarrow \frac{4p - 5}{2 - p} - 1 \leqslant 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4p - 5 - (2 - p)}{2 - p} \leqslant 0 \Rightarrow \frac{5p - 7}{2 - p} \leqslant 0 \quad \text{(IV)}$$

c) **análise do numerador $h(p) = 5p - 7$**

A raiz de $h(p) = 5p - 7$ é $\dfrac{7}{5}$, e o sinal de $h(p) = 5p - 7$ varia assim:



O sinal do denominador $g(p) = 2 - p$ já foi analisado quando estudamos a condição (I).

Construindo a tabela de sinais do numerador e do denominador de (IV), temos:

Tabela

$\frac{7}{5}$ 2

numerador	$h(p) = 5p - 7$	−	+	+
denominador	$g(p) = 2 - p$	+	+	−
quociente	$\dfrac{f(p)}{g(p)}$	−	+	−

Solução $\frac{7}{5}$ 2   Solução

O quociente de (IV) deve ser menor ou igual a zero. Então, a solução parcial correspondente à condição (II) é:

$$S_2 = \left\{p \in \mathbb{R} \mid p \leqslant \frac{7}{5} \text{ ou } p > 2\right\}$$

A solução final é a intersecção de S_1 com S_2. Então:



Portanto a solução final é:

$$S = \left\{p \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant p \leqslant \frac{7}{5}\right\}$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

20. Determine para quais valores de k a sentença abaixo pode ser verdadeira:

a) $\text{sen } x = \dfrac{8 - 5k}{k - 3}$

b) $\cos x = \dfrac{k - 2}{k - 4}$

4. Os gráficos das funções seno e cosseno

Agora que você já aprendeu a construir gráficos de funções envolvendo seno e cosseno, vamos conversar um pouco sobre os gráficos aprendidos.

Falamos em roda-gigante tanto quando estudamos a função seno como quando estudamos a função cosseno. Roda-gigante nos lembra parque de diversões, e parque de diversões nos lembra montanha-russa.

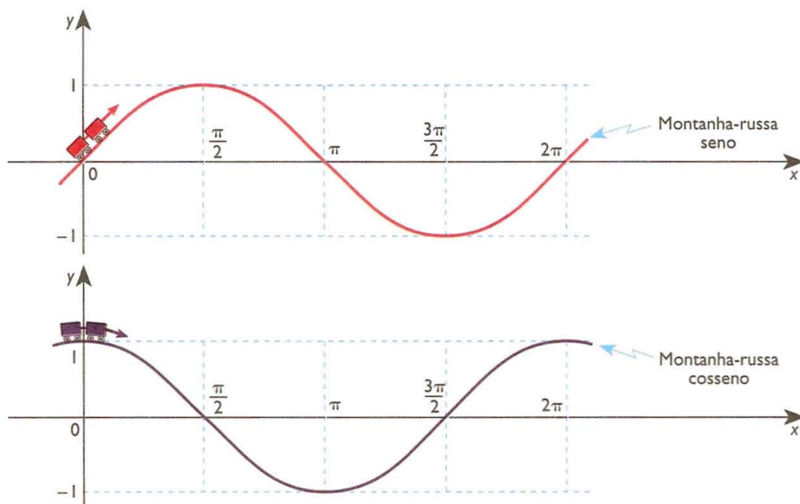
Falando em montanha-russa, você não reparou nada quando estudou aqueles gráficos? Pois é, eles são como uma montanha-russa, só que apenas com movimentos de "sobe-desce-vai em frente".

Assim, existe uma "montanha-russa seno", e uma "montanha-russa cosseno".

Vamos imaginar dois amigos, um na montanha-russa seno e outro na montanha-russa cosseno, que estão uma ao lado da outra.

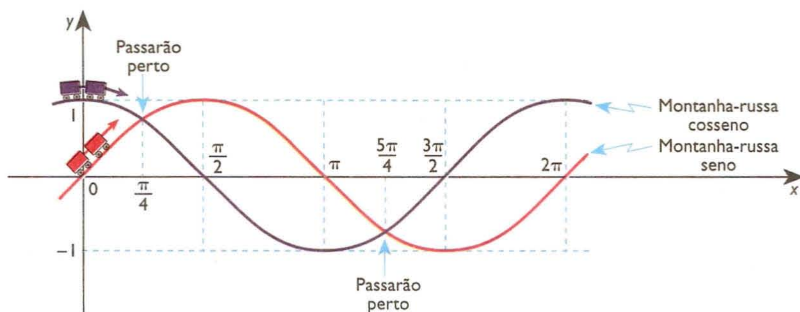
Veja que dificilmente eles estarão um ao lado do outro, ocorrendo isso apenas em alguns pontos particulares.





Vamos construir numa só figura as duas montanhas-russas.

Agora é fácil observar alguns pontos onde os dois amigos estarão um ao lado do outro.



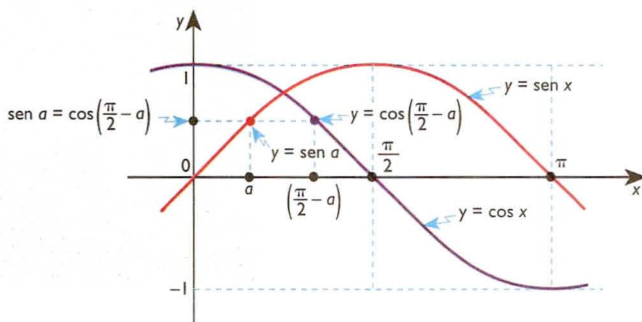
Repare bem na última figura que, se a montanha-russa cosseno fosse deslocada de, por exemplo, $\frac{\pi}{2}$ rad para a direita, as duas montanhas-russas ficariam **exatamente iguais**, de tal forma que os dois amigos poderiam ir até conversando, cada um na sua montanha-russa.

Viu que legal?

Vamos analisar melhor o que foi dito. Para isso construiremos duas novas figuras, onde aparecem tanto o gráfico da função seno como o da função cosseno.

Nelas, destacamos dois valores para x : um valor a qualquer, e o valor $\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$.

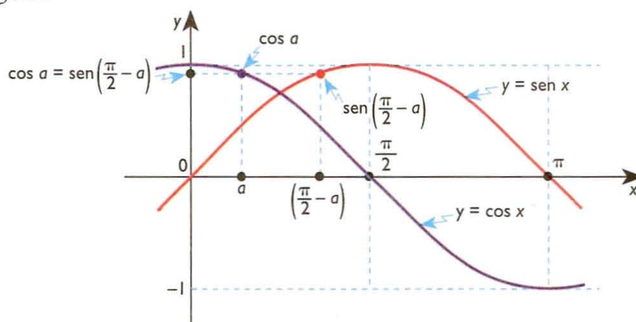
Veja a primeira figura:



Ela nos mostra que:

- o valor da função seno para $x = a$ é o mesmo da função cosseno para $x = \left(\frac{\pi}{2} - a\right)$.

Veja a outra figura:



Ela nos mostra que:

- o valor da função cosseno para $x = a$ é o mesmo da função seno para $x = \left(\frac{\pi}{2} - a\right)$.

Essas duas afirmações já haviam sido vistas no caso de x ser a medida de um ângulo agudo de um triângulo retângulo. Na verdade, elas são verdadeiras **para qualquer valor de x**!

Dessa forma, para qualquer valor de x tem-se:

$$\text{sen } x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \text{ e } \cos x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

21. Determine o que se pede em cada caso:

a) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, sendo sen $x = \frac{2}{3}$.

b) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, sendo $\cos x = \frac{1}{5}$.

c) sen x, sendo $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{2}{5}$.

d) $\cos x$, sendo $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -0{,}5$.

22. Dados $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = -0{,}8$ e $\cos b = 0{,}25$, determine o valor de N:

$$N = \frac{3 \cdot \cos a - 2 \cdot \cos b}{4 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - b\right) + 2 \cdot \cos a}$$

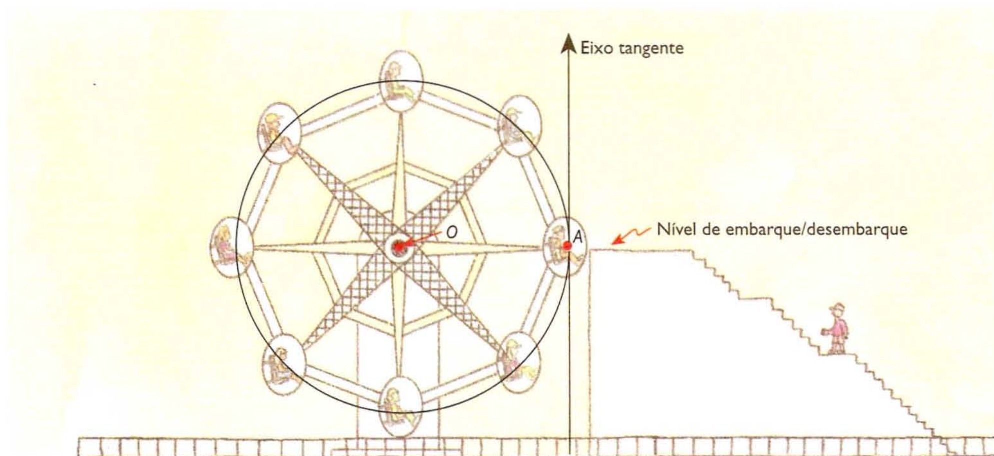
5. A função tangente

Quando estudamos as funções seno e cosseno, fizemos uso da imagem fornecida por uma roda-gigante para melhor compreendermos essas duas funções.

Vamos estudar agora uma nova função trigonométrica: a **função tangente** e, para tornar isso mais interessante, faremos uso novamente de uma roda-gigante.

Você sabe que reta tangente a uma circunferência é uma reta que possui apenas um ponto em comum com a circunferência, e certamente alguma vez você já traçou uma reta como essa.

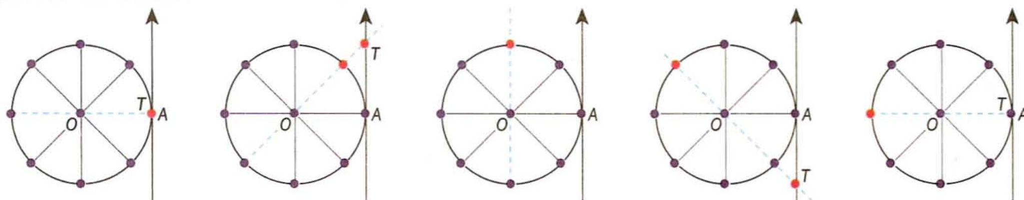
Assim sendo, na roda-gigante, vamos considerar um eixo tangente à circunferência no ponto A, ponto de embarque/desembarque, conforme mostra a figura seguinte:



Um seu colega vai girar na roda-gigante, enquanto você, posicionado no chão, ao lado da roda, vai ficar observando.

Em cada posição que ele estiver, você estará imaginando a reta que passa por ele e pelo centro da roda-gigante, e tentando localizar o ponto T no qual a reta encontra o eixo tangente.

As figuras seguintes mostram algumas posições da roda-gigante destacando o ponto T, quando ele existe.



Enquanto a roda estiver parada, o ponto T coincide com o ponto A.

Quando a roda começa a girar, você irá notar que o ponto T vai se distanciando do ponto A, cada vez mais, cada vez mais...

Quando seu colega estiver no ponto mais alto da roda-gigante, você não conseguirá localizar mais o ponto T, pois o ponto T não existe!

Quando ele passar do ponto mais alto, e começar a descer, você notará que o ponto T reaparece, bem longe de A, mas na parte de baixo do eixo tangente.

À medida que a roda continuar a girar, você notará que o ponto T se aproxima cada vez mais do ponto A, mas sempre na parte de baixo. Quando seu colega atingir o nível, novamente o ponto T volta a coincidir com o ponto A.

Até aí a roda-gigante já deu meia volta. Continuando a girar até completar a primeira volta, você irá notar que o ponto T passará pelas mesmas posições anteriores, e daí em diante, nas próximas voltas dadas, tudo se repetirá.

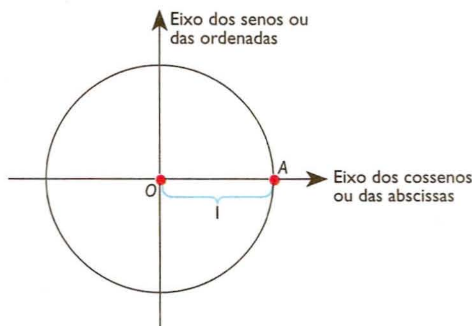
Assim, para cada posição M que seu colega estiver na roda-gigante, existe em correspondência um arco $\overset{\frown}{AM}$ que mede x, e existe em correspondência um desnível do ponto T com relação ao ponto A.

Dessa forma, o desnível do ponto T com relação ao ponto A é uma função de x.

Além disso, pelo fato de o ponto T assumir as mesmas posições após a primeira meia volta, dizemos que essa função é periódica.

Se você entendeu bem isso, não terá dificuldade de entender a nova função que iremos agora estudar, chamada **função tangente**.

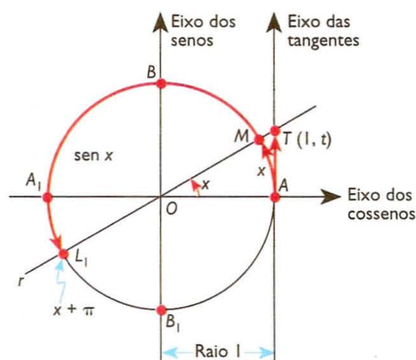
Para isso, tomemos um sistema cartesiano ortogonal de origem O e um ciclo trigonométrico de centro em O, no qual A é a origem dos arcos, conforme mostra a figura:



Observe agora a figura. Nela foi traçado um eixo que passa em A e é paralelo ao eixo dos senos. (O sentido positivo desse eixo é indicado pela ponta da flecha.) Esse eixo é chamado **eixo das tangentes**.

Para cada $x \in \mathbb{R}$, tal que $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, corresponde um único ponto M tal que $\overset{\frown}{AM}$ mede x.

Nessas condições, a reta r que passa por M e por O **sempre encontra** o eixo das tangentes.



Chamando de T esse ponto de encontro, e de t a sua ordenada, como a abscissa de T é sempre 1, então as suas coordenadas serão:

$$T(1, t)$$

Chamamos de **tangente de x o número real** t, e o indicamos por:

$$\text{tg } x = t$$

Então, definimos como **função tangente** à função:

$$f\colon R_1 \to \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = \text{tg } x$$

onde $R_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Em seguida será feita uma análise completa dessa função.

- O domínio da função $y = \text{tg } x$ é $R_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Dessa forma **não fazem** parte do domínio os valores de x correspondentes a **todos os arcos** de extremidade em B ou B_1 (veja figura). Note que para esses arcos não haveria ponto de intersecção T.

- A imagem da função $y = \text{tg } x$ é $\mathbb{R}$, ou seja, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.
- Período: a função é periódica, de período π rad.

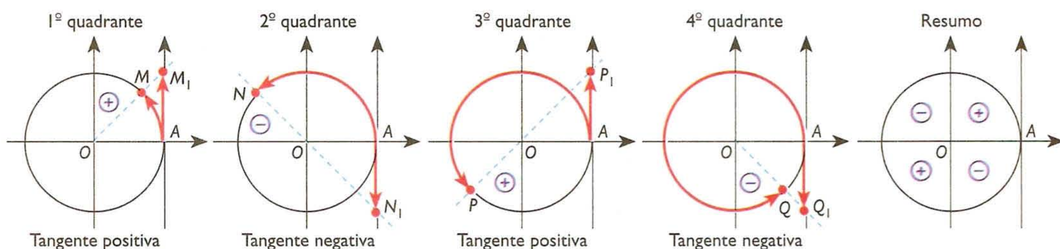
Observando a figura anterior, consideremos o ponto L_1 simétrico de M com relação ao ponto O. Notemos que, se $\widehat{AM}$ mede x, então $\widehat{AL_1}$ mede $x + \pi$ e, além disso, esses arcos possuem a mesma tangente!

De um modo geral, temos:

$$\text{tg } x = \text{tg}(x + k \cdot \pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

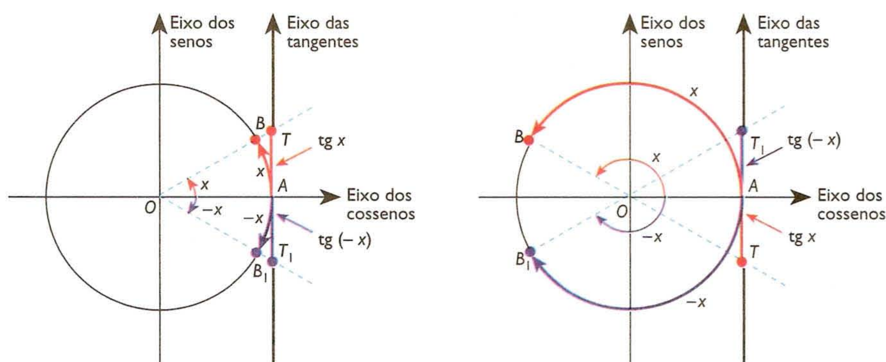
Para $k = 1$ temos que $\text{tg } x = \text{tg}(x + \pi)$ e então o período é π rad.

- **Sinal da função $y = \text{tg } x$:** estudando o sinal dessa função em cada um dos quadrantes, temos:



- A função $y = \text{tg } x$ é ímpar.

Observe as figuras:



Nos dois exemplos temos $\text{tg}(-x) = -\text{tg } x$. Isso ocorre para qualquer valor de x em que $\text{tg } x$ existe.

Concluindo:

$y = \text{tg } x$ é função ímpar.

Gráfico da função y = tg x

Mesmo sabendo que a função é periódica, de período π, faremos x variar desde 0 até 2π rad.

O número real ε que aparece na tabela é um número positivo que **tende a zero**. Isso significa que $a - \varepsilon$ é um número que se aproxima de a, mas é menor que a; $a + \varepsilon$ é um número que se aproxima de a, mas é maior que a.

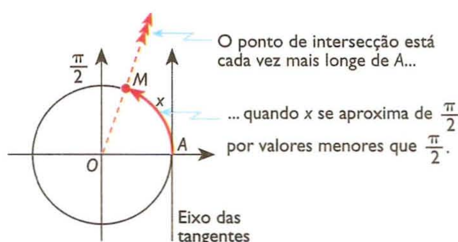
Tabela

x rad	$y = \text{tg } x$
cresce de 0 para $\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$	cresce de 0 para $+\infty$
é igual a $\frac{\pi}{2}$	não existe
cresce de $\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)$ até π	cresce de $-\infty$ a 0
cresce de π para $\left(\frac{3\pi}{2} - \varepsilon\right)$	cresce de 0 para $+\infty$
é igual a $\frac{3\pi}{2}$	não existe
cresce de $\left(\frac{3\pi}{2} + \varepsilon\right)$ até 2π	cresce de $-\infty$ a 0

Vamos entender o que esses símbolos significam.

Na primeira linha aparece "x cresce de 0 para $\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$" e "$y = \text{tg } x$ cresce de 0 para $+\infty$". Isso significa que, quando x se aproxima de $\frac{\pi}{2}$ por valores menores que $\frac{\pi}{2}$, ou seja, mantendo-se no 1º quadrante $\left(\text{indicamos por } x \to \frac{\pi}{2}-\right)$, o ponto T, intersecção da reta $\overleftrightarrow{OM}$ com o eixo das tangentes, **está cada vez mais longe de A**, ou melhor, **o número tg x cresce cada vez mais.**

Observe o gráfico:

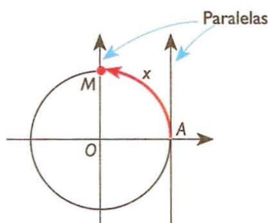


Simbolicamente indicamos:

$$x \to \frac{\pi}{2}- \Rightarrow \text{tg } x \to +\infty$$

Quando $x = \frac{\pi}{2}$ a **tangente não existe**, pois não há ponto de intersecção da reta que passa por O e M com o eixo das tangentes, pois essa reta é paralela ao eixo.

Veja a figura:

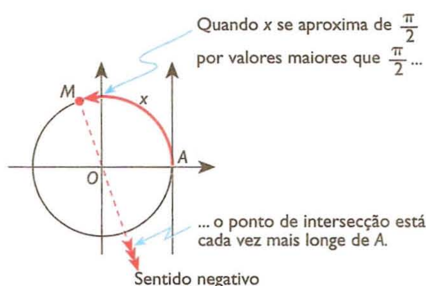


Vejamos o que ocorre quando $x = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$, com ε positivo e tendendo a zero.

Nessas condições x se aproxima de $\frac{\pi}{2}$ mas mantendo-se no 2º quadrante, ou seja, por valores maiores que $\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{indicamos por } x \to \frac{\pi}{2}+\right)$.

Note que, **quanto mais próximo** x estiver de $\frac{\pi}{2}$, **mais longe de** A estará o ponto T intersecção da reta que passa por O e M com o eixo das tangentes (agora no sentido negativo). Isso significa que **o número tg** x **decresce cada vez mais**.

Veja o gráfico:



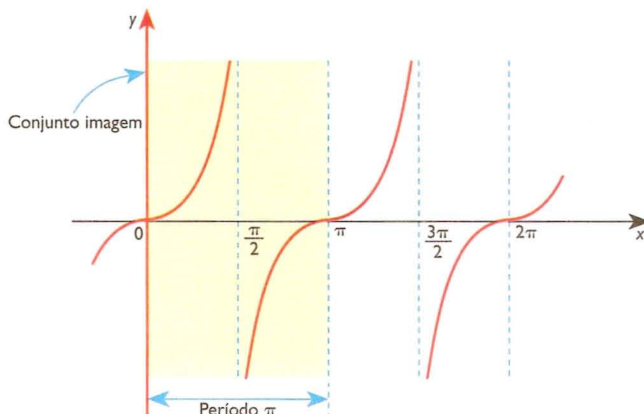
Simbolicamente, temos:

$$x \to \frac{\pi}{2} + \Rightarrow \text{tg}\, x \to -\infty$$

Do mesmo modo analisamos o que ocorre quando x passa por $\frac{3\pi}{2}$. Faça isso como exercício.

Utilizando as informações contidas na última tabela, construímos o gráfico da função $y = \text{tg}\, x$. Esse gráfico é chamado **tangentóide**.

Gráfico



Resumindo, temos:

1) Função $y = \text{tg } x$ ou $f(x) = \text{tg } x$.
2) O domínio é $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
3) O conjunto imagem é $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.
4) A função é periódica, de período π rad.
5) O sinal da função é:
   - positivo no 1º e no 3º quadrante;
   - negativo no 2º e no 4º quadrante.
6) A função é ímpar.
7) A função é crescente em todos os quadrantes.

Observações

1. É comum utilizarmos os valores de sen x e de cos x quando necessitamos achar o valor da tg x utilizando a relação:

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

Lembremos que já utilizamos essa relação quando x era a medida de um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo. No entanto, essa relação é verdadeira para qualquer valor real de x tal que $\cos x \neq 0$.

2. O período da função $y = \text{tg } (kx)$ $(k \neq 0)$ é dado por $\frac{\pi}{|k|}$. Assim, por exemplo, a função $y = \text{tg } 8x$ é periódica, de período $\frac{\pi}{|8|}$, ou seja, $\frac{\pi}{8}$ rad.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1

Achar o domínio e o período das funções:

a) $y = \text{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

b) $f(x) = \text{tg } (4x)$

Solução

a) $y = \text{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Devemos ter:

$$x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$$

O domínio é: $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

O período é π rad.

b) $f(x) = \text{tg}(4x)$

Devemos ter:

$$4x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, o domínio é: $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

O período é $\frac{\pi}{4}$ rad.

Exemplo 2

Determinar o que se pede:

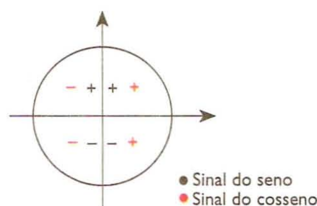
a) tg x e o quadrante do arco x, sendo sen $x = \frac{-3}{5}$ e cos $x = \frac{-4}{5}$.

b) sen x e o quadrante do arco x, sendo cos $x = \frac{3}{4}$ e tg $x = \frac{-\sqrt{7}}{3}$.

Solução

a) tg x = ?

Temos: $\text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$. Então:



$$\text{tg}\, x = \frac{\frac{-3}{5}}{\frac{-4}{5}} \Rightarrow \text{tg}\, x = \frac{3}{4}$$

Como o seno e o cosseno são negativos, concluímos que x é do 3º quadrante (ver figura).

b) sen x = ?

Temos que $\text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} \Rightarrow \text{sen}\, x = \text{tg}\, x \cdot \cos x$. Então:

$$\text{sen}\, x = \frac{-\sqrt{7}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{4} \Rightarrow \text{sen}\, x = \frac{-\sqrt{7}}{4}$$

Como o seno é negativo e o cosseno é positivo, concluímos que x é do 4º quadrante (ver figura do item *a*).

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

23. Dê o período de cada uma das funções:

a) $y = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

b) $f(x) = \text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$

c) $y = \text{tg}\left(\frac{2x}{3}\right)$

d) $f(x) = \text{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

24. Determine o domínio das funções seguintes:

a) $y = \text{tg}\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$

b) $y = \text{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

c) $y = \text{tg}\left(-\frac{x}{3}\right)$

d) $f(x) = \text{tg}\left(\frac{5x}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$

25. Na função $f(x) = \text{tg}\,(m \cdot x)$, determine o valor de m tal que o período da função seja:

a) π rad

b) $\frac{\pi}{4}$ rad

c) $\frac{2\pi}{3}$ rad

26. Dê o domínio e o período de cada uma das funções:

a) $y = 2 \cdot \text{tg}\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$

b) $f(x) = 3 + \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{5}\right)$

27. Determine o quadrante do arco que mede x, nos casos seguintes:

a) $(\text{sen}\ x) \cdot (\cos x) > 0$

b) $(\text{sen}\ x) \cdot (\text{tg}\ x) < 0$

c) $(\text{tg}\ x) \cdot (\cos x) < 0$

6. Outras funções trigonométricas

Existem ainda outras três funções trigonométricas, as quais serão mostradas apenas como relações com o seno e com o cosseno.

Uma delas é a **função cotangente de *x***, definida por $\text{cotg}\ x = \frac{\cos x}{\text{sen}\ x}$, para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $\text{sen}\ x \neq 0$, ou seja:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

É interessante observar que, como $\text{tg}\ x = \frac{\text{sen}\ x}{\cos x}$, temos $\text{cotg}\ x = \frac{1}{\text{tg}\ x}$ sempre que $\text{tg}\ x$ existir e não for nula.

Outra delas é a **função secante de *x***, definida por $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x \neq 0$, ou seja:

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

A outra é a **função cossecante de *x***, definida por $\text{cossec}\ x = \frac{1}{\text{sen}\ x}$, para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $\text{sen}\ x \neq 0$, ou seja:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Como exercício, faça um estudo completo dessas funções, seguindo o roteiro das funções já vistas.

EXERCÍCIO PROPOSTO

28. Determine o que se pede em cada caso:

a) cotg x, sendo sen $x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ e cos $x = \frac{1}{2}$.

b) tg x, sendo cotg $x = 3$.

c) cotg x, sendo tg $x = \frac{-4}{5}$.

d) sec x, sendo cos $x = \frac{2}{3}$.

e) cos x, sendo sec $x = -5$.

f) sec x, sendo cos $x = \frac{-\sqrt{5}}{3}$.

g) cos x, sendo sec $x = \sqrt{7}$.

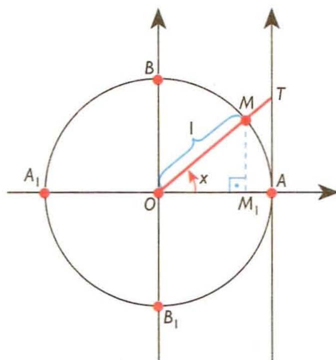
h) cossec x, sendo sen $x = \frac{-\sqrt{7}}{8}$.

i) sen x, sendo cossec $x = -10$.

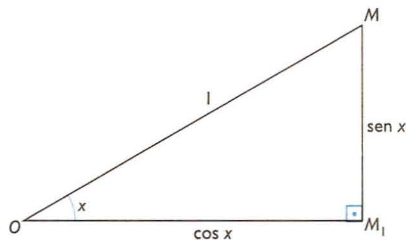
7. Relações entre as funções trigonométricas

Agora que estudamos as várias funções trigonométricas, veremos algumas importantes relações entre elas.

A figura abaixo mostra um ciclo trigonométrico, no qual foi destacado um arco $\widehat{AM}$ que mede x rad.



Um *zoom* (ou seja, um detalhe ampliado) no triângulo retângulo OMM_1 nos fornece:



Aplicando nele o teorema de Pitágoras, obtemos:

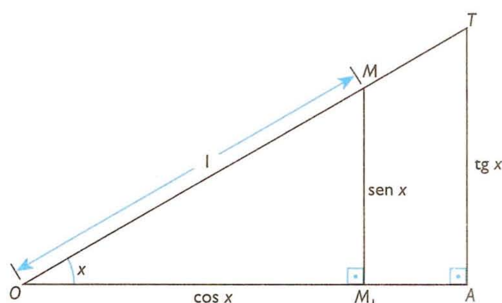
$$(\text{sen } x)^2 + (\cos x)^2 = 1^2 \Rightarrow (\text{sen } x)^2 + (\cos x)^2 = 1$$

A igualdade acima costuma ser indicada assim:

$$\boxed{\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1}$$ Relação fundamental

Observação: a relação vista é verdadeira para todo x real, mesmo quando o triângulo não existe, ou seja, quando o ponto M coincidir com B, A_1 ou A.

Um *zoom* no triângulo retângulo OAT nos fornece:



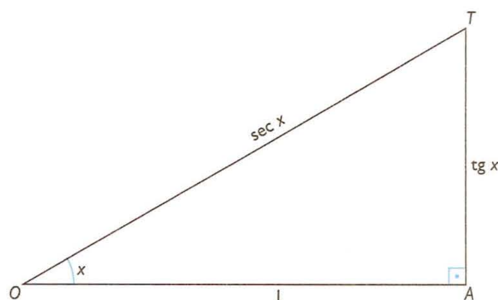
Os triângulos OM_1M e OAT são semelhantes, pois possuem ângulos de mesma medida. Assim sendo, seus lados homólogos são proporcionais. Portanto:

$$\frac{OT}{OM} = \frac{OA}{OM_1} \Rightarrow \frac{OT}{1} = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow OT = \sec x$$

A relação acima é verdadeira para todo x tal que $\cos x \neq 0$.

É importante que você observe na figura que sec x se identifica com $\overline{OT}$.

Sabendo portanto que $OT = \sec x$, temos:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OAT, encontramos:

$$1 + (\text{tg } x)^2 = (\sec x)^2$$

Essa relação costuma ser indicada assim:

$$\boxed{1 + \text{tg}^2\, x = \sec^2 x}$$

A relação acima é verdadeira sempre que as funções nela envolvidas existam, ou seja, quando M não coincidir com B ou com B_1.

Além disso, temos:

$$1 + \text{cotg}^2\, x = 1 + \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2\, x} = \frac{\text{sen}^2\, x + \cos^2 x}{\text{sen}^2\, x} = \frac{1}{\text{sen}^2\, x} = \text{cossec}^2\, x, \text{ ou seja:}$$

$$\boxed{1 + \text{cotg}^2\, x = \text{cossec}^2\, x}$$

Resumindo, temos que, para qualquer valor real de x para o qual as funções existem, são válidas as seguintes afirmações:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$1 + \text{tg}^2 x = \sec^2 x$$
$$1 + \text{cotg}^2 x = \text{cossec}^2 x$$

Observação: relações desse tipo, que fornecem sentenças numéricas verdadeiras para qualquer valor de x para o qual as funções existem, são chamadas **identidades**.

Em seguida vamos resolver alguns problemas que envolvem as relações acima.

Exemplo 1

Sabendo que $\text{sen}\ x = \frac{1}{4}$, com $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, determine:

a) $\cos x$

b) $\text{tg}\ x$

Solução

a) $\cos x = ?$

Temos que $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{1}{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{15}{16}$.

Como x é do 2º quadrante, o valor do cosseno é negativo.

Portanto: $\cos x = -\sqrt{\frac{15}{16}}$, ou seja, $\cos x = \frac{-\sqrt{15}}{4}$.

b) $\text{tg}\ x = ?$

Como $\text{tg}\ x = \frac{\text{sen}\ x}{\cos x} \Rightarrow \text{tg}\ x = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{-\sqrt{15}}{4}} = \frac{-1}{\sqrt{15}}$ ou $\frac{-\sqrt{15}}{15}$.

Exemplo 2

Sendo $\text{tg}\ x = \sqrt{2}$ com $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, achar o valor de:

a) $\cos x$

b) $\sec x$

c) $\text{sen}\ x$

Solução

a) $\cos x = ?$

Temos que $1 + \text{tg}^2 x = \sec^2 x$.

Então: $1 + (\sqrt{2})^2 = \sec^2 x \Rightarrow \sec^2 x = 1 + 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = 3 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{3}$.

Como o cosseno é negativo no 3º quadrante, temos:

$$\cos x = -\sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow \cos x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

b) $\sec x = ?$

Temos $\sec x = \dfrac{1}{\cos x} \Rightarrow \sec x = \dfrac{1}{\dfrac{-\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow \sec x = \dfrac{-3}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sec x = -\sqrt{3}$.

c) $\text{sen } x = ?$

Temos que $\dfrac{\text{sen } x}{\cos x} = \text{tg } x$.

Então $\text{sen } x = \cos x \cdot \text{tg } x = \dfrac{-\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow \text{sen } x = \dfrac{-\sqrt{6}}{3}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

29. Das sentenças abaixo, determine as verdadeiras:

a) $\text{sen}^2 (60°) + \cos^2 (60°) = 1$
b) $\text{sen}^2 (20°) + \text{sen}^2 (70°) = 1$
c) $\text{sen } (25°) + \cos (25°) = 1$
d) $\text{sen}^2 (35°) + \cos^2 (55°) = 1$
e) $\text{sen}^2 (15°) + \cos^2 (15°) = \text{sen}^2 (20°) + \cos^2 (20°)$
f) $1 - \text{sen}^2 \left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos^2 \left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

30. Determine:

a) sen x, sabendo que $\cos x = \dfrac{-3}{5}$, com x do 2º quadrante.

b) cos a, sendo $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ e $\text{sen } a = \dfrac{3}{4}$.

c) sen x, sabendo que x é do 3º quadrante e que $\cos x = \dfrac{-1}{2}$.

d) cos x, sendo $\text{sen } x = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$ e x do 4º quadrante.

e) sen $(-x)$, sendo $\cos x = \dfrac{1}{2}$ e $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

f) cos x, sabendo que $\text{sen } (-x) = \dfrac{1}{2}$ e x é do 4º quadrante.

31. Determine o que se pede em cada caso:

a) sen x e tg x, sabendo que x é do 2º quadrante e que $\cos x = \dfrac{-3}{4}$.

b) tg x, sabendo que $\text{cotg } x = \dfrac{14}{3}$.

c) tg x, sendo $\sec x = 8$ e $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

d) cossec x, sabendo que $\text{tg } x = 5$ e que x é do 1º quadrante.

e) cos x e sen x, sendo $\text{tg } x = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ e $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$.

f) $\text{sen } x + \cos x$, sendo $\text{tg } x = \dfrac{-4}{5}$ e $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$.

Exemplo 3

Determine o valor de m tal que sen $x = \dfrac{1+m}{5}$ e que cos $x = -\dfrac{2m}{5}$. Determine também o quadrante do arco x.

Solução

Sabemos que $\overbrace{-1 \leq \text{sen } x \leq 1}^{\text{(I)}}$ e que $\overbrace{-1 \leq \cos x \leq 1}^{\text{(II)}}$.

Sabemos ainda que $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. Então:

$$\left(\frac{1+m}{5}\right)^2 + \left(\frac{-2m}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1+2m+m^2}{25} + \frac{4m^2}{25} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + 2m + m^2 + 4m^2 = 25 \Rightarrow 5m^2 + 2m - 24 = 0$$

Resolvendo essa equação encontramos $m = 2$ ou $m = -\dfrac{12}{5}$.

- Para $m = 2$, obtemos:

$$\text{sen } x = \frac{3}{5} \quad \text{e} \quad \cos x = -\frac{4}{5}$$

Para esses valores, tanto a condição (I) como a condição (II) são verdadeiras.
Então, $m = 2$ é uma solução do problema. Como sen x é positivo e cos x negativo, o arco x é do 2º quadrante.

- Para $m = -\dfrac{12}{5}$, obtemos:

$$\text{sen } x = -\frac{7}{25} \quad \text{e} \quad \cos x = \frac{24}{25}$$

Para esses valores, tanto a condição (I) como a condição (II) são verdadeiras.
Então, $m = -\dfrac{12}{5}$ é outra solução do problema. Como sen x é negativo e cos x é positivo, então o arco x é do 4º quadrante.

EXERCÍCIO PROPOSTO

32. Determine o valor de m, e qual o quadrante do arco x, de modo que se tenha:

a) sen $x = \dfrac{m+1}{3}$ e cos $x = \dfrac{m\sqrt{5}}{3}$

b) sen $x = \dfrac{3m}{8}$ e cos $x = \dfrac{\sqrt{55}\,m}{8}$

c) cos $x = \dfrac{\sqrt{7}\,m}{2}$ e sen $x = \dfrac{-3m}{2}$

8. Identidades trigonométricas

Vimos no item anterior a noção de identidade. Vamos mostrar agora quando uma sentença do tipo $f(x) = g(x)$ é uma identidade.

Se a sentença $f(x) = g(x)$ for realmente uma identidade, um bom caminho para provar isso consiste em transformar o membro que apresenta expressão mais complicada na expressão do outro membro. Para isso utilizaremos as regras usuais da Álgebra e as relações trigonométricas.

Caso os dois membros apresentem expressões igualmente complicadas, podemos transformar, cada um deles, em **uma mesma expressão** mais simples que as anteriores.

Exemplo

Verificar a identidade $\underbrace{\text{cotg } x}_{f(x)} = \underbrace{\text{cossec } x - \dfrac{\text{sen } x}{1 + \cos x}}_{g(x)}$

Solução

A expressão do 2º membro $g(x)$ é a mais complicada.

Temos:

$$g(x) = \text{cossec } x - \frac{\text{sen } x}{1 + \cos x} = \frac{1}{\text{sen } x} - \frac{\text{sen } x}{1 + \cos x} = \frac{1 + \cos x - \text{sen}^2 x}{\text{sen } x\,(1 + \cos x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{\overbrace{1 - \text{sen}^2 x}^{\cos^2 x} + \cos x}{\text{sen } x\,(1 + \cos x)} = \frac{\cos^2 x + \cos x}{\text{sen } x\,(1 + \cos x)} = \frac{\cos x \cdot \overset{1}{\cancel{(1 + \cos x)}}}{\text{sen } x \cdot \underset{1}{\cancel{(1 + \cos x)}}} = \frac{\cos x}{\text{sen } x} =$$

$= \text{cotg } x = f(x)$

Então $f(x) = g(x)$ é verdadeira para qualquer valor de x onde as funções estão definidas.

EXERCÍCIO PROPOSTO

33. Verifique as seguintes identidades:

a) $\sec x + \text{cotg } x = (\text{cossec } x) \cdot (\cos x + \text{tg } x)$

b) $\sec^2 \theta + \text{cossec}^2 \theta = \sec^2 \theta \cdot \text{cossec}^2 \theta$

c) $\text{tg}^2 \theta + \text{tg}^4 \theta = \sec^4 \theta - \sec^2 \theta$

9. Recorrência a um arco do primeiro quadrante

A figura mostra um ciclo trigonométrico de centro O, em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais de origem em O. Sabemos que cada uma das quatro regiões do plano OXY, assim obtidas, é chamada **quadrante**.



Nosso objetivo agora é: dado um arco $\widehat{AM}$ de medida x (não do 1º quadrante), encontrar, no 1º quadrante, um arco de medida x_1, cujas funções trigonométricas tenham, em valor absoluto, os mesmos valores das do arco x.

Isso significa dizer que iremos procurar um arco x_1 do 1º quadrante, tal que:

$$f(x) = f(x_1) \text{ ou } f(x) = -f(x_1)$$

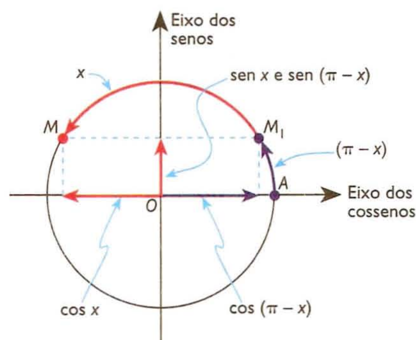
em que f é uma das funções trigonométricas.

O arco x_1 do 1º quadrante é chamado **arco auxiliar**.

Seja portanto x a primeira determinação positiva do arco dado. Temos os seguintes casos a considerar: x é do 2º, ou do 3º ou do 4º quadrante.

Veremos isso caso a caso.

Recorrência ao 1º quadrante quando o arco $\widehat{AM}$ tem extremidade no 2º quadrante



A figura mostra o arco $\widehat{AM}$, que mede x. Tomando no ciclo o ponto M_1, simétrico do ponto M com relação ao eixo dos senos, temos que **a medida de $\widehat{AM_1}$ é $(\pi - x)$**.

Dois arcos, um de medida x e outro de medida $(\pi - x)$ são chamados **arcos suplementares**. Um deles é o suplemento do outro.

Observando a figura, vemos que os arcos $\widehat{AM}$ e $\widehat{AM_1}$ possuem:

- o mesmo seno,
- cossenos simétricos (ou seja, mesmo valor absoluto e sinais contrários).

Dessa forma, temos:

$\text{sen } x = \text{sen } (\pi - x)$

$\cos x = -\cos (\pi - x)$

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } (\pi - x)}{-\cos (\pi - x)} \Rightarrow \text{tg } x = -\text{tg } (\pi - x)$$

$$\text{cotg } x = \frac{-\cos (\pi - x)}{\text{sen } (\pi - x)} \Rightarrow \text{cotg } x = -\text{cotg } (\pi - x)$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{-\cos (\pi - x)} \Rightarrow \sec x = -\sec (\pi - x)$$

$$\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x} = \frac{1}{\text{sen } (\pi - x)} \Rightarrow \text{cossec } x = \text{cossec } (\pi - x)$$

Resumindo, se $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, temos:

$\text{sen } x = \text{sen } (\pi - x)$	$\text{tg } x = -\text{tg } (\pi - x)$	$\sec x = -\sec (\pi - x)$
$\cos x = -\cos (\pi - x)$	$\text{cotg } x = -\text{cotg } (\pi - x)$	$\text{cossec } x = \text{cossec } (\pi - x)$

Achar $\widehat{AM_1}$ bem como as respectivas funções trigonométricas é o mesmo que "reduzir" ao 1º quadrante.

Exemplo

Recorrendo a um arco do 1º quadrante, expressar sen x, cos x e tg x dos arcos cujas medidas são:

a) $x = 135°$ b) $x = -210°$ c) $x = 840°$ d) $x = \dfrac{2\pi}{3}$ rad e) $x = \dfrac{3\pi}{4}$ rad

Solução

a) $x = 135°$

O arco auxiliar do 1º quadrante mede $180° - 135° = 45°$.

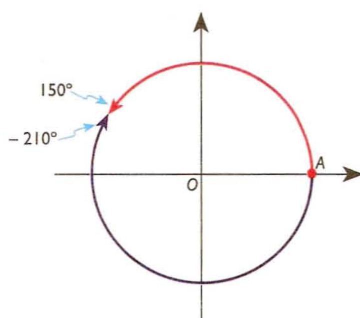
Então:

$$\text{sen } 135° = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135° = -\cos 45° = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 135° = -\text{tg } 45° = -1$$

b) $x = -210°$ (Observe que agora o arco é negativo.) Veja a figura. Ela mostra que a primeira determinação positiva do arco mede $360° - 210° = 150°$ e tem a extremidade no 2º quadrante.



O arco auxiliar do 1º quadrante mede $180° - 150° = 30°$.

Então:

$$\text{sen } (-210°) = \text{sen } 150° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$$

$$\cos (-210°) = \cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } (-210°) = \text{tg } 150° = -\text{tg } 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

c) $x = 840°$

840°	360°
120°	**2 (voltas)**

Os valores das funções trigonométricas do arco que mede 840° são os mesmos das funções trigonométricas do arco que mede 120° (arco do 2º quadrante).

O arco auxiliar do 1º quadrante mede $180° - 120° = 60°$.

Então:

$$\text{sen } 840° = \text{sen } 120° = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 840° = \cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 840° = \text{tg } 120° = -\text{tg } 60° = -\sqrt{3}$$

d) $x = \dfrac{2\pi}{3}$ rad

O arco auxiliar do 1º quadrante mede $\pi - \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}$ (rad).

Então:

$$\text{sen}\ \frac{2\pi}{3} = \text{sen}\ \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\ \frac{2\pi}{3} = -\cos\ \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{tg}\ \frac{2\pi}{3} = -\text{tg}\ \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

e) $x = \dfrac{3\pi}{4}$ rad

O arco auxiliar do 1º quadrante mede $\pi - \dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$ (rad).

Então:

$$\text{sen}\ \frac{3\pi}{4} = \text{sen}\ \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\ \frac{3\pi}{4} = -\cos\ \frac{\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg}\ \frac{3\pi}{4} = -\text{tg}\ \frac{\pi}{4} = -1$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

34. Recorrendo a um arco do 1º quadrante, forneça os valores de sen x, cos x e tg x nos casos abaixo:

a) $x = 150°$ b) $x = -\dfrac{5\pi}{4}$ rad c) $x = 1\,200°$ d) $x = \dfrac{17\pi}{6}$ rad

35. Recorrendo a um arco do 1º quadrante, determine cotg x, sec x e cossec x, nos casos seguintes:

a) $x = 120°$ b) $x = \dfrac{4\pi}{5}$ rad c) $x = -240°$

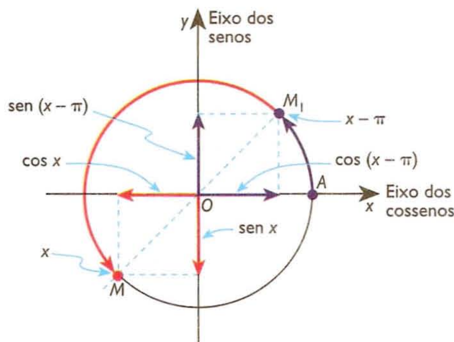
36. Simplifique:

a) $N = \dfrac{\text{sen}\ 164° \cdot \cos 130° \cdot \text{tg}\ \dfrac{3 \cdot \pi}{5}}{\text{tg}\ \dfrac{2 \cdot \pi}{5} \cdot \text{sen}\ 884° \cdot \cos 50°}$ b) $N = \dfrac{\text{sen}(-230°) \cdot \cos \dfrac{3 \cdot \pi}{4} \cdot \text{tg}\ 460°}{\text{tg}\ 80° \cdot \text{sen}\ 50°}$

Recorrência ao 1º quadrante quando o arco $\widehat{AM}$ tem extremidade no 3º quadrante

A figura da página seguinte mostra o arco $\widehat{AM}$, que mede x. Tomando no ciclo o ponto M_1, simétrico do ponto M, com relação ao centro O, temos que **a medida de $\widehat{AM_1}$ é $(x - \pi)$.**

Dois arcos, um de medida x e outro de medida $(x - \pi)$, são chamados **arcos explementares**.



Observando a figura, vemos que os arcos $\widehat{AM}$ e $\widehat{AM_1}$ possuem senos simétricos (ou seja, mesmo valor absoluto e sinais contrários) e cossenos também simétricos.

Nessas condições, temos:

$$\text{sen } x = -\text{sen } (x - \pi)$$
$$\cos x = -\cos (x - \pi)$$

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{-\text{sen } (x - \pi)}{-\cos (x - \pi)} = \text{tg } (x - \pi)$$

$$\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x} = \frac{-\cos (x - \pi)}{-\text{sen } (x - \pi)} = \text{cotg } (x - \pi)$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{-\cos (x - \pi)} = -\sec (x - \pi)$$

$$\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x} = \frac{1}{-\text{sen } (x - \pi)} = -\text{ cossec } (x - \pi)$$

Resumindo, se $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, temos que:

$\text{sen } x = -\text{sen } (x - \pi)$	$\text{tg } x = \text{tg } (x - \pi)$	$\sec x = -\sec (x - \pi)$
$\cos x = -\cos (x - \pi)$	$\text{cotg } x = \text{cotg } (x - \pi)$	$\text{cossec } x = -\text{cossec } (x - \pi)$

Exemplo

Recorrendo a um arco do 1º quadrante, determine sen x, cos x e tg x, para os arcos x abaixo:

a) $x = 240°$ b) $x = \frac{5\pi}{4}$ rad c) $x = -140°$ d) $x = 200°20'$

Solução

a) $x = 240°$

O arco auxiliar do 1º quadrante mede $240° - 180° = 60°$.

Então:

$$\text{sen } 240° = -\text{sen } 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 240° = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$$

b) $x = \dfrac{5\pi}{4}$ rad

O arco auxiliar do 1º quadrante mede $\dfrac{5\pi}{4} - \pi = \dfrac{\pi}{4}$.

Então:

$$\text{sen } \frac{5\pi}{4} = -\text{sen } \frac{\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{5\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } \frac{5\pi}{4} = \text{tg } \frac{\pi}{4} = 1$$

c) $x = -140°$

A primeira determinação positiva desse arco é $360° - 140° = 220°$.

O arco auxiliar do 1º quadrante mede $220° - 180° = 40°$.

Então:

sen $(-140°)$ = sen $220°$ = $-$sen $40°$

cos $(-140°)$ = cos $220°$ = $-$cos $40°$

tg $(-140°)$ = tg $220°$ = tg $40°$

d) $x = 200°20'$

O arco auxiliar do 1º quadrante mede $200°20' - 180° = 20°20'$.

Então:

sen $200°20'$ = $-$sen $20°20'$

cos $200°20'$ = $-$cos $20°20'$

tg $200°20'$ = tg $20°20'$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

37. Recorrendo a um arco do 1º quadrante, determine sen x, cos x e tg x nos casos:

a) $x = -120°$ b) $x = \dfrac{8\pi}{7}$ rad c) $x = -150°$ d) $x = 560°10'$

38. Recorrendo a um arco do 1º quadrante, determine o valor de N sendo:

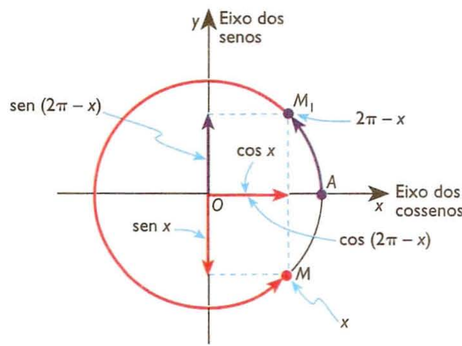
$$N = \text{cotg } 225° + \text{tg}\left(\frac{-3\pi}{4}\right).$$

Recorrência ao 1º quadrante quando o arco $\widehat{AM}$ tem extremidade no 4º quadrante

A figura da página seguinte mostra o arco $\widehat{AM}$, que mede x.

Tomando no ciclo o ponto M_1, simétrico do ponto M com relação ao eixo dos cossenos, temos que **a medida de** $\widehat{AM_1}$ **é** $(2\pi - x)$.

Dois arcos, um de medida x e outro de medida $(2\pi - x)$, são chamados **arcos replementares**.



Observando a figura, vemos que os arcos $\widehat{AM}$ e $\widehat{AM_1}$ possuem senos simétricos (mesmo valor absoluto e sinais contrários) e o mesmo cosseno.

Nessas condições, temos:

$\text{sen } x = -\text{sen } (2\pi - x)$
$\cos x = \cos (2\pi - x)$
$\text{tg } x = -\text{tg } (2\pi - x)$
$\text{cotg } x = -\text{cotg } (2\pi - x)$
$\sec x = \sec (2\pi - x)$
$\text{cossec } x = -\text{cossec } (2\pi - x)$

Exemplo 1

Recorrendo a um arco do 1º quadrante, determinar sen x, cos x e tg x nos casos:

a) $x = 300°$ b) $x = \frac{9\pi}{5}$ rad c) $x = 675°$

Solução

a) $x = 300°$

O arco auxiliar do 1º quadrante mede $360° - 300° = 60°$.

Então:

$$\text{sen } 300° = -\text{sen } 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 300° = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 300° = -\text{tg } 60° = -\sqrt{3}$$

b) $x = \frac{9\pi}{5}$ rad

O arco auxiliar do 1º quadrante mede $2\pi - \frac{9\pi}{5} = \frac{\pi}{5}$.

Então:

$$\text{sen } \frac{9\pi}{5} = -\text{sen } \frac{\pi}{5}$$

$$\cos \frac{9\pi}{5} = \cos \frac{\pi}{5}$$

$$\text{tg } \frac{9\pi}{5} = -\text{tg } \frac{\pi}{5}$$

c) $x = 675°$

Temos: $675° = \underbrace{360°}_{\text{1 volta}} + 315°$

O arco auxiliar do 1º quadrante mede $360° - 315° = 45°$.

Então:

$$\text{sen } 675° = -\text{sen } 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 675° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 675° = -\text{tg } 45° = -1$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

39. Recorrendo a um arco do 1º quadrante, calcule sen x e cos x nos casos:

a) $x = 690°$ b) $x = \frac{15\pi}{4}$ rad c) $x = -60°$ d) $x = \frac{-\pi}{6}$ rad

40. Calcule o valor de N nos casos seguintes:

a) $N = \text{sen } 150° + 2 \cdot \cos 225° - \text{tg } (-45°)$

b) $N = 3 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{15\pi}{4}\right) - \sec\left(\frac{11\pi}{3}\right)$

c) $N = \text{sen } 390° - 2 \cdot \cos 150° + \text{tg } 240° - \cos(-120°)$

d) $N = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) - \text{sen}\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{2}\right)$

Exemplo 2

Simplificar:

$$N = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \text{sen }(\pi + x)}$$

Solução

Temos que:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \cos\left[2\pi - \left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen } x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos\left[\pi - \left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right] = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\text{sen } x$$

$$\text{sen }(\pi + x) = -\text{sen }[(\pi + x) - \pi] = -\text{sen } x$$

Substituindo os valores encontrados, obtemos:

$$N = \frac{\cos x \cdot \text{sen } x}{-\text{sen } x \cdot (-\text{sen } x)} = \frac{\cos x}{\text{sen } x} = \text{cotg } x$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

41. Simplifique as expressões abaixo, considerando $0 < x < \frac{\pi}{2}$:

a) $y = \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2\,\text{sen}\,(\pi + x)$

b) $y = \dfrac{\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)}{4\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \text{sen}\,(\pi - x)}$

c) $y = \text{sen}\,(\pi + x) - \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos\,(-x) - \text{cotg}\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$

d) $y = \dfrac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$

10. Cálculo dos valores das funções trigonométricas

Quando estudamos a trigonometria no triângulo retângulo, aprendemos a calcular os valores das funções trigonométricas para ângulos menores que 90°. Naquela oportunidade, você aprendeu a utilizar uma tabela de valores para calcular senos e cossenos daqueles ângulos.

Pois bem, com o uso daquela tabela, agora temos condições de calcular os valores das diversas funções trigonométricas de um arco que mede *x*, para qualquer valor de *x*!

Se tivermos em mão uma calculadora científica, o cálculo é imediato, como já foi visto naquela oportunidade.

Como complementação, daremos apenas um exemplo onde ocorrem cálculos aproximados, utilizando a tabela reproduzida abaixo.

Tábua de senos e cossenos

Arco	Seno	Cosseno	Arco	Seno	Cosseno	Arco	Seno	Cosseno
1°	0,017 5	0,999 8	16°	0,275 6	0,961 3	31°	0,515 0	0,857 2
2°	0,034 9	0,999 4	17°	0,292 4	0,956 3	32°	0,529 9	0,848 0
3°	0,052 3	0,998 6	18°	0,309 0	0,951 1	33°	0,544 6	0,838 7
4°	0,069 8	0,997 6	19°	0,325 6	0,945 5	34°	0,559 2	0,829 0
5°	0,087 2	0,996 2	20°	0,342 0	0,939 7	35°	0,573 6	0,819 2
6°	0,104 5	0,994 5	21°	0,358 4	0,933 6	36°	0,587 8	0,809 0
7°	0,121 9	0,992 5	22°	0,374 6	0,927 2	37°	0,601 8	0,798 6
8°	0,139 2	0,990 3	23°	0,390 7	0,920 5	38°	0,615 7	0,788 0
9°	0,156 4	0,987 7	24°	3,406 7	0,913 5	39°	0,629 3	0,777 1
10°	0,173 6	0,984 8	25°	0,422 6	0,906 3	40°	0,642 8	0,766 0
11°	0,190 8	0,981 6	26°	0,438 4	0,898 8	41°	0,656 1	0,754 7
12°	0,207 9	0,978 1	27°	0,454 0	0,891 0	42°	0,669 1	0,743 1
13°	0,225 0	0,974 4	28°	0,469 5	0,882 9	43°	0,682 0	0,731 4
14°	0,241 9	0,970 3	29°	0,484 8	0,874 6	44°	0,694 7	0,719 3
15°	0,258 8	0,965 9	30°	0,500 0	0,866 0	45°	0,707 1	0,707 1

Exemplo
Calcular o valor de:

$$N = \cos 140° - \text{sen } 100° + \text{sen } 230° - \text{tg } 320° \quad [1]$$

Solução
Faremos uso:

- do que vimos sobre recorrência a arco do 1º quadrante;
- da tabela dos valores de senos e cossenos;
- do conhecimento de que, quando dois arcos somam 90°, o seno de um deles é igual ao cosseno do outro.

Assim, calculando separadamente cada parcela do segundo membro de [1], temos:
$\cos 140° = -\cos 40° = -0{,}766\,0$
$\text{sen } 100° = \text{sen } 80° = \cos 10° = 0{,}984\,8$
$\text{sen } 230° = -\text{sen } 50° = -\cos 40° = -0{,}766\,0$

$$\text{tg } 320° = -\text{tg } 40° = -\frac{\text{sen } 40°}{\cos 40°} = \frac{0{,}642\,8}{0{,}766\,0} = 0{,}839\,2$$

Substituindo esses valores em [1], encontramos:

$N = -0{,}766\,0 - 0{,}984\,8 + (-0{,}766\,0) - 0{,}839\,2 = -1{,}824\,0$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

42. Calcule:

a) sen 43°
b) cos 117°
c) tg 148°
d) sec 138°
e) sen 250°
f) cotg 254°
g) cossec 312°
h) sen 340°

43. Calcule o valor de P:

a) $P = 3 \cdot \cos 310° - 4 \cdot \text{sen } 95° + 2 \cdot \text{tg } (-56°)$

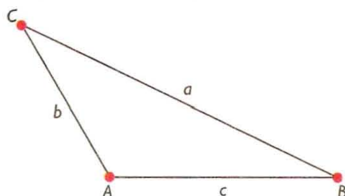
b) $P = \dfrac{\text{tg } (285°) + 2 \cdot \cos (-215°)}{\text{sen } (-134°) - \text{tg } (330°)}$

Complementos sobre a lei dos senos e a lei dos cossenos

Quando estudamos a trigonometria no triângulo, vimos duas leis muito importantes: a lei dos senos e a lei dos cossenos. No entanto, naquela oportunidade, a veracidade dessas duas leis apenas se referia a um triângulo acutângulo.

Agora que já aprendemos as funções trigonométricas de quaisquer arcos (ou quaisquer ângulos), é importante saber que aquelas duas leis são verdadeiras **para qualquer triângulo**.

Assim, para um triângulo ABC qualquer,

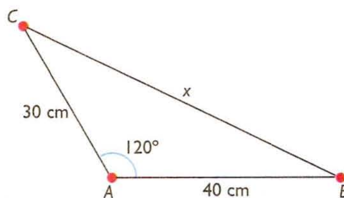


são verdadeiras as seguintes afirmações:

Lei dos senos	Lei dos cossenos
$\dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{b}{\text{sen } B} = \dfrac{c}{\text{sen } C}$	$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$

Exemplo 1

No triângulo *ABC* mostrado na figura ao lado, determine o valor de x, utilizando a lei dos cossenos.



Solução

Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$x^2 = 1\,600 + 900 - 2 \cdot 30 \cdot 40 \cdot \cos(120°) \Rightarrow$$

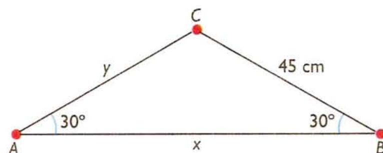
$$\Rightarrow x^2 = 2\,500 - 2\,400 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 3\,700 \Rightarrow x \simeq 60{,}82$$

O valor de x é aproximadamente 60,82 cm.

Exemplo 2

No triângulo *ABC* mostrado na figura ao lado, determine o valor de x e de y, utilizando a lei dos senos.



Solução

Como o triângulo tem dois ângulos medindo 30°, ele é isósceles, portanto $y = 45$ cm.
O ângulo C mede $180° - 30° - 30°$, ou seja, C mede 120°.
Conforme o problema exige, utilizaremos a lei dos senos.
Temos:

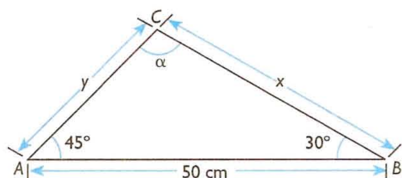
$$\frac{45}{\text{sen } 30°} = \frac{45}{\text{sen } 30°} = \frac{x}{\text{sen } 120°} \Rightarrow x = \frac{45 \cdot \text{sen } 120°}{\text{sen } 30°} \Rightarrow x = \frac{45 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = 45 \cdot \sqrt{3}$$

Então $x = 45\sqrt{3}$ cm.

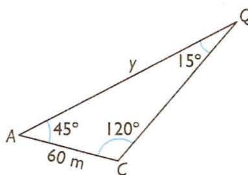
EXERCÍCIO PROPOSTO

44. Calcule os elementos desconhecidos nos triângulos abaixo.

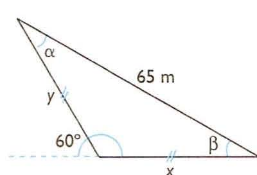
a)



b)



c)

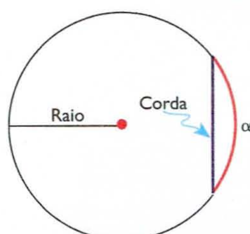


TÚNEL DO TEMPO

A idéia da função corda, precursora da nossa função seno, foi trabalhada com bastante intensidade durante muitos séculos anteriores a Ptolomeu. No seu *Almagesto*, obra composta de 13 livros, em que são estudados os movimentos dos planetas, aparece uma tábua da função corda, desde 0,5 grau até 180 graus, de meio em meio grau.

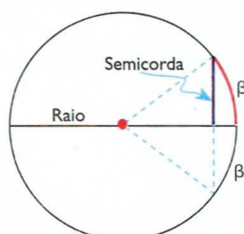
A função corda relacionava um arco de circunferência com a corda respectiva. Com a natural evolução do pensamento matemático, quando alguém pensou em utilizar uma tábua relacionando a metade da corda de um arco duplo, estava inventada a nossa **função seno**, que em latim era designada *sinus*. Há registros de que, por volta do século V de nossa era, o matemático hindu Aryabhata já calculava essas semicordas.

Função corda



Relaciona a corda com α.

Função seno

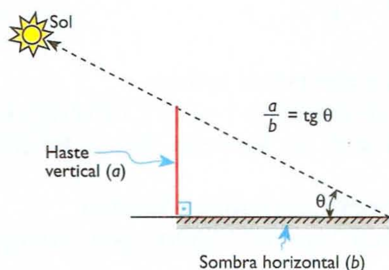


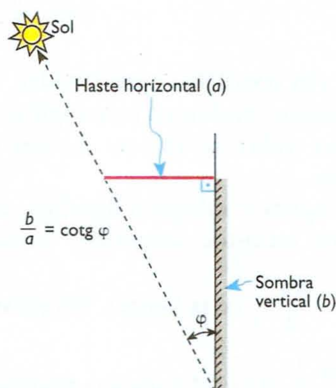
Relaciona a semicorda com β.

O termo **co-sinus** foi utilizado pela primeira vez no século XVII, por Edmund Gunter, para indicar o seno do complemento, combinando as palavras "complemento" e "sinus", que em português ficou **cosseno**.

Idéias equivalentes às nossas conhecidas funções **tangente** e **cotangente** apareceram há mais de três milênios, tanto em cálculos relativos à construção de pirâmides, como em cálculos envolvendo relógios de sol. Esses relógios mostravam a relação entre as horas do dia com o comprimento da sombra de uma vara, chamada **gnômon**.

No caso de a vara ser vertical, a sombra era projetada no chão, e no caso de ser horizontal, a sombra era projetada numa parede. Veja isso nas figuras seguintes.







Juca Martins/ Pulsar

Relógio de sol situado em Tiradentes – MG.

11. Funções trigonométricas inversas

Quando, em estudos anteriores, aprendemos os conceitos de função inversa, vimos que somente as funções bijetoras (ou seja, injetoras e sobrejetoras) tinham inversa.

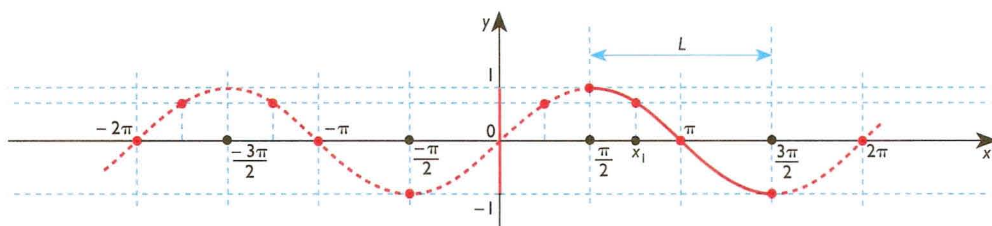
Veremos agora como ajustar aqueles conceitos para as funções trigonométricas aprendidas.

Função arco-seno

Vamos rever a definição da função seno:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = \text{sen } x$$

Agora veja o gráfico dessa função:



Por ele, vemos que a função não é sobrejetora, pois a imagem dela é Im $(f) = [-1, 1]$ e o seu contradomínio é $\mathbb{R}$.

A figura mostra também que a função não é injetora, pois, para um mesmo valor $x_1 \in \mathbb{R}$, existem infinitos valores de x, tais que sen x = sen x_1, como, por exemplo,

$$\text{sen } \frac{\pi}{2} = \text{sen}\left(\frac{-3\pi}{2}\right) = 1$$

Então, nas condições apresentadas, a função $y = \text{sen } x$ não possui inversa.

No entanto, podemos restringir o contradomínio ao conjunto $[-1, 1]$, intervalo esse onde estão todos os valores de sen x para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Fazendo isso, a função é sobrejetora.

Vamos agora restringir o domínio, de modo que a função seja também injetora.

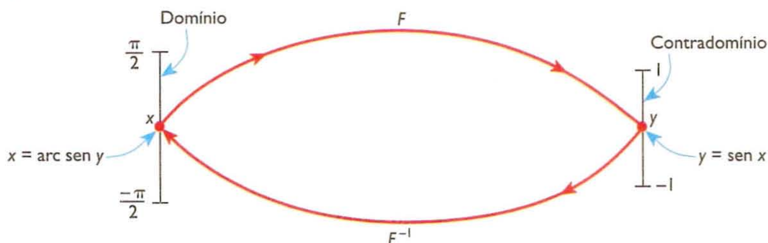
Existem infinitos intervalos onde tal peculiaridade ocorre, como, por exemplo, $L = \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ (veja figura). No entanto, convencionamos adotar para domínio o intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, no qual a mesma peculiaridade também ocorre.

Dessa forma temos a função $F: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, definida por $F(x) = \text{sen } x$.

Nessas condições a função é bijetora e, portanto, tem inversa. Ela é definida assim:

$F^{-1}: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ tal que $F^{-1}(y) = \text{arc sen } y$ (entende-se: arco cujo seno é y).

Veja o esquema:



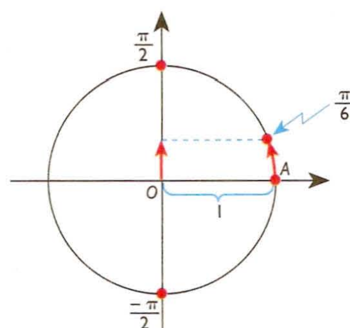
Exemplo 1
Achar y nos casos seguintes:

a) $y = \text{arc sen } \dfrac{1}{2}$ b) $y = \text{arc sen}\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ c) $y = 3 \cdot \cos\left(\text{arc sen } \dfrac{4}{7}\right)$

Solução

a)

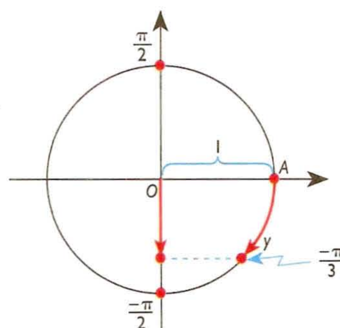
$$y = \text{arc sen } \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ \text{e} \\ \text{sen } y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{\pi}{6}$$



Portanto: $y = \dfrac{\pi}{6}$ rad.

b)

$$y = \text{arc sen}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ \text{e} \\ \text{sen } y = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{\pi}{3}$$



Portanto: $y = -\dfrac{\pi}{3}$ rad.

c) $y = 3 \cdot \cos \underbrace{\left(\text{arc sen } \dfrac{4}{7}\right)}_{z}$

$$\text{Chamando } z = \text{arc sen } \frac{4}{7} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \leqslant z \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ \text{sen } z = \dfrac{4}{7} \\ \text{e} \\ y = 3 \cdot \cos z \end{cases}$$

Como $\cos^2 z + \text{sen}^2 z = 1 \Rightarrow \cos z = +\sqrt{1 - \text{sen}^2 z}$, pois, como z é tal que $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant z \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, seu cosseno é positivo.

Então: $\cos z = \sqrt{1 - \frac{16}{49}} \Rightarrow \cos z = \frac{\sqrt{33}}{7}$.

Assim sendo: $y = \frac{3 \cdot \sqrt{33}}{7}$.

Exemplo 2

Sabendo que $y = \text{arc sen } 0{,}4$, determine aproximadamente o valor de y.

Solução

$$y = \text{arc sen } 0{,}4 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \text{e} \\ \text{sen } y = 0{,}4 \end{cases}$$

Nesse caso, o valor do seno não é de nenhum arco conhecido.

Assim, se desejarmos saber aproximadamente o valor de y, devemos fazer uso da tábua de valores ou de uma calculadora científica.

Utilizando a tábua de valores de senos e cossenos, vemos que o valor de y está entre 23° e 24°.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

45. Determine o valor de y nos casos:

a) $y = \text{arc sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

b) $y = \text{arc sen}\left(-\frac{1}{2}\right)$

c) $y = 2 \cdot \text{arc sen } 0{,}342$

d) $y = \text{arc sen }(-1) + \text{arc sen } 0{,}5$

46. Calcule y nos casos seguintes:

a) $y = 2 \cdot \cos(\text{arc sen } 0{,}8)$

b) $y = \text{sen}(\text{arc sen } 0{,}5) + \cos(\text{arc sen } 0)$

47. Determine o valor de N:

a) $N = 0{,}5 + \cos\left[\text{arc sen}\left(-\frac{4}{5}\right)\right]$

b) $N = \text{tg}\left[\text{arc sen}\left(\frac{3}{8}\right)\right]$

Função arco-cosseno

Do mesmo modo que a função seno, a função cosseno, definida por $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \cos x$, não é bijetora e, portanto, não tem inversa.

Restringindo o contradomínio ao intervalo $[-1; 1]$, a função é sobrejetora.

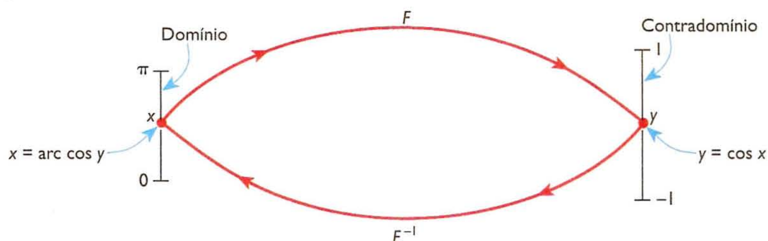
Convencionamos restringir o domínio ao intervalo $[0; \pi]$, no qual a função é injetora. Dessa forma temos a função:

$$F: [0; \pi] \to [-1; 1] \text{ tal que } F(x) = \cos x$$

Agora, então, a função é bijetora e, portanto, tem inversa:

$F^{-1}: [-1; 1] \to [0; \pi]$ tal que $F^{-1}(y) = \text{arc cos } y$ (entende-se: arco cujo cosseno é y).

Veja o esquema:



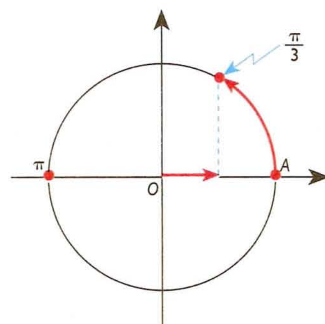
Exemplo 1
Determinar y:

a) $y = \text{arc cos}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ b) $y = \text{arc cos}\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

Solução

a)

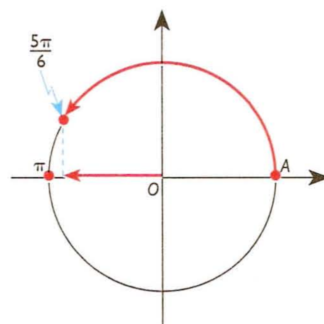
$$y = \text{arc cos}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant \pi \\ \text{e} \\ \cos y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{\pi}{3}$$



Portanto: $y = \dfrac{\pi}{3}$ rad.

b)

$$y = \text{arc cos}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant \pi \\ \text{e} \\ \cos y = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{5\pi}{6}$$



Portanto: $y = \dfrac{5\pi}{6}$ rad.

Exemplo 2
Determinar o domínio da função:

a) $f(x) = \text{arc sen}(x - 3) + \text{arc cos}(x^2 - 10)$

Solução
Devemos ter simultaneamente:

$$\underbrace{\overbrace{-1 \leqslant x - 3}^{\text{I}} \leqslant 1}_{\text{II}} \quad \text{e} \quad \underbrace{\overbrace{-1 \leqslant x^2 - 10}^{\text{III}} \leqslant 1}_{\text{IV}}$$

A condição (I) nos fornece:

$x - 3 \geq -1 \Rightarrow x \geq 2$

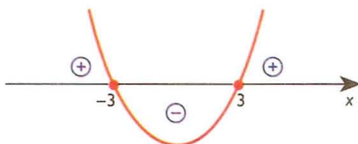
A condição (II) nos fornece:

$x - 3 \leq 1 \Rightarrow x \leq 4$

A condição (III) nos fornece:

$$x^2 - 10 \geq -1 \Rightarrow \overbrace{x^2 - 9}^{g(x)} \geq 0$$

As raízes da função $g(x) = x^2 - 9$ são -3 e 3. O sinal dessa função varia assim:

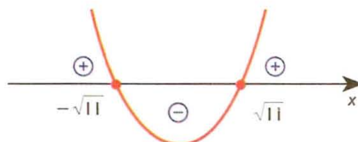


Como $g(x) \geq 0$, então, a condição (III) se resume em: $x \leq -3$ ou $x \geq 3$.

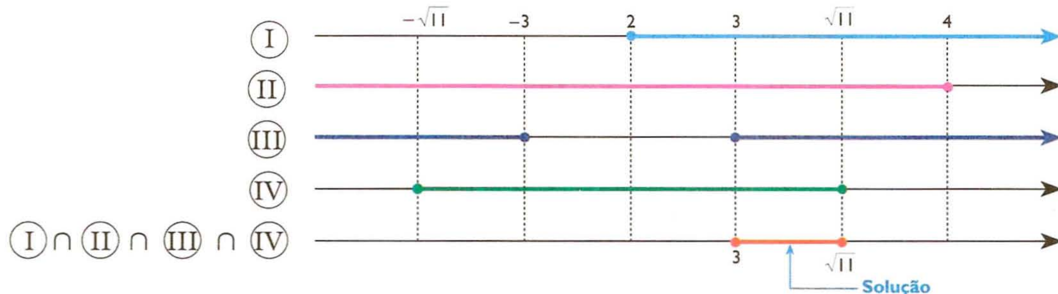
A condição (IV) nos fornece:

$$x^2 - 10 \leq 1 \Rightarrow x^2 - 11 \leq 0$$

As raízes da função $h(x) = x^2 - 11$ são $-\sqrt{11}$ e $\sqrt{11}$. O sinal dessa função varia assim:



Como $h(x) \leq 0$, a condição (IV) se resume em: $-\sqrt{11} \leq x \leq \sqrt{11}$.
Assim sendo, temos:



O domínio da função é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq \sqrt{11}\}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

48. Determine y sabendo que:

a) $y = \text{arc cos}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

b) $y = \text{arc cos}(-1)$

c) $y = \text{arc cos } 0{,}5 + \text{arc cos}(-0{,}5)$

d) $y = 2 \cdot \text{arc cos}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

49. Calcule o valor de N para:

a) $N = \text{arc cos } 0{,}970\,3$

b) $N = \text{sen}\left[\text{arc cos}\left(\dfrac{4}{5}\right)\right] + \cos[\text{arc sen}(-0{,}5)]$

c) $N = \text{tg}\left[\text{arc cos}\left(\dfrac{3}{5}\right)\right]$

50. Determine o domínio das funções:

a) $y = \text{arc sen}(3x - 11)$

b) $y = \text{arc cos}(x^2 - 1)$

c) $f(x) = \text{arc sen}(3 + x) + \text{arc cos}(2x + 8)$

Função arco-tangente

A função tangente foi definida assim:

$f\colon \mathbb{R}_1 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \text{tg } x$, com $\mathbb{R}_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Nessas condições a função é sobrejetora, pois tg x assume qualquer valor real, mas não é injetora. Desse modo não é bijetora e, portanto, não tem inversa.

Vamos restringir o domínio a um intervalo onde ela assuma todos os valores reais e, além disso, seja injetora. Existem infinitos intervalos onde isso ocorre.

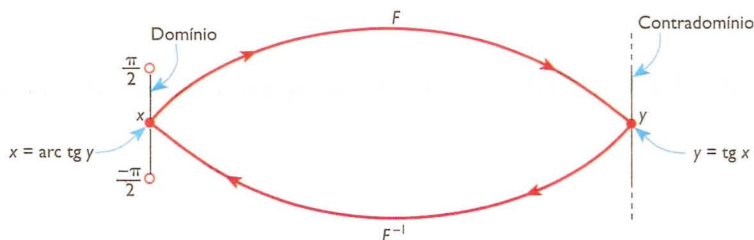
Convencionamos restringir o domínio ao intervalo aberto $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. A função fica assim determinada:

$F\colon \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$, definida por $F(x) = \text{tg } x$

A função agora é bijetora e, portanto, tem inversa:

$F^{-1}\colon \mathbb{R} \to \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, definida por $F^{-1}(y) = \text{arc tg } y$ (arco cuja tangente é y).

Veja o esquema:



Exemplo

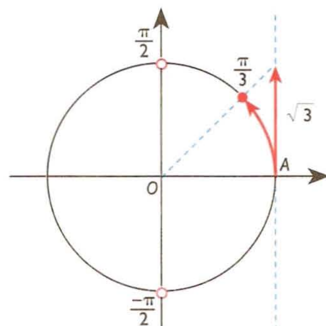
Determinar y nos casos abaixo:

a) $y = \text{arc tg } \sqrt{3}$.

b) $y = \text{arc tg } 1 + \text{arc tg } \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Solução

a) $y = \text{arc tg } \sqrt{3}$



Temos que: $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \\ \text{e} \\ \text{tg } y = \sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

b) $y = \underbrace{\text{arc tg } 1}_{z} + \underbrace{\text{arc tg } \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}_{t}$

Chamando $z = \text{arc tg } 1 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2} \\ \text{e} \\ \text{tg } z = 1 \end{cases} \Rightarrow z = \frac{\pi}{4}$ rad

Chamando $t = \text{arc tg } \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ \text{e} \\ \text{tg } t = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$ rad

Como $y = z + t \Rightarrow y = \frac{\pi}{4}$ rad $+ \frac{\pi}{6}$ rad $\Rightarrow y = \frac{5\pi}{12}$ rad.

EXERCÍCIO PROPOSTO

51. Determine y nos casos:

a) $y = \text{arc tg } (-1)$

b) $y = \text{arc tg } \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

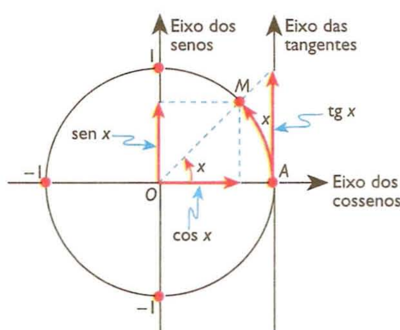
c) $y = \text{sen } (\text{arc tg } 2) + \cos (\text{arc tg } 3)$

d) $y = \text{tg } (\text{arc tg } 4) - \text{arc tg } 1$

Resumo das principais funções trigonométricas

Função	$y = \text{sen } x$	$y = \cos x$	$y = \text{tg } x$
Domínio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$R_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{R}\right\}$
Imagem	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$\mathbb{R}$
Período	2π rad	2π rad	π rad
Sinais nos quadrantes	+ no 1º e 2º − no 3º e 4º	+ no 1º e 4º − no 2º e 3º	+ no 1º e 3º − no 2º e 4º

A figura mostra um ciclo com as principais funções trigonométricas:



Algumas relações importantes (para os arcos onde as funções estão definidas)

Seno	Cosseno	Tangente	Seno e cosseno	Diversas
$\text{sen}(-x) = -\text{sen } x$	$\cos(-x) = \cos x$	$\text{tg}(-x) = -\text{tg } x$	$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$	$\frac{\text{sen } x}{\cos x} = \text{tg } x$
$\frac{1}{\text{sen } x} = \text{cossec } x$	$\frac{1}{\cos x} = \sec x$	$\frac{1}{\text{tg } x} = \text{cotg } x$	$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$	$\frac{\cos x}{\text{sen } x} = \text{cotg } x$
			$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen } x$	$1 + \text{tg}^2 x = \sec^2 x$

Para funções onde aparecem sen (kx) ou cos (kx), o período é dado por:

$$p = \frac{2\pi}{|k|} \text{ rad}$$

Para funções onde aparecem tg (kx) ou cotg (kx), o período é dado por:

$$p = \frac{\pi}{|k|} \text{ rad}$$

Função arco-seno	Função arco-cosseno	Função arco-tangente
$y = \text{arc sen } x$	$y = \text{arc cos } x$	$y = \text{arc tg } x$
$-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$	$0 \leqslant y \leqslant \pi$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

52. Sabendo que $f(x) = 3 \text{ sen } \left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, assinale as afirmações corretas:

a) O período da função é $\frac{3\pi}{2}$ rad.

b) A imagem da função é $[-3, 3]$.

c) O gráfico da função intercepta o eixo y em 3 pontos.

d) O período da função é π rad.

e) A imagem da função é $[-1, 1]$.

53. Sendo $f(x) = 4 \cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2 \cos x$, determine:

a) $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$

b) $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

c) $f(0) + 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3f(\pi)$

54. Sabendo que $\text{tg } x = \frac{3}{4}$, calcule o valor da expressão $\frac{5 \cos x}{4 \text{ sen } x}$.

55. Simplifique a expressão: $\text{sen } \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{tg } x$, para $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

56. Sabendo que $\text{sen } x = -\frac{4}{5}$, com $180° < x < 270°$, calcule o valor de $N = \frac{\sec x + \text{cossec } x}{\text{tg } x + \text{cotg } x}$.

57. Das afirmações abaixo, encontre as verdadeiras:

a) $\text{sen } \left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos x = 0$

b) $\cos \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen } \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

c) $\cos \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$

d) $\cos \left(5x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \left(\frac{\pi}{3} - 5x\right)$

e) $\text{sen } \left(4x - \frac{\pi}{8}\right) = -\text{sen } \left(\frac{\pi}{8} - 4x\right)$

f) $\text{sen } \left(2x - \frac{\pi}{9}\right) = \text{sen } \left(\frac{\pi}{9} - x\right)$

58. (UFSC) Conhecendo o valor de sen $x = \frac{3}{5}$ e $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, calcule o valor numérico da expressão:

$$\left(\frac{\sec^2 x \cdot \text{cotg } x - \text{cossec } x \cdot \text{tg } x}{6 \cdot \text{sen } x \cdot \text{cossec}^2 x}\right)^{-1}$$

59. (U. F. Ouro Preto-MG) Determine os valores de x sabendo-se que $0 \leqslant a \leqslant 2\pi$ e que:

$$\begin{cases} \text{tg } a = \dfrac{x+1}{2} \\ \sec a = \sqrt{x+2} \end{cases}$$

60. (UFPE) Seja θ um ângulo em radianos, compreendido entre 0 e $\frac{\pi}{2}$, tal que $\cos \theta = \sqrt{\frac{2}{5}}(x-2)$ e $\frac{1}{\text{sen } \theta} = \sqrt{\frac{5}{2}}\left(\frac{1}{x-1}\right)$. Determine $2x$.

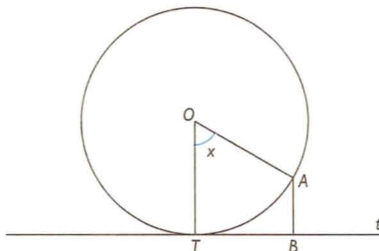
61. (Mogi-SP) Transforme a expressão $\left(\frac{\cos t + \text{cotg } t}{\sec t + \text{tg } t}\right)$ em um produto de duas funções.

62. (UFMG) Seja $f(x) = a + b \cdot \text{sen } c \cdot x$, com a, b, c números reais positivos, uma função periódica de período $\frac{3\pi}{2}$.

a) Determine c.
b) Sabendo-se que a imagem de f é o intervalo [3, 5], determine a e b.
c) Determine os valores de x onde f assume seu valor máximo.

63. (Fuvest-SP) Prove que $\cos \frac{3\pi}{10} = \text{sen } \frac{\pi}{5}$.

64. (Fuvest-SP) Considere uma circunferência de centro O e raio 2 cm tangente à reta t no ponto T. Seja x a medida do ângulo $A\hat{O}T$, onde A é um ponto da circunferência e $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Calcule, em função de x, a área do trapézio $OABT$ sendo B o ponto da reta t tal que $\overline{AB}$ é paralelo a $\overline{OT}$.



65. Sabendo que $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, simplifique:

$$N = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \text{sen}(x - \pi) + \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \text{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right).$$

TESTES

66. (PUC/Campinas-SP) Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2 - 3\cos x$. O conjunto imagem de f é o intervalo:

a) $[-1, 1]$ b) $[-1, 5]$ c) $[-5, -1]$ d) $[-5, 5]$ e) $\mathbb{R}$

67. (Osec-SP) Um valor de x que satisfaz à igualdade $\text{sen}(75° - 2x) = \cos(10° + x)$ é:

a) $-5°$ b) $15°$ c) $35°$ d) $45°$ e) $30°$

68. (PUC/Campinas-SP) Seja a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos x$. É correto afirmar que:

a) f é crescente se $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

b) o período de f é π.

c) $f(x) < 0$ se $3\pi < x < \frac{7\pi}{2}$.

d) $f(x) < 0$ se $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

e) f é decrescente em $[\pi, 2\pi]$.

69. (Mackenzie-SP) Se $A = \left(\frac{\sec x - \text{cossec } x}{1 - \text{cotg } x}\right)$ e $\cos x = \frac{1}{5}$, então $\log_5 A$ vale:

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) 0 d) $-\frac{1}{2}$ e) -1

70. (UECE) Se $\cos \theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, então o valor de $\sqrt{2 \text{ cotg } \theta + \text{cossec}^2 \theta}$ é:

a) 2 b) $\sqrt{5}$ c) 3 d) $\sqrt{10}$

71. (FEI-SP) Sabendo que $\text{tg } x = \frac{12}{5}$ e que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, podemos afirmar que:

a) $\text{cotg } x = -\frac{5}{12}$

b) $\sec x = \frac{13}{5}$

c) $\cos x = -\frac{5}{13}$

d) $\text{sen } x = \frac{12}{13}$

e) n.d.a.

72. (PUC-PR) Se x pertence ao 4º quadrante e $\sec x = \sqrt{2}$, então a expressão

$\frac{1 + \text{tg } x + \text{cossec } x}{1 + \text{cotg } x - \text{cossec } x}$ é igual a:

a) -1 b) 0 c) 1 d) -2 e) ∞

73. (PUC-PR) Sendo x um número real em que as funções são definidas e o denominador diferente de zero, a expressão $\frac{\cos x - \sec x - \text{tg } x}{\text{tg } x + \sec x}$ é igual a:

a) 1 b) $1 - \cos x$ c) $1 + \cos x$ d) $\text{sen } x$ e) $-\text{sen } x$

74. (U. Católica de Salvador-BA) O valor de $\cos 2\,400°$ é igual ao valor de:

a) $-\text{sen } 30°$ b) $-\text{sen } 60°$ c) $\cos 30°$ d) $\cos 60°$ e) $\cos 300°$

75. (Unisinos-RS) Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função definida por $f(x) = \text{sen } x + \cos x$, o valor de

$$\frac{f(\pi) + f\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$ é:

a) -3 b) -2 c) 0 d) 1 e) 2

76. (FURRN) As sentenças sen $x = a$ e cos $x = 2\sqrt{a - 1}$ são verdadeiras para todo x real, se e somente se:

a) $a = -5$ b) $a = -5$ ou $a = -1$ c) $a \neq 5$ ou $a \neq 1$ d) $a = 5$ ou $a = -1$ e) $a = 1$

77. (F. Ibero-Americana-SP) Os valores de m para que se tenha, simultaneamente, sen $x = m - 1$ e cos $x = m\sqrt{3}$ são:

a) 0 ou $\frac{1}{2}$ b) 1 ou $\sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\sqrt{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{3}$

78. (U. F. Ouro Preto-MG) Se cos $x = \frac{n-1}{n}$, então $\frac{\text{tg}^2\, x + 1}{\text{cotg}^2\, x + 1}$ é igual a:

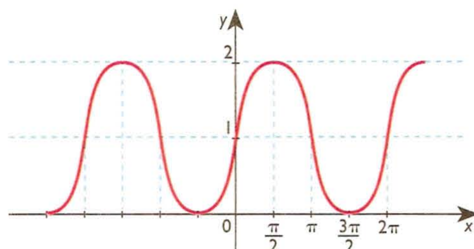
a) $\frac{2n-1}{(n-1)^2}$ b) $\frac{2n-1}{n^2}$ c) $\frac{n-1}{(n+1)^2}$ d) $\frac{(n+1)^2}{2n+1}$ e) $\frac{(n-1)^2}{2n+1}$

79. (Mackenzie-SP) O período da função dada por $y = \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ é:

a) $\frac{\pi}{8}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) π d) 2π e) $-\frac{\pi}{2}$

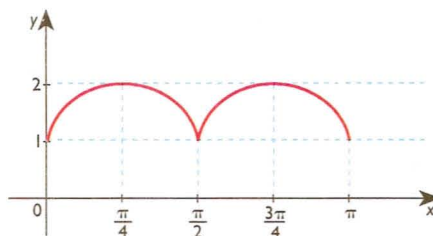
80. (UFRS) O gráfico representa a função f, definida no conjunto dos números reais, dada por:

a) $f(x) = 1 - \text{sen}\, x$
b) $f(x) = 1 + \text{sen}\, x$
c) $f(x) = \text{sen}\,(x + 1)$
d) $f(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
e) $f(x) = \text{sen}\,(x + \pi)$

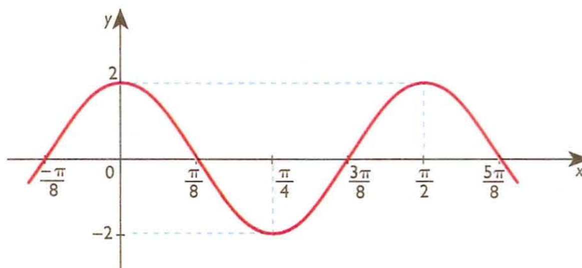


81. (Fuvest-SP) A função que melhor se adapta ao gráfico é:

a) $y = |1 + \text{sen}\, x|$
b) $y = \left|\cos \frac{x}{2}\right|$
c) $y = 1 + \cos 2x$
d) $y = \text{sen}\, x + \cos x$
e) $y = 1 + |\text{sen}\, 2x|$



82. (F. C. Chagas-SP) Na figura abaixo tem-se parte do gráfico da função definida por $y = a \cos bx$. Os números a e b são tais que:



a) $|b| = 2a$ b) $a = 2b$ c) $a + b = 3$ d) $a \cdot b = 6$ e) $a - b = -1$

83. (Unifor-CE) Para todo $x \neq k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$, a expressão $2 \cdot \cos(\pi - x) \cdot \text{sen}(\pi + x) \cdot \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ é equivalente a:

a) $\sec^2 x$ b) $2 - \text{sen}^2 x$ c) $1 + \text{cotg}^2 x$ d) $2 \cdot \cos^2 x$ e) $1 - \text{sen}\, 2x$

84. (ITA-SP) A expressão trigonométrica $\dfrac{1}{(\cos^2 x - \text{sen}^2 x)^2} - \dfrac{4\, \text{tg}^2\, x}{(1 - \text{tg}^2\, x)^2}$ para $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $x \neq \frac{\pi}{4}$, é igual a:

a) $\text{sen}\, 2x$ b) $\cos 2x$ c) 1 d) 0 e) $\sec x$

85. (Mackenzie-SP) Se $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, então a única alternativa sempre verdadeira é:

a) $\text{sen}\, x = \text{sen}\,(-x)$
b) $\cos x = -\cos x$
c) $\log(\text{sen}\, x) = \log|\text{sen}\, x|$
d) $\text{sen}(\log x) = \text{sen}\,|\log x|$
e) $\text{tg}\,[\text{arc tg}\,(x)] = x$

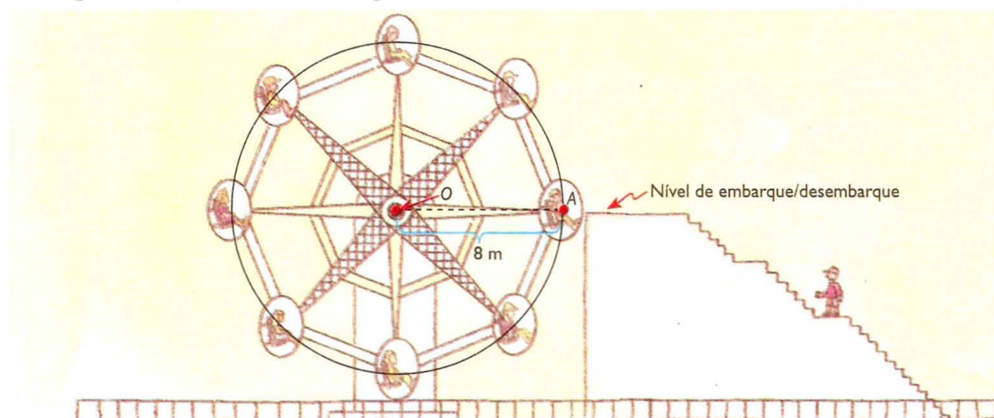
Capítulo

14 Fórmulas de transformação

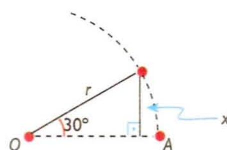
1. Introdução

Outra vez iremos fazer uso da roda-gigante, com o intuito de que ela nos auxilie a entender um novo assunto.

A roda-gigante, que tem 8 metros de raio (indicaremos por r), e na qual você irá rodar a partir do ponto A, é mostrada na figura.



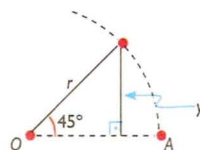
Se a roda girar, por exemplo, 30°, é fácil saber qual será sua altura em relação ao nível. A figura mostra isso. Nela, chamando de x a sua altura em relação ao nível, vemos que:



$$\frac{x}{r} = \text{sen } 30° \Rightarrow x = r \cdot \text{sen } 30°$$

Agora é só trocar r por 8 m e sen 30° por $\frac{1}{2}$, e obtemos o valor da altura, que é 4 m.

Se a roda tivesse girado 45°, no lugar de 30°, ainda seria fácil encontrar a sua altura em relação ao nível. A figura mostra isso. Nela, chamando de y a sua altura em relação ao nível, vemos que:

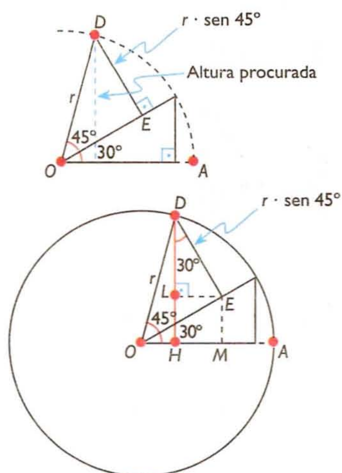


$$\frac{y}{r} = \text{sen } 45° \Rightarrow y = r \cdot \text{sen } 45°$$

Agora, é só trocar r por 8 m e sen 45° por $\frac{\sqrt{2}}{2}$, e obtemos o valor da altura, que é $4 \cdot \sqrt{2}$ m.

Imagine agora que você desejasse saber a sua altura em relação ao nível, se a roda, a partir de A, girasse 30° e, em seguida, mais 45°, ou seja, tivesse girado 75°.

Para isso, vamos sobrepor os dois triângulos das duas últimas figuras. Veja, na figura ao lado, que desejamos na verdade encontrar a altura do ponto D em relação ao nível.



Vamos colocar mais alguns elementos na nossa figura. Veja que $\overline{LE}$ foi traçado paralelo a $\overline{HM}$. Assim, temos que $\overline{HL} = \overline{ME}$ [1].

Veja ainda nessa figura que o ângulo $L\hat{D}E$ também mede 30°, pois os seus lados são perpendiculares aos do ângulo $M\hat{O}E$, que mede 30°.

A altura procurada corresponde à medida do segmento $\overline{HD}$, com $HD = LD + HL$. Vamos então encontrar LD e depois HL.

- **encontro de *LD***

Um *zoom* no triângulo retângulo LDE nos mostra que:

$$\frac{LD}{r \cdot \text{sen } 45°} = \cos 30°$$

Assim, o valor de LD é dado por:

$$LD = r \cdot \text{sen } 45° \cdot \cos 30° \quad [2]$$

- **encontro de *HL***

A figura mostra um *zoom* no triângulo retângulo OED. Nesse triângulo temos:

$$\frac{OE}{r} = \cos 45° \Rightarrow OE = r \cdot \cos 45°$$

A figura mostra agora um *zoom* no triângulo retângulo OME. Temos:

$$\frac{ME}{r \cdot \cos 45°} = \text{sen } 30° \Rightarrow ME = r \cdot \text{sen } 30° \cdot \cos 45°$$

Como de [1] temos que $HL = ME$, então

$$HL = r \cdot \text{sen } 30° \cdot \cos 45° \quad [3]$$

Assim, como $HD = HL + LD$, substituindo os resultados encontrados em [2] e [3], obtemos:

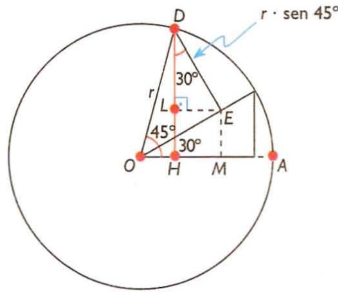
$$HD = r \cdot \text{sen } 30° \cdot \cos 45° + r \cdot \text{sen } 45° \cdot \cos 30°, \text{ ou seja,}$$
$$HD = r \cdot (\text{sen } 30° \cdot \cos 45° + \text{sen } 45° \cdot \cos 30°) \quad [4]$$

Trocando r por 8 m e os valores das funções trigonométricas acima indicadas, encontramos a altura procurada.

$$HD = 8 \text{ m} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8 \text{ m} \cdot \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\right) = \overbrace{2(\sqrt{2} + \sqrt{6}) \text{ m}}^{\textbf{Altura procurada}}$$

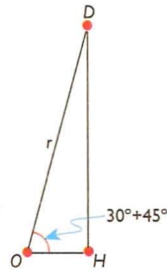
2. Arco soma e arco diferença

Vamos retomar uma das figuras utilizadas no item anterior:



Vimos que:

$HD = r \cdot (\text{sen } 30° \cdot \cos 45° + \text{sen } 45° \cdot \cos 30°)$ [4]



A figura ao lado mostra em detalhe o triângulo retângulo *OHD*. Nele vemos que:

$$HD = r \cdot \text{sen } (30° + 45°)$$

Substituindo esse valor em [4], obtemos:

$$r \cdot \text{sen } (30° + 45°) = r \cdot (\text{sen } 30° \cdot \cos 45° + \text{sen } 45° \cdot \cos 30°)$$

Dividindo os dois membros por r, encontramos:

$$\text{sen } (30° + 45°) = \text{sen } 30° \cdot \cos 45° + \text{sen } 45° \cdot \cos 30°$$

Essa última sentença pode ser generalizada para dois arcos cujas medidas sejam a e b quaisquer. Teremos dessa forma descoberto uma fórmula que fornece o seno do arco de medida $(a + b)$, desde que se conheçam as funções trigonométricas do arco de medida a e do arco de medida b.

A fórmula que fornece o seno do arco soma de a com b é:

$$\boxed{\text{sen } (a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a} \quad [5]$$

A partir dessa fórmula, podemos encontrar outras, também muito importantes:

- **fórmula para achar sen ($a - b$)**

Lembrando que $\text{sen } (a - b) = \text{sen } [a + (-b)]$, aplicando a fórmula [5] obtemos:

$$\text{sen } [a + (-b)] = \text{sen } a \cdot \cos (-b) + \text{sen } (-b) \cdot \cos a$$

Como $\cos (-b) = \cos b$ e $\text{sen } (-b) = -\text{sen } b$, substituindo encontramos a fórmula que dá o seno do arco diferença de a com b:

$$\boxed{\text{sen } (a - b) = \text{sen } a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos a} \quad [6]$$

- **fórmula para achar cos ($a + b$)**

Temos que:

$$\cos (a + b) = \text{sen } \left[\frac{\pi}{2} - (a + b)\right] = \text{sen } \left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right]$$

Aplicando a fórmula [6], obtemos:

$$\cos(a+b) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \cos b - \text{sen}\, b \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$$

Como $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$ e $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \text{sen}\, a$, vem:

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b} \quad [7]$$

- **fórmula para achar cos ($a - b$)**

Sabemos que $\cos(a - b) = \cos[a + (-b)]$. Podemos então aplicar a fórmula [7].

$$\cos(a-b) = \cos[a + (-b)] = \cos a \cdot \cos(-b) - \text{sen}\, a \cdot \text{sen}(-b)$$

Então, como $\cos(-b) = \cos b$ e $\text{sen}(-b) = -\text{sen}\, b$, temos:

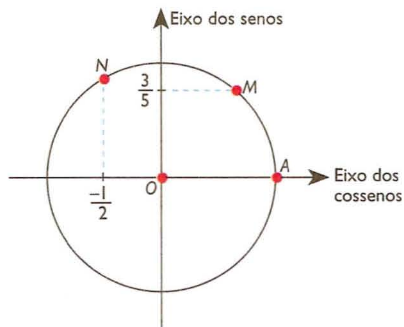
$$\boxed{\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b} \quad [8]$$

Vejamos alguns exemplos de aplicação das fórmulas que dão os valores do seno e do cosseno do arco soma $(a + b)$ e do arco diferença $(a - b)$.

Exemplo 1

A figura mostra, num ciclo trigonométrico, um arco $\widehat{AM}$, que mede a e um arco $\widehat{AN}$, que mede b. Determinar em qual quadrante está o arco de origem A, que mede:

a) $(a + b)$
b) $(a - b)$



Solução

a) $(a + b)$

A figura nos mostra que:

$\text{sen}\, a = \frac{3}{5}$, com a do 1º quadrante, e $\cos b = -\frac{1}{2}$, com b do 2º quadrante.

Vamos determinar $\text{sen}(a + b)$ e $\cos(a + b)$ e, com os resultados obtidos, determinar em qual quadrante está o arco que mede $(a + b)$.

Sabemos que:

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen}\, a \cdot \cos b + \text{sen}\, b \cdot \cos a \text{ e que}$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b$$

Achamos $\cos a$ assim:

$\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \cos^2 a = 1 - \frac{9}{25} \Rightarrow \cos^2 a = \frac{16}{25}$

Como a é do 1º quadrante, o seu cosseno é positivo, portanto:

$$\cos a = \frac{4}{5}$$

Achamos $\text{sen}\, b$ assim:

$\text{sen}^2 b = 1 - \cos^2 b \Rightarrow \text{sen}^2 b = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow \text{sen}^2 b = \frac{3}{4}$

Como b é do 2º quadrante, o seu seno é positivo, portanto:

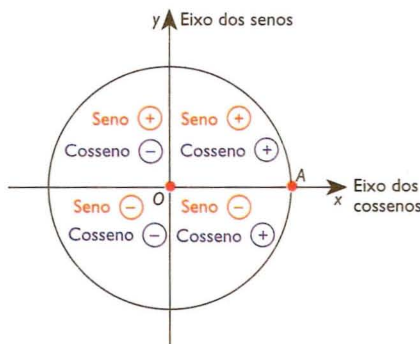
$$\text{sen } b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dessa forma, temos:

$$\text{sen }(a + b) = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{5} \Rightarrow \text{sen }(a + b) = \frac{-3 + 4 \cdot \sqrt{3}}{10} \text{ (positivo)}$$

$$\cos (a + b) = \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos (a + b) = \frac{-4 - 3 \cdot \sqrt{3}}{10} \text{ (negativo)}$$

Como sen $(a + b)$ é positivo e cos $(a + b)$ é negativo, concluímos que o arco que mede $(a + b)$ tem sua extremidade no 2º quadrante, conforme mostra a figura.



b) $(a - b)$

Calculamos sen $(a - b)$ e cos $(a - b)$, utilizando os dados obtidos no item a.

$$\text{sen }(a - b) = \text{sen } a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos a \Rightarrow \text{sen }(a - b) = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{5}$$

Então:

$$\text{sen }(a - b) = \frac{-3 - 4 \cdot \sqrt{3}}{10} \text{ (negativo)}$$

$$\cos (a - b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen } a \cdot \text{sen } b \Rightarrow \cos (a - b) = \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Então:

$$\cos (a - b) = \frac{-4 + 3 \cdot \sqrt{3}}{10} \text{ (positivo)}$$

Como sen $(a - b)$ é negativo e cos $(a - b)$ é positivo, concluímos que o arco de medida $(a - b)$ tem extremidade no 4º quadrante, conforme mostra a figura do item a.

Exemplo 2

Achar o valor de sen 105°.

Solução

Temos que: sen 105° = sen (60° + 45°)

Como sen (60° + 45°) = sen 60° · cos 45° + sen 45° · cos 60°, então:

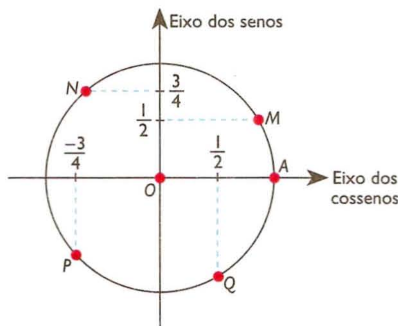
$$\text{sen } 105° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen } 105° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Como exercício, calcule o valor de cos 105°, e verifique que a resposta será $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. A figura mostra um ciclo trigonométrico, no qual aparecem:

a) um arco $\widehat{AM}$ que mede *a*.
b) um arco $\widehat{AN}$ que mede *b*.
c) um arco $\widehat{AP}$ que mede *c*.
d) um arco $\widehat{AQ}$ que mede *d*.



Determine:
a) sen $(a + b)$
b) cos $(a - b)$
c) sen $(b - c)$
d) cos $(b + c)$
e) sen $(a - d)$
f) cos $(a + d)$

2. Usando a mesma figura do exercício anterior, determine em qual quadrante está a extremidade do arco que mede:

a) $(a + c)$
b) $(d - b)$

3. Sabendo que $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ com *x* do 1º quadrante, determine:

a) $\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
b) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$
c) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$
d) $\cos\left(\frac{3\pi}{4} + x\right)$

4. Calcule o que se pede em cada caso:

a) sen $(a + b)$ e cos $(a + b)$ sabendo que sen $a = \frac{1}{2}$, com *a* do 1º quadrante, e que sen $b = -\frac{1}{2}$, com *b* do 4º quadrante.

b) cos $(a - b)$ e sen $(a - b)$, sabendo que sen $a = \frac{4}{5}$, com $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ e que cos $b = \frac{1}{2}$ com *b* do 4º quadrante.

5. Calcule:
a) cos 75°
b) sen 15°
c) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$
d) tg 105°

6. Determine tg $(a + b)$ sabendo que:

sen $b = \frac{1}{3}$ com *b* do 2º quadrante.

cos $a = -\frac{1}{2}$ com *a* do 3º quadrante.

Observação: o último exercício proposto sugere que desenvolvamos uma fórmula para encontrar o valor de tg $(a + b)$ e de tg $(a - b)$, quando se conhecem os valores de tg *a* e de tg *b*. Veja:

$$\text{tg}\,(a + b) = \frac{\text{sen}\,(a + b)}{\cos\,(a + b)},\ \text{com}\ (a + b) \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \text{ e } k \in \mathbb{Z}$$

Dessa forma podemos escrever:

$$\text{tg}\,(a + b) = \frac{\text{sen}\,a \cdot \cos b + \text{sen}\,b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b - \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b} \quad \text{(I)}$$

Considerando $a \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ e $b \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, temos que tanto cos a como cos b são diferentes de zero. Assim sendo, podemos dividir numerador e denominador de (I) por cos a · cos b. Então:

$$\text{tg}\,(a + b) = \frac{\dfrac{\text{sen}\,a \cdot \cancel{\cos b}}{\cos a \cdot \cancel{\cos b}} + \dfrac{\text{sen}\,b \cdot \cancel{\cos a}}{\cancel{\cos a} \cdot \cos b}}{\dfrac{\cancel{\cos a} \cdot \cancel{\cos b}}{\cancel{\cos a} \cdot \cancel{\cos b}} - \dfrac{\text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b}{\cos a \cdot \cos b}}$$

$$\boxed{\text{tg}\,(a + b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,b}}$$

De modo análogo determinamos tg $(a - b)$:

$$\boxed{\text{tg}\,(a - b) = \frac{\text{tg}\,a - \text{tg}\,b}{1 + \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,b}}$$

Faça como exercício esse cálculo.

Exemplo 1

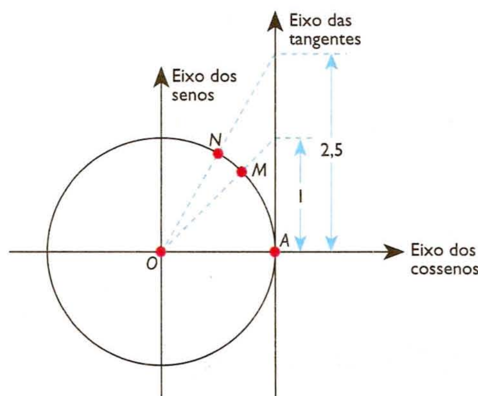
A figura mostra um ciclo trigonométrico. Nela vemos:

- um arco $\widehat{AM}$ que mede a.
- um arco $\widehat{AN}$ que mede b.

Determinar:

a) tg $(a + b)$

b) tg $(a - b)$



Solução

A figura nos mostra que:

$$\text{tg}\,a = 1 \text{ e } \text{tg}\,b = 2{,}5$$

Como $\text{tg}\,(a + b) = \dfrac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,b}$, temos:

$$\text{tg}\,(a + b) = \frac{1 + 2{,}5}{1 - 1 \cdot 2{,}5} = \frac{3{,}5}{-1{,}5} = \frac{-35}{15} = \frac{-7}{3}$$

Como $\text{tg}\,(a - b) = \dfrac{\text{tg}\,a - \text{tg}\,b}{1 + \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,b}$, então:

$$\text{tg}\,(a - b) = \frac{1 - 2{,}5}{1 + 1 \cdot 2{,}5} = \frac{-1{,}5}{3{,}5} = \frac{-15}{35} = \frac{-3}{7}$$

Exemplo 2

Calcular tg 75° conhecendo tg 30° $= \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e tg 45° = 1.

Solução

Como 45° + 30° = 75°, temos:

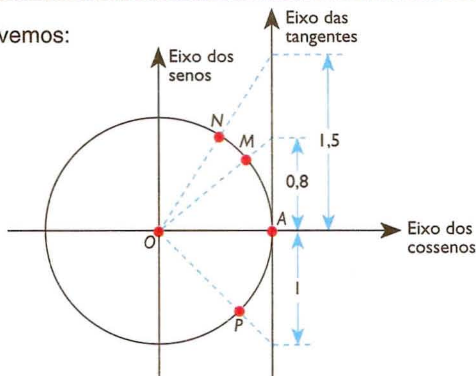
$$\text{tg } 75° = \text{tg } (45° + 30°) = \frac{\text{tg } 45° + \text{tg } 30°}{1 - \text{tg } 45° \cdot \text{tg } 30°} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg } 75° = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{(3 + \sqrt{3}) \cdot (3 + \sqrt{3})}{(3 - \sqrt{3}) \cdot (3 + \sqrt{3})} = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} = 2 + \sqrt{3}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. A figura mostra um ciclo trigonométrico. Nele vemos:

- um arco $\widehat{AM}$ que mede *a*.
- um arco $\widehat{AN}$ que mede *b*.
- um arco $\widehat{AP}$ que mede *c*.



Determine:

a) tg (*a* + *b*)
b) tg (*a* − *b*)
c) tg (*b* + *c*)
d) tg (*c* − *a*)

8. Determine o valor de tg 15°, sabendo que:

a) tg 30° = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e que tg 45° = 1   b) tg 45° = 1 e que tg 60° = $\sqrt{3}$

9. Calcule tg 105°, sabendo que tg 60° = $\sqrt{3}$ e que tg 45° = 1.

10. Calcule tg (*x* + *y*) e tg (*x* − *y*):

a) tg *x* = 3 e tg *y* = 2   b) tg *x* = −5 e tg *y* = −4   c) tg *x* = $\sqrt{2}$ e tg *y* = $\sqrt{3}$

3. O arco duplo

Um caso particular interessante e muito importante ocorre quando, nas fórmulas do seno, cosseno e tangente do arco (*a* + *b*), fazemos *b* = *a*. Observe:

$$\text{sen } (a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a \Rightarrow \text{sen } \underbrace{(a + a)}_{2a} = \text{sen } a \cdot \cos a + \text{sen } a \cdot \cos a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen } 2a = 2 \cdot \text{sen } a \cdot \cos a$$

$$\cos (a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b \Rightarrow \cos \underbrace{(a + a)}_{2a} = \cos a \cdot \cos a - \text{sen } a \cdot \text{sen } a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$$

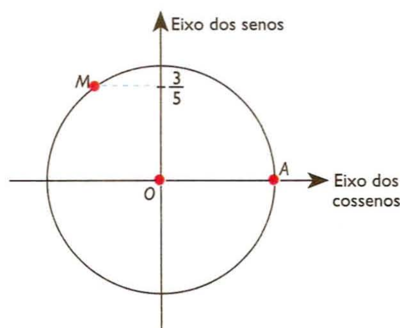
$$\text{tg } (a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b} \Rightarrow \text{tg } \underbrace{(a + a)}_{2a} = \frac{\text{tg } a + \text{tg } a}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } a} \Rightarrow \text{tg } 2a = \frac{2 \text{ tg } a}{1 - \text{tg}^2 a}$$

Resumindo, guarde bem estas fórmulas:

$$\text{sen } 2a = 2 \cdot \text{sen } a \cdot \cos a$$
$$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$$
$$\text{tg } 2a = \frac{2 \text{ tg } a}{1 - \text{tg}^2 a} \quad \left(a \neq \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$$

Exemplo 1

Na figura vemos um ciclo trigonométrico. Nele é mostrado um arco $\widehat{AM}$ que mede a.



Determinar:

a) sen $2a$.
b) cos $2a$.
c) em que quadrante está o arco que mede $2a$.
d) sen $3a$.

Solução

a) sen $2a$.

Sabemos que $\text{sen } 2a = 2 \cdot \text{sen } a \cdot \cos a$.

Sabemos ainda que $\text{sen } a = \frac{3}{5}$, com a do 2º quadrante.

Achando cos a, encontramos:

$$\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \cos^2 a = 1 - \frac{9}{25} \Rightarrow \cos^2 a = \frac{16}{25}$$

Como a é do 2º quadrante, seu cosseno é negativo. Então: $\cos a = -\frac{4}{5}$

Dessa forma:

$$\text{sen } 2a = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \Rightarrow \text{sen } 2a = -\frac{24}{25}$$

b) cos $2a$.

Como $\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$, temos:

$$\cos 2a = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} \Rightarrow \cos 2a = \frac{7}{25}$$

c) em que quadrante está o arco que mede $2a$.

Como $\text{sen } 2a < 0$ e $\cos 2a > 0$, concluímos que o arco que mede $2a$ tem extremidade no 4º quadrante.

d) sen $3a$.

Como $\text{sen } 3a = \text{sen } (2a + a)$, temos:

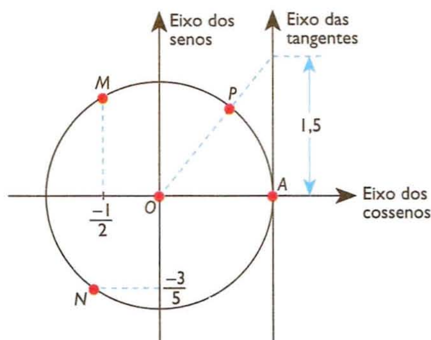
$$\text{sen } 3a = \text{sen } 2a \cdot \cos a + \text{sen } a \cdot \cos 2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen } 3a = \left(-\frac{24}{25}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{3}{5}\right) \cdot \left(\frac{7}{25}\right) \Rightarrow \text{sen } 3a = \frac{117}{125}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

11. Veja a figura. Ela mostra um ciclo no qual aparecem:

- um arco $\widehat{AM}$ que mede *a*.
- um arco $\widehat{AN}$ que mede *b*.
- um arco $\widehat{AP}$ que mede *c*.



Determine:

a) sen $2a$
b) cos $2b$
c) sen $3b$
d) cos $3a$
e) tg $2c$

12. Determine:

a) sen $2x$, sabendo que sen $x = \frac{2}{5}$ e x é do 1º quadrante.

b) cos $2x$, sendo sen $x = -\frac{1}{4}$ com x do 3º quadrante.

c) tg $2x$, sabendo que tg $x = 5$.

d) tg $2a$, sendo sen $a = \frac{3}{5}$ com $0 < a < \frac{\pi}{2}$.

13. Sabendo que cos $x = -\frac{4}{5}$, com x do 3º quadrante, determine o quadrante do arco que mede:

a) $2x$
b) $3x$

Exemplo 2

Dada a função definida por $f(x) = 6 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x$, determinar:

a) o período
b) a imagem

Solução

a) determinação do período

Temos que:

$$f(x) = 6 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x \Rightarrow f(x) = 3 \cdot \overbrace{(2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x)}^{\text{sen } 2x} \Rightarrow f(x) = 3 \cdot \text{sen }(2x)$$

Dessa forma o período da função será: $\frac{2\pi}{|k|} = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

O período é π rad.

b) determinação da imagem

Temos que: $f(x) = 3 \cdot \text{sen }(2x)$.

Como o menor valor que sen $(2x)$ pode assumir é -1, então o menor valor que $f(x)$ assume é $3 \cdot (-1) = -3$.

Como o maior valor que sen $(2x)$ pode assumir é 1, então o maior valor que $f(x)$ assume é $3 \cdot 1 = 3$.

Dessa forma concluímos que o conjunto imagem é:

$$\text{Im }(f) = [-3, 3]$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

14. Dar o período e a imagem de cada uma das funções:

a) $y = 10 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x$

b) $y = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

c) $y = \dfrac{(2 \cdot \text{tg } x)}{(1 - \text{tg}^2 x)}$

d) $y = 2 \cdot \text{sen}\left(\dfrac{x}{4}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{x}{4}\right)$

4. O arco metade

Nosso objetivo agora é achar os valores das funções trigonométricas do arco que mede $\frac{a}{2}$, conhecendo os valores das funções trigonométricas do arco que mede a.

Suponhamos que se conheça cos a. A partir desse valor, determinaremos os valores de sen $\frac{a}{2}$, cos $\frac{a}{2}$ e tg $\frac{a}{2}$. Para isso, faremos uso da seguinte fórmula:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$$

Ajustando essa fórmula ao nosso problema, fazendo $2x = a$, temos:

$$\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \text{sen}^2 \frac{a}{2} \quad \text{(I)}$$

Como $\cos^2 \frac{a}{2} = 1 - \text{sen}^2 \frac{a}{2}$, temos:

$$\cos a = 1 - \text{sen}^2 \frac{a}{2} - \text{sen}^2 \frac{a}{2} \Rightarrow 2\,\text{sen}^2 \frac{a}{2} = 1 - \cos a \Rightarrow \text{sen}^2 \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{sen } \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}}$$

Se em (I) substituirmos $\text{sen}^2 \frac{a}{2}$ por $1 - \cos^2 \frac{a}{2}$, obteremos:

$$\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \left(1 - \cos^2 \frac{a}{2}\right) \Rightarrow \cos a = 2\cos^2 \frac{a}{2} - 1 \Rightarrow \cos^2 \frac{a}{2} = \frac{1 + \cos a}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}}$$

Como $\text{tg } \frac{a}{2} = \dfrac{\text{sen } \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2}}$ $\left(\text{com } \frac{a}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\right)$, temos:

$$\boxed{\text{tg } \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}}$$

Exemplo 1

Sabendo que $\cos a = \dfrac{1}{2}$, com a do 1º quadrante, determinar:

a) $\text{sen } \dfrac{a}{2}$ b) $\cos \dfrac{a}{2}$ c) $\text{tg } \dfrac{a}{2}$

Solução

Já sabemos os resultados, pois, sendo a do 1º quadrante, com $\cos a = \dfrac{1}{2}$, teremos $a = 60°$, portanto $\dfrac{a}{2} = 30°$.

Dessa forma, as respostas serão:

$$\text{sen } \frac{a}{2} = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{a}{2} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } \frac{a}{2} = \text{tg } 30° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

No entanto, iremos calcular novamente esses valores, fazendo uso das fórmulas vistas.

a) $\text{sen } \dfrac{a}{2}$

Temos que $\dfrac{a}{2}$ é do 1º quadrante, portanto seu seno será positivo. Assim:

$$\text{sen } \frac{a}{2} = +\sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

b) $\cos \dfrac{a}{2}$

Como $\dfrac{a}{2}$ está no 1º quadrante, seu cosseno também é positivo. Assim:

$$\cos \frac{a}{2} = +\sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

c) $\text{tg } \dfrac{a}{2}$

Também o valor da $\text{tg } \dfrac{a}{2}$ é positivo, pois $\dfrac{a}{2}$ é do 1º quadrante. Assim:

$$\text{tg } \frac{a}{2} = +\sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Exemplo 2

Sabendo que $\cos a = -\dfrac{4}{5}$, com a do 3º quadrante, determinar:

a) $\text{sen } \dfrac{a}{2}$

b) $\cos \dfrac{a}{2}$

Solução

Como $180° < a < 270°$, então $90° < \dfrac{a}{2} < 135°$, portanto o arco que mede $\dfrac{a}{2}$ terá extremidade no 2º quadrante.

a) $\text{sen } \dfrac{a}{2}$

Temos:

$$\text{sen } \frac{a}{2} = +\sqrt{\frac{1 - \left(\frac{-4}{5}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3 \cdot \sqrt{10}}{10}$$

b) $\cos \dfrac{a}{2}$

Temos:

$$\cos \frac{a}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \left(\frac{-4}{5}\right)}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

Observação: se, no lugar de conhecermos $\cos a$, conhecermos $\text{sen } a$ ou $\text{tg } a$, podemos, a partir desses elementos conhecidos, determinar $\cos a$, e aplicar as mesmas fórmulas utilizadas acima.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

15. A figura mostra num ciclo trigonométrico alguns arcos, dentre os quais:

- um arco $\widehat{AM}$ que mede a.
- um arco $\widehat{AN}$ que mede b.

Determine:

a) $\text{sen } \dfrac{b}{2}$

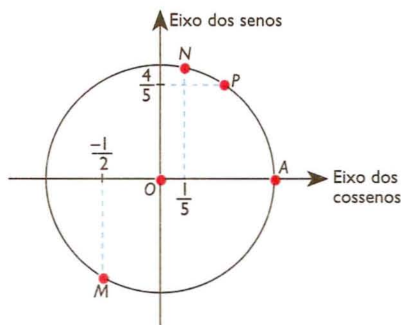
b) $\cos \dfrac{b}{2}$

c) $\text{tg } \dfrac{b}{2}$

d) $\text{sen } \dfrac{a}{2}$

e) $\cos \dfrac{a}{2}$

f) $\text{tg } \dfrac{a}{2}$



16. Na figura do exercício anterior, o arco $\widehat{AP}$ mede c. Determine:

a) sen $\frac{c}{2}$

b) cos $\frac{c}{2}$

(Sugestão: a figura mostra sen a. Ache cos a, e depois aplique as fórmulas.)

17. Calcule o valor de sen $\frac{a}{2}$ e cos $\frac{a}{2}$, nos casos seguintes:

a) $a = 30°$

b) $a = 45°$

c) $2 \cdot \text{sen } a = -1$, e $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$

18. Sabendo que tg $a = \frac{3}{2}$, com a do 1º quadrante, determine cos $\frac{a}{2}$.

(Sugestão: a partir do que se conhece, determine cos a, e depois aplique a fórmula correspondente ao cos $\frac{a}{2}$.)

5. Funções trigonométricas de um arco que mede *a*, em função da tangente do arco metade

Agora conhecemos tg $\frac{a}{2}$, e queremos achar os valores das funções trigonométricas de um arco que mede a. Veremos apenas como calcular tg a, cos a e sen a.

a) tg a = ?

Temos $\text{tg } 2a = \dfrac{2 \text{ tg } a}{1 - \text{tg}^2 a}$. Então:

$$\text{tg } a = \frac{2 \text{ tg } \frac{a}{2}}{1 - \text{tg}^2 \frac{a}{2}}$$

$$a \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{a}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) cos a = ?

Temos que $\text{tg } \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}$. Então, elevando os dois membros ao quadrado, obtemos:

$$\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a} = \text{tg}^2 \frac{a}{2} \Rightarrow 1 - \cos a = \text{tg}^2 \frac{a}{2} + \cos a \cdot \text{tg}^2 \frac{a}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos a\left(1 + \text{tg}^2 \frac{a}{2}\right) = 1 - \text{tg}^2 \frac{a}{2}.$$ Portanto:

$$\cos a = \frac{1 - \text{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 + \text{tg}^2 \frac{a}{2}}$$

c) sen a = ?

Como $\frac{\text{sen } a}{\cos a} = \text{tg } a \Rightarrow \text{sen } a = \cos a \cdot \text{tg } a$. Substituindo pelos valores já encontrados, temos:

$$\text{sen } a = \frac{\left(1 - \text{tg}^2 \frac{a}{2}\right)}{1 + \text{tg}^2 \frac{a}{2}} \cdot \frac{2 \cdot \text{tg } \frac{a}{2}}{\left(1 - \text{tg}^2 \frac{a}{2}\right)}$$. Então:

$$\boxed{\text{sen } a = \frac{2 \cdot \text{tg } \frac{a}{2}}{1 + \text{tg}^2 \frac{a}{2}}}$$

Exemplo

Sabendo que $\text{tg } \frac{a}{2} = -4$, determinar, utilizando as fórmulas vistas, os valores de:

a) sen a b) cos a c) tg a

Solução

a) sen a = ?

Temos:

$$\text{sen } a = \frac{2 \cdot \text{tg } \frac{a}{2}}{1 + \text{tg}^2 \frac{a}{2}} = \frac{2 \cdot (-4)}{1 + 16} = \frac{-8}{17}$$

b) cos a = ?

Temos:

$$\cos a = \frac{1 - \text{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 + \text{tg}^2 \frac{a}{2}} = \frac{1 - (-4)^2}{1 + (-4)^2} = \frac{-15}{17}$$

c) tg a = ?

Temos:

$$\text{tg } a = \frac{2 \cdot \text{tg } \frac{a}{2}}{1 - \text{tg}^2 \frac{a}{2}} = \frac{2 \cdot (-4)}{1 - (-4)^2} = \frac{-8}{-15} = \frac{8}{15}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

19. Sendo $\text{tg } \frac{x}{2} = 2$, calcule:

a) sen a b) cos a c) tg a d) cotg a

20. Conhecendo tg $\frac{a}{2} = 2 - \sqrt{3}$, determine:

a) sen $2a$

b) cos $2a$

(Sugestão: ache antes sen a e cos a.)

6. Transformação de soma em produto

Vamos resumir novamente as fórmulas já estudadas na adição de arcos:

$\text{sen}\,(a + b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b + \text{sen}\,b \cdot \cos a$	(I)
$\text{sen}\,(a - b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b - \text{sen}\,b \cdot \cos a$	(II)
$\cos\,(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$	(III)
$\cos\,(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$	(IV)

Combinando de maneira conveniente essas fórmulas, obtemos algumas importantes relações que nos permitirão transformar alguns tipos de somas em produtos. Isso será muito usado ao resolvermos equações, futuramente.

Façamos inicialmente $a + b = p$ e $a - b = q$. Desse modo, temos:

$$\begin{cases} a + b = p \\ a - b = q \end{cases} \; +$$

$$2a = p + q \Rightarrow a = \frac{p + q}{2}$$

Portanto: $b = p - \frac{p + q}{2} \Rightarrow b = \frac{2p - p - q}{2} \Rightarrow b = \frac{p - q}{2}$

Somando (I) e (II), obtemos:

$\text{sen}\,(a + b) + \text{sen}\,(a - b) = 2 \cdot \text{sen}\,a \cdot \cos b$

Subtraindo (II) de (I), obtemos:

$\text{sen}\,(a + b) - \text{sen}\,(a - b) = 2 \cdot \text{sen}\,b \cdot \cos a$

Somando (III) e (IV), obtemos:

$\cos\,(a + b) + \cos\,(a - b) = 2 \cdot \cos a \cdot \cos b$

Subtraindo (IV) de (III), obtemos:

$\cos\,(a + b) - \cos\,(a - b) = -2\,\text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$

Substituindo os valores de a e b, teremos:

$$\text{sen}\,p + \text{sen}\,q = 2 \cdot \text{sen}\,\frac{p + q}{2} \cdot \cos \frac{p - q}{2}$$

$$\text{sen}\,p - \text{sen}\,q = 2 \cdot \text{sen} \cdot \frac{p - q}{2} \cdot \cos \frac{p + q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos \frac{p + q}{2} \cdot \cos \frac{p - q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\,\text{sen}\,\frac{p + q}{2} \cdot \text{sen}\,\frac{p - q}{2}$$

Essas fórmulas são importantes e devem ser memorizadas.

Vejamos alguns exemplos de aplicação.

Exemplo 1

Transformar em produto:

a) $N = \text{sen } 4x + \text{sen } 6x$

b) $N = 1 - \text{sen } 4x$

c) $N = 1 + \cos x$

d) $N = \cos 8x - \cos 2x$

Solução

a) $N = \text{sen } \underbrace{4x}_{p} + \text{sen } \underbrace{6x}_{q}$

Usando a primeira das fórmulas vistas, obtemos:

$$N = 2 \cdot \text{sen } \frac{4x + 6x}{2} \cdot \cos \frac{4x - 6x}{2} \Rightarrow N = 2 \cdot \text{sen } (5x) \cdot \cos (-x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = 2 \cdot \text{sen } 5x \cdot \cos x$$

b) $N = 1 - \text{sen } 4x$

Substituindo 1 por sen $\frac{\pi}{2}$, obtemos: $N = \text{sen } \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{p} - \text{sen } \underbrace{4x}_{q}.$

Usando a segunda fórmula, obtemos:

$$N = 2 \cdot \text{sen} \left(\frac{\frac{\pi}{2} - 4x}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\frac{\pi}{2} + 4x}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = 2 \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right)$$

c) $N = 1 + \cos x$

Substituindo 1 por cos 0, obtemos: $N = \cos \underbrace{0}_{p} + \cos \underbrace{x}_{q}.$

Usando a terceira fórmula, obtemos:

$$N = 2 \cdot \cos \frac{0 + x}{2} \cdot \cos \frac{0 - x}{2} \Rightarrow N = 2 \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \left(-\frac{x}{2} \right)$$

Como $\cos \left(-\frac{x}{2} \right) = \cos \frac{x}{2}$, teremos: $N = 2 \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} \Rightarrow N = 2 \cdot \cos^2 \frac{x}{2}$.

d) $N = \cos \underbrace{8x}_{p} - \cos \underbrace{2x}_{q}$

Usando a quarta fórmula, obtemos:

$$N = -2 \cdot \text{sen } \frac{8x + 2x}{2} \cdot \text{sen } \frac{8x - 2x}{2} \Rightarrow N = -2 \cdot \text{sen } (5x) \cdot \text{sen } (3x)$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

21. Transforme em produto:

a) $y = \text{sen } 10x + \text{sen } 4x$

b) $y = \cos 7x + \cos x$

c) $y = \text{sen } 5x - \text{sen } 2x$

d) $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos x$

22. Escreva N em forma de um produto:

a) $N = 1 + \text{sen } 6x$

b) $N = 1 - \cos 2x$

c) $N = \text{sen } x + \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

d) $N = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Exemplo 2

Transformar N num produto:

a) $N = \text{sen } x - \cos x$

b) $N = \text{sen } 10x + \text{sen } 8x + \text{sen } 6x + \text{sen } 4x$

Solução

a) $N = \text{sen } x - \cos x$

Nesse caso, nenhuma das fórmulas vistas é aplicável. Podemos, entretanto, trocar $\cos x$ por $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, ou trocar $\text{sen } x$ por $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Trocando, por exemplo, $\cos x$ por $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, encontramos:

$$N = \text{sen } x - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Agora existe fórmula para transformação em produto.
Temos:

$$N = 2 \cdot \text{sen } \frac{x - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2} \cdot \cos \frac{x + \left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = 2 \cdot \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \cdot \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Faça novamente esse exercício, substituindo $\text{sen } x$ por $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ e confira o resultado.

b) $N = \underbrace{\text{sen } 10x + \text{sen } 8x}_{} + \overbrace{\text{sen } 6x + \text{sen } 4x}^{}$

Aplicando duas vezes a fórmula da soma de senos, obtemos:

$$N = 2 \text{ sen } \frac{10x + 8x}{2} \cdot \cos \frac{10x - 8x}{2} + 2 \cdot \text{sen } \frac{6x + 4x}{2} \cdot \cos \frac{6x - 4x}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = 2 \cdot \text{sen } 9x \cdot \cos x + 2 \cdot \text{sen } 5x \cdot \cos x$$

Colocando $2 \cdot \cos x$ em evidência, temos:

$$N = 2 \cdot \cos x \cdot \underbrace{(\text{sen } 9x + \text{sen } 5x)}_{}$$

$$N = 2 \cdot \cos x \cdot \left[2 \cdot \text{sen } \frac{9x + 5x}{2} \cdot \cos \frac{9x - 5x}{2}\right]$$

$$N = 2 \cdot \cos x \cdot [2 \cdot \text{sen } 7x \cdot \cos 2x]$$

$$N = 4 \cos x \cdot \cos 2x \cdot \text{sen } 7x$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

23. Escreva y em forma de produto nos casos seguintes:

a) $y = \cos 3x + \text{sen } x$
b) $y = \text{sen } 5x - \cos x$
c) $y = \text{sen } 10x + \text{sen } 6x + \text{sen } 8x + \text{sen } 4x$
d) $y = \cos 3x + \cos x - \cos 7x - \cos 5x$

Exemplo 3

Transformar N numa soma ou diferença de funções trigonométricas, sabendo que $N = 2 \cdot \text{sen } 6x \cdot \cos x$.

Solução

Esse problema faz o inverso dos vistos anteriormente.
Procuraremos identificar a expressão de N com alguma das fórmulas aprendidas.
Assim sendo, identificamos:

$N = 2 \cdot \text{sen } 6x \cdot \cos x$ com a fórmula $\text{sen } p + \text{sen } q = 2 \cdot \text{sen } \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$

Devemos ter:

$$\frac{p+q}{2} = 6x \quad \text{e} \quad \frac{p-q}{2} = x$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} p + q = 12x \\ p - q = 2x \end{cases}$$

encontramos: $p = 7x$ e $q = 5x$.
Então: $N = \text{sen } 7x + \text{sen } 5x$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

24. Expressar N como uma soma ou uma diferença de funções trigonométricas:

a) $N = 2 \cdot \cos 8x \cdot \cos 4x$
b) $N = -2 \cdot \text{sen } 4x \cdot \text{sen } 2x$
c) $N = 2 \cdot \text{sen } 2x \cdot \cos 8x$

RELEMBRANDO CONCEITOS

FÓRMULAS IMPORTANTES (Para os arcos onde as funções estão definidas)

Arco soma

$\text{sen }(a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$
$\cos (a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$

$$\text{tg }(a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$$

Arco diferença

$\text{sen }(a - b) = \text{sen } a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos a$
$\cos (a - b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen } a \cdot \text{sen } b$

$$\text{tg }(a - b) = \frac{\text{tg } a - \text{tg } b}{1 + \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$$

Arco duplo

$\text{sen } 2a = 2 \cdot \text{sen } a \cdot \cos a$
$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$

$$\text{tg } 2a = \frac{2 \cdot \text{tg } a}{1 - \text{tg}^2 a}$$

Outras fórmulas importantes

Dado	Achar
$\cos a$	$\text{sen } \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}$ $\cos \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}$ $\text{tg } \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}$
$\text{tg}\left(\frac{a}{2}\right)$	$\text{sen } a = \frac{2 \cdot \text{tg } \frac{a}{2}}{1 + \text{tg}^2 \frac{a}{2}}$ $\cos a = \frac{1 - \text{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 + \text{tg}^2 \frac{a}{2}}$ $\text{tg } a = \frac{2 \cdot \text{tg } \frac{a}{2}}{1 - \text{tg}^2 \frac{a}{2}}$

Transformação de soma em produto

$$\text{sen } p + \text{sen } q = 2 \cdot \text{sen } \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\text{sen } p - \text{sen } q = 2 \cdot \text{sen } \frac{p-q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \cdot \text{sen } \frac{p+q}{2} \cdot \text{sen } \frac{p-q}{2}$$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

25. Sabendo que sen $x = \frac{3}{5}$ e cos $y = \frac{4}{5}$, com x do segundo e y do 4º quadrante, determine tg $(x + y)$.

26. Determine o valor máximo e o valor mínimo da função: $y = 5 \text{ sen } (3x) \cos (3x)$, para $0 < x < \pi$.

27. Sabendo que $y = 2 \text{ arc cos } \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, determine tg y.

28. Simplifique: $y = \frac{\text{sen } (10x) + \text{sen } (2x)}{\cos (10x) - \cos (2x)} + \frac{\cos^2 (2x) - \text{sen}^2 (2x)}{2 \text{ sen } (2x) \cdot \cos (2x)}$.

29. Calcule o valor de:

a) $(\text{sen } 15° + \cos 15°)^2$

b) $(\text{sen } 15° - \cos 15°)^2$

30. (Fuvest-SP) Calcule:

a) sen 15°

b) a área do polígono regular de 24 lados inscrito no círculo de raio 1.

31. (Faap-SP) Qual o valor numérico da expressão $5 \cos (2x) + 10 \text{ sen}^2 x$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$?

32. (UFCE) Dado $y = \cos \left[2 \text{ arc sen } \left(\frac{3}{5}\right)\right]$, calcule o valor de $25y$.

33. (U. F. Uberlândia-MG) Sendo $y = \text{tg } \left[\text{arc sen } \left(-\frac{3}{5}\right) - \text{arc cos } \left(\frac{5}{13}\right)\right]$, determine o valor de y.

34. Calcule: $\text{tg } \left[2 \text{ arc tg } \left(\frac{1}{3}\right) + \text{arc tg } \left(-\frac{1}{7}\right)\right]$.

TESTES

35. (FMU/FIAM-SP) O cosseno de 105° vale:

a) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

b) $\frac{\sqrt{4}}{4}$

c) $-\frac{\sqrt{4}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{4}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

36. (F. Ibero-Americana-SP) Dado sen $x = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, calcule cos $2x$.

a) $\cos 2x = \sqrt{\frac{3}{2}}$

b) $\cos 2x = \sqrt{\frac{6}{2}}$

c) $\cos 2x = \sqrt{\frac{3}{4}}$

d) $\cos 2x = \sqrt{\frac{2}{2}}$

e) $\cos 2x = \sqrt{\frac{4}{4}}$

37. (U. E. Ponta Grossa-PR) Sendo $\text{cotg } \left(\frac{a}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, então é correto afirmar que:

a) sen $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) sen $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) sen $a = \frac{1}{2}$

d) sen $a = -\frac{1}{2}$

e) sen $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

38. (UFCE) Se $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$, então $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, e o valor de $\dfrac{20\sqrt{5}}{\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} + \frac{1}{\operatorname{tg}\theta}}$ é:

a) 25 b) 30 c) 35 d) 40

39. (FURRN) Se $\sec x = \frac{-13}{5}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, o valor de sen $2x$ é:

a) $\frac{12}{13}$ b) $\frac{125}{144}$ c) $\frac{120}{169}$ d) $\frac{-12}{13}$ e) $\frac{-120}{169}$

40. (U. F. Santa Maria-RS) Se $f(x) = \operatorname{sen} x$, então, para todo x real, $f(2x)$ é igual a:

a) $2 \operatorname{sen} 2x$ b) $2 f(x)$ c) $2 \operatorname{sen} x \cos x$ d) $[f(x)]^2$ e) $\cos^2 x$

41. (U. E. Ponta Grossa-PR) Sejam α um arco do 1º quadrante e β um arco do 2º quadrante tais que $\cos \alpha = 0{,}8$ e $\operatorname{sen} \beta = 0{,}6$. O valor de $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ é:

a) 0,00 b) 1,40 c) 0,96 d) 0,48 e) 0,70

42. (U. Uberaba-MG) A expressão $\dfrac{\operatorname{sen}(90° - \alpha) + \cos(-\alpha)}{\operatorname{sen} 2\alpha}$ é idêntica a:

a) $\operatorname{tg} \alpha$ b) $\operatorname{cossec} \alpha$ c) $\sec \alpha$ d) $\cos \alpha$ e) $\operatorname{cotg} \alpha$

43. (FEI-SP) Simplificando $\dfrac{2 \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \operatorname{sen} 2x}$, com $\operatorname{sen} 2x \neq -1$, obtemos:

a) 1 b) 0 c) 2 d) $\cos 2x$ e) $1 - 2 \operatorname{sen} x$

44. (FEI-SP) Transformando a expressão $\dfrac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b}{\cos a + \cos b}$ onde existir, temos:

a) $\operatorname{sen}(a + b)$ b) $\dfrac{1}{\cos(a + b)}$ c) $\operatorname{cotg}\left(\dfrac{a + b}{2}\right)$ d) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{a + b}{2}\right)$ e) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}(a + b)}$

45. (UFSE) A expressão $\operatorname{sen} 2x + \cos 2x + 2 \operatorname{sen}^2 x$ é equivalente a:

a) $2 \operatorname{sen} x (1 + \operatorname{sen} x)$
b) $(1 + \cos x)^2$
c) $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2$
d) $1 - 2 \operatorname{sen} x \cos x$
e) $1 + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

46. (Fuvest-SP) O valor de $(\operatorname{sen} 22°30' + \cos 22°30')^2$ é:

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$ d) 1 e) 2

47. (Mackenzie-SP) Com relação à função definida por $y = \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} 2x}$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, considere as afirmações:

I. O seu período é π.
II. O maior valor que y pode assumir é 2.
III. $y > 0$ se x pertence ao 3º quadrante.

Então são verdadeiras:

a) somente I e III.
b) somente III.
c) somente II e III.
d) somente I.
e) somente I e II.

48. (Unifor-CE) O período da função *f*, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos 2x \cos x - \text{sen } 2x \text{ sen } x$, é:

a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) π d) $\frac{3\pi}{2}$ e) 2π

49. (Fuvest-SP) A tangente do ângulo $2x$ é dada em função da tangente de x pela seguinte fórmula:

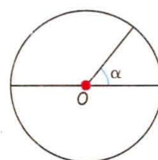
$\text{tg } 2x = \frac{2 \text{ tg } x}{1 - \text{tg}^2 x}$. Calcule um valor aproximado da tangente do ângulo 22°30′.

a) 0,22 b) 0,41 c) 0,50 d) 0,72 e) 1,00

50. (Fuvest-SP) O valor de (tg 10° + cotg 10°) sen 20° é:

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) 2 d) $\frac{5}{2}$ e) 4

51. (Mackenzie-SP) Na figura, a circunferência de centro *O* tem raio 1. Nessas condições, o número real $\text{tg } \frac{\alpha}{2} + \text{cotg } \frac{\alpha}{2}$ é sempre igual a:



a) $\frac{2}{\text{sen } \alpha + \cos \alpha}$

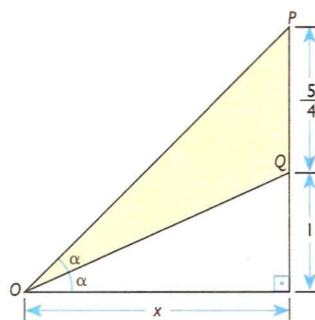
b) $\frac{2}{1 + \text{sen } \alpha}$

c) $\frac{2}{1 + \cos \alpha}$

d) 2 cossec α

e) 2 sec α

52. (Mackenzie-SP) A área do triângulo *OPQ* assinalado na figura é:



a) $\frac{15}{4}$

b) $\frac{15}{8}$

c) 2

d) 3

e) 4

53. (Unifor-CE) Se $0 < \alpha < \pi$ e $\alpha = \text{arc cos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, o valor de tg 2α é:

a) $-\sqrt{3}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\sqrt{3}$

54. (FEI-SP) Se $\text{cotg } x + \text{tg } x = 3$, então sen $2x$ é igual a:

a) $\frac{1}{3}$

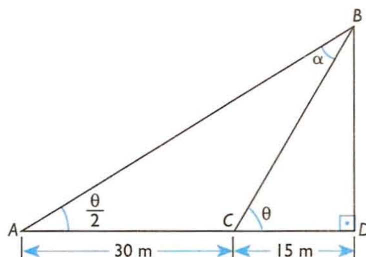
b) $\frac{3}{2}$

c) 3

d) $\frac{2}{3}$

e) n.d.a.

55. (UFPE) Com relação à figura abaixo, indique a alternativa falsa.



a) O comprimento do segmento *BD* é $15\sqrt{3}$ m.

b) O triângulo *ABC* é isósceles.

c) O ângulo θ é igual à soma dos ângulos $\frac{\theta}{2}$ e α.

d) $\text{tg}\ \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

e) A área do triângulo *ABC* é o dobro da área do triângulo *BCD*.

56. (Unisinos-RS) Na figura, *A* e *B* são vistos de *C* sob um ângulo de $\frac{2\pi}{3}$ rad. Se $\overline{CA} = \overline{CB} = 10$ m, $\overline{AB}$ mede, aproximadamente:

a) 14,14 m b) 17,32 m c) 18 m d) 28,66 m e) 30 m

$\text{sen}\ \frac{\pi}{6} = 0{,}5$

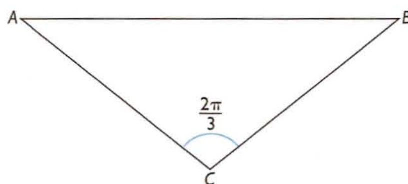
$\cos\ \frac{\pi}{6} = 0{,}866$

$\text{tg}\ \frac{\pi}{6} = 0{,}577$

$\text{sen}\ \frac{\pi}{3} = 0{,}866$

$\cos\ \frac{\pi}{3} = 0{,}5$

$\text{tg}\ \frac{\pi}{3} = 1{,}732$



Capítulo

15 Equações e inequações trigonométricas

1. Introdução

Seu Elias é jardineiro numa cidade do interior. Por sinal, um ótimo jardineiro. Dias atrás, ele recebeu uma incumbência que está lhe trazendo uma bela dor de cabeça. Ele deve construir um canteiro de forma triangular com 80 m² de área, com um lado medindo 20 m e o outro lado, 16 m. Além disso, perguntaram a ele qual seria o ângulo entre esses dois lados.

Como seu Elias nunca estudou trigonometria, ele está em sérias dificuldades para executar tal tarefa. Vamos ajudá-lo?

A figura ilustra o problema. Nela, a base do triângulo foi tomada como sendo o lado a que mede 20 m, e a altura relativa a esse lado foi chamada de h. A área do triângulo é dada por:

$$A = \frac{(a \cdot h)}{2}$$

$$\text{onde } \frac{h}{b} = \text{sen } \alpha \Rightarrow h = b \cdot \text{sen } \alpha$$

Então, a área do triângulo é:

$$A = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen } \alpha}{2} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{2 \cdot A}{a \cdot b} \text{ com } 0° < \alpha < 180°$$

Substituindo a por 20 m, b por 16 m e A por 80 m², obtemos:

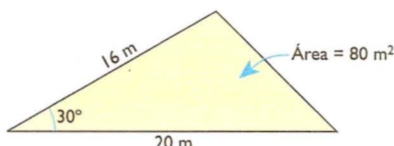
$$\text{sen } \alpha = \frac{1}{2}$$

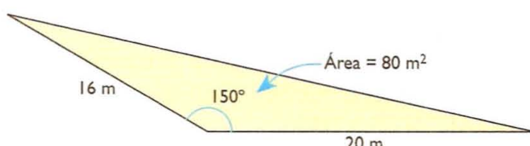
Dessa forma, estamos querendo encontrar um ângulo α que tenha seno $\frac{1}{2}$ e que seja maior que 0° e menor que 180°.

Duas são as soluções possíveis: $\alpha = 30°$ ou $\alpha = 150°$, pois:

$$\text{sen } 30° = \frac{1}{2} \text{ e sen } 150° = \frac{1}{2}$$

As figuras seguintes ilustram essas duas soluções.





Para que pudéssemos resolver o problema do seu Elias utilizamos a equação:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{1}{2} \quad \text{com} \quad 0° < \alpha < 180°.$$

Essa equação é um exemplo de **equação trigonométrica**.

Neste capítulo, veremos os principais tipos de equações trigonométricas.

2. Equações trigonométricas

Chamamos de **equação trigonométrica** qualquer equação na qual a incógnita faz parte do arco (ou ângulo) de alguma função trigonométrica.

Dessa forma, são exemplos de equações trigonométricas:

a) $3 \cdot \text{sen}\ x + 4 \cdot \cos x = 1$

b) $\text{tg}\ x = \text{cotg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

c) $\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

Resolver uma equação desse tipo significa encontrar os valores de x, caso existam, que a tornem uma sentença numérica verdadeira.

Não existe um método único para resolver todas as equações trigonométricas. No entanto, a maioria delas pode ser transformada (utilizando relações já aprendidas) em outras mais simples, mas equivalentes, ou seja, de mesma solução.

Na verdade, uma grande parte delas pode ser solucionada se soubermos resolver as seguintes **equações fundamentais**:

a) $\text{sen}\ x = \text{sen}\ a$

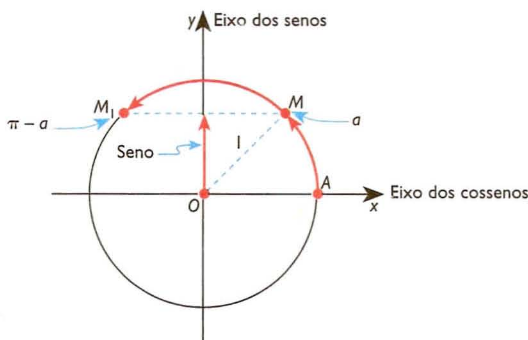
b) $\cos x = \cos a$

c) $\text{tg}\ x = \text{tg}\ a$

Vejamos separadamente cada uma delas.

Equação do tipo sen x = sen a

A figura abaixo mostra um ciclo trigonométrico, com um arco $\widehat{AM}$ cuja medida é a.



Note que **todos os arcos** de extremidade em M possuem o mesmo seno do arco a. Também possuem o mesmo seno de a **todos os arcos** de extremidade em M_1, onde M_1 é simétrico de M com relação ao eixo dos senos.

Dessa forma, concluímos:

$$\text{sen } x = \text{sen } a \iff \begin{cases} x = a + k \cdot 2\pi \\ \quad\text{ou} \\ x = \pi - a + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Vejamos alguns exemplos de resolução de equações que recaem nesse tipo.

Exemplo 1

Resolver as equações:

a) $\text{sen } x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right)$ b) $\text{sen } x = 0{,}5$ c) $\text{sen } x = -1$

Solução

a) $\text{sen } x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Então:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k \cdot 2\pi, \text{ ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{8} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Portanto:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k \cdot 2\pi, \text{ ou} \\ x = \frac{7\pi}{8} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

O conjunto solução será:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{8} + k \cdot 2\pi, \text{ ou } x = \frac{7\pi}{8} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

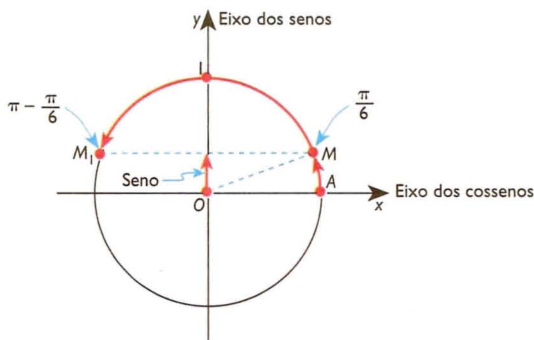
b) $\text{sen } x = 0{,}5$

Uma solução é $x = \frac{\pi}{6}$ rad,

pois $\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0{,}5$.

Então:

$\text{sen } x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$



Observe na figura que todos os arcos com extremidade em M ou em M_1 são soluções da equação dada.

Dessa forma, o conjunto solução é:

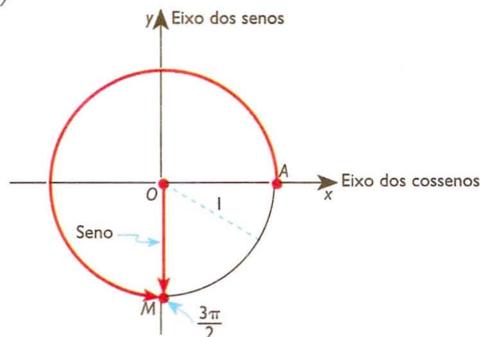
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

c) $\text{sen } x = -1$

Uma solução é $x = \dfrac{3\pi}{2}$ rad, pois $\text{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -1$.

Então:

$$\text{sen } x = \underbrace{\text{sen } \frac{3\pi}{2}}_{-1}$$



Observe na figura que somente os arcos de extremidade em M são soluções.

O conjunto solução é, portanto:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Resolva as equações abaixo:

a) $\text{sen } x = \text{sen}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$

b) $\text{sen } x - \text{sen}\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = 0$

c) $\text{sen } x = 0$

d) $\text{sen } x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

e) $2 \cdot \text{sen } x = \sqrt{2}$

f) $\text{sen } x - 1 = 0$

Exemplo 2

Resolver as equações:

a) $2 \cdot \text{sen}(2x) + 1 = 0$

b) $2 \cdot \text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}$

c) $2 \cdot \text{sen}^2 x + 5 \cdot \text{sen } x = 3$, com $0 < x < 2\pi$

Solução

a) $2 \cdot \text{sen}(2x) + 1 = 0$

Temos:

$$2 \cdot \text{sen}(2x) = -1 \Rightarrow \text{sen}(2x) = -\frac{1}{2}$$

Uma solução é $2x = \dfrac{7\pi}{6}$ rad, pois $\text{sen}\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

Então, $\text{sen}(2x) = \text{sen}\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$.

Portanto, para o arco $2x$, temos:

$$2x = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad \text{ou} \quad 2x = \pi - \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

O conjunto solução é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{-\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) $2 \cdot \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}$

Temos: $2\ \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2} \Rightarrow \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Como $\text{sen}\ \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, temos: $\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \text{sen}\ \frac{\pi}{4}$.

Desse modo, concluímos:

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{13\pi}{12} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

O conjunto solução será:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{12} + k \cdot 2\pi, \text{ ou } x = \frac{13\pi}{12} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

c) $2\ \text{sen}^2 x + 5\ \text{sen}\ x = 3$, com $0 < x < 2\pi$

Vamos fazer a seguinte mudança de variável:

(I) $y = \text{sen}\ x$ com $-1 \leq y \leq 1$ (II)

Assim, temos:

$2y^2 + 5y - 3 = 0$ (equação do 2º grau em y)

$\Delta = (+5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 + 24 = 49 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 7$

Então: $y = \frac{-5 \pm 7}{2 \cdot 2} \Rightarrow y = \frac{-5 \pm 7}{4}$ $\begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ y = -3 \text{ (Esse valor não serve; veja (II).)} \end{cases}$

O único valor possível de y é $\frac{1}{2}$; substituindo em (I) temos: $\text{sen}\ x = \frac{1}{2}$.

Assim: $\underbrace{x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi}_{\text{(III)}}$ ou $\underbrace{x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi}_{\text{(IV)}}$.

Como $0 < x < 2\pi$, faremos k variar até que isso seja conveniente.

Veja:

Para $k < 0$, tanto a condição (III) como a condição (IV) fornecerão valores negativos para x, o que não convém ao problema.

Para $k = 0$, a condição (III) fornece $x = \frac{\pi}{6}$.

Para $k = 0$, a condição (IV) fornece $x = \frac{5\pi}{6}$.

Para $k > 0$, tanto a condição (III) como a condição (IV) fornecerão valores de x maiores que 2π rad, o que não convém ao problema.

Portanto, o conjunto solução é:

$$S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

2. Resolver as equações:

a) $\text{sen}\,(3x) = \text{sen}\left(\frac{5\pi}{8}\right)$

b) $\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

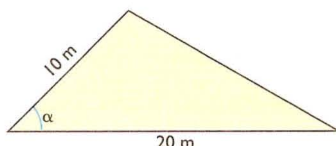
c) $\text{sen}^2 x - 7 \cdot \text{sen}\, x = -6$

d) $\text{sen}\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) - \text{sen}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$

e) $2 \cdot \text{sen}^2 x + 7 \cdot \text{sen}\, x - 4 = 0$, para $0 < x < \pi$

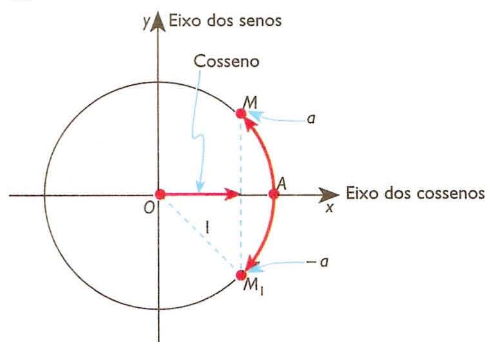
f) $\text{sen}^2 x - 1 = 0$, para $0 \leq x \leq \pi$

3. O triângulo mostrado na figura tem $50\sqrt{3}\ \text{m}^2$ de área. Determine a medida do ângulo α.



Equação do tipo cos x = cos a

A figura mostra um ciclo trigonométrico com um arco $\widehat{AM}$ que mede a. Note que **todos os arcos** de extremidade em M possuem o mesmo cosseno do arco de medida a. Também possuem o mesmo cosseno de a **todos os arcos** de extremidade em M_1, onde M_1 é simétrico de M com relação ao eixo dos cossenos.



Assim, concluímos:

$$\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = \pm a + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Exemplo

Resolver:

a) $\cos x = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

b) $4 \cdot \cos^2 x - 12 \cdot \cos x + 5 = 0$

c) $2 \cdot \cos(5x) = 1$ para $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Solução

a) $\cos x = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

Devemos ter:

$$x = \pm\frac{3\pi}{8} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

O conjunto solução é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{3\pi}{8} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) $4\cos^2 x - 12\cos x + 5 = 0$

Fazendo $y = \cos x$, com $\overbrace{-1 \leqslant y \leqslant 1}^{\text{(I)}}$, temos a equação do 2º grau $4y^2 - 12y + 5 = 0$.

$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 \Rightarrow \Delta = 144 - 80 \Rightarrow \Delta = 64 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 8$

Então: $y = \frac{-(-12) \pm 8}{2 \cdot 4} = \frac{12 \pm 8}{8} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{20}{8} & \text{(Esse valor não serve; veja (I).)} \\ \text{ou} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

O único valor possível de y é $\frac{1}{2}$. Portanto: $\cos x = \frac{1}{2}$.

Como $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, temos que $\cos x = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{\frac{1}{2}}$.

O conjunto solução é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

c) $2 \cdot \cos(5x) = 1$, para $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Temos:

$$\cos(5x) = \frac{1}{2}$$

Uma solução é $5x = \frac{\pi}{3}$ rad, pois $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

Então: $\cos(5x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Dessa forma, devemos ter: $5x = \pm \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, ou seja:

$$\underbrace{x = \frac{\pi}{15} + k \cdot \frac{2\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}}_{\text{(I)}} \text{ ou } \underbrace{x = -\frac{\pi}{15} + k \cdot \frac{2\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}}_{\text{(II)}}$$

Como $0 < x < \frac{\pi}{2}$, faremos k variar até que seja conveniente. Assim:

Para $k < 0$, nem a condição (I) nem a condição (II) fornecem valores para x entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ rad.

Para $k = 0$, a condição (I) fornece: $x = \frac{\pi}{15}$ (serve).

Para $k = 0$, a condição (II) fornece valor negativo para x (não serve).

Para $k = 1$, a condição (I) fornece: $x = \frac{7\pi}{15}$ (serve).

Para $k = 1$, a condição (II) fornece: $x = \frac{\pi}{3}$ (serve).

Para $k \geqslant 2$, nem a condição (I) nem a condição (II) fornecem valores entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ rad.

O conjunto solução é:

$$S = \left\{\frac{\pi}{15}, \frac{7\pi}{15}, \frac{\pi}{3}\right\}$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

4. Resolva as equações seguintes:

a) $\cos(5x) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

b) $1 + 2 \cdot \cos(3x) = 0$

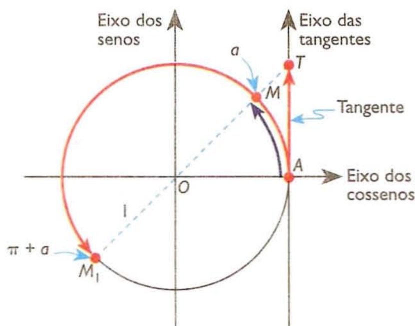
c) $\cos^2 x = \cos x$

d) $\cos(2x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, para $0 < x < \pi$

e) $2 \cdot \cos^2 x + 11 \cos x - 6 = 0$, para $0 < x < \pi$

Equação do tipo tg x = tg a

A figura mostra um ciclo trigonométrico com um arco $\widehat{AM}$ que mede a. Note que **todos os arcos** de extremidade em M possuem a mesma tangente do arco de medida a. Também possuem a mesma tangente de a **todos os arcos** de extremidade em M_1, onde M_1 é simétrico de M com relação ao centro do ciclo.



Dessa forma, concluímos que:

$$\text{tg } x = \text{tg } a \iff \begin{cases} x = a + k \cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi + a + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Resumindo, temos:

$$\boxed{\text{tg } x = \text{tg } a \iff x = a + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}}$$

Exemplo
Resolver as equações:

a) $\text{tg } x = \text{tg}\left(\frac{3\pi}{7}\right)$ b) $\text{tg } (3x) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right)$ para $0 < x < \frac{\pi}{2}$ c) $\text{tg } (2x) = \frac{-\sqrt{3}}{3}$

Solução

a) $\text{tg } x = \text{tg}\left(\frac{3\pi}{7}\right)$

O conjunto solução é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{7} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) $\text{tg } (3x) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right)$ para $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Devemos ter:

$$3x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{24} + k \cdot \frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$$

Faremos k variar até que seja conveniente.
Para $k < 0$ obtemos valores negativos para x, o que não convém ao problema.

Para $k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{24}$ (serve).

Para $k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{9\pi}{24} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{8}$ (serve).

Para $k = 2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{24} + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{17\pi}{24}$ (fora do intervalo fornecido).

Nenhum outro valor de k servirá.
Assim sendo, o conjunto solução é:

$$S = \left\{\frac{\pi}{24}, \frac{3\pi}{8}\right\}$$

c) $\text{tg}\,(2x) = \dfrac{-\sqrt{3}}{3}$

Um valor possível para $2x$ é $\dfrac{5\pi}{6}$, pois:

$$\text{tg}\,\frac{5\pi}{6} = \frac{\text{sen}\,\frac{5\pi}{6}}{\cos\frac{5\pi}{6}} = \frac{\text{sen}\,\frac{\pi}{6}}{-\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{-\text{sen}\,\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = -\frac{\frac{1}{\cancel{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

Então, temos: $\text{tg}\,(2x) = \underbrace{\text{tg}\left(\frac{5\pi}{6}\right)}_{\frac{-\sqrt{3}}{3}}$. Portanto: $2x = \dfrac{5\pi}{6} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

O conjunto solução é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, x = \frac{5\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

5. Resolva as equações:

a) $\text{tg}\,(2x) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

b) $\text{tg}\,(5x) = -1$ para $0 < x < \frac{\pi}{2}$

c) $3 \cdot \text{tg}\,x = \sqrt{3}$

d) $\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \text{tg}\left(\frac{\pi}{5}\right) = 0$

e) $\text{tg}\,(4x) = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

f) $\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = \text{tg}\,(2x)$

Outros tipos de equações

Vejamos agora outros tipos de equações trigonométricas.

Exemplo

Resolver as equações:

a) $\text{sen}\,(7x) + \text{sen}\,(4x) = 0$

b) $\text{sen}\,x + \cos 4x = 0$

Solução

a) $\text{sen}\,(7x) + \text{sen}\,(4x) = 0$

Observe que é possível transformar o 1º membro em um produto; além disso, o 2º membro é zero. Assim sendo, lembrando que $\text{sen}\,p + \text{sen}\,q = 2 \cdot \text{sen}\,\dfrac{p+q}{2} \cdot \cos\dfrac{p-q}{2}$, temos:

$$2 \cdot \text{sen}\,\frac{7x + 4x}{2} \cdot \cos\frac{7x - 4x}{2} = 0 \Rightarrow \text{sen}\,\frac{11x}{2} \cdot \cos\frac{3x}{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\,\frac{11x}{2} = 0 \\ \text{ou} \\ \cos\frac{3x}{2} = 0 \end{cases}$$

Para $\text{sen}\,\dfrac{11x}{2} = \underbrace{\text{sen}\,0}_{0}$, temos: $\dfrac{11x}{2} = k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Portanto:

$$11x = k \cdot 2\pi \Rightarrow x = k \cdot \frac{2\pi}{11},\ k \in \mathbb{Z}$$

Para $\cos\dfrac{3x}{2} = \underbrace{\cos\dfrac{\pi}{2}}_{0}$, temos: $\dfrac{3x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Então:

$$3x = \pi + k \cdot 2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$$

O conjunto solução é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = k \cdot \frac{2\pi}{11},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) $\text{sen}\,x + \cos 4x = 0$

Observe que agora aparecem funções diferentes, no entanto, podemos trocar $\text{sen}\,x$ por $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ ou trocar $\cos(4x)$ por $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - 4x\right)$. Fazendo esta última troca, obtemos:

$$\text{sen}\,x + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = 0 \Rightarrow \text{sen}\,x = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}\,x = \text{sen}\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \text{sen}\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\,x$$

$$\text{Então} \begin{cases} 4x - \dfrac{\pi}{2} = x + k \cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ 4x - \dfrac{\pi}{2} = \pi - x + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ 5x = \pi + \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + k \cdot \dfrac{2\pi}{3} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{3\pi}{10} + k \cdot \dfrac{2\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Portanto, o conjunto solução é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{10} + k \cdot \frac{2\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

6. Resolva as equações trigonométricas:

a) $\text{sen}\,(5x) + \text{sen}\,(3x) = 0$

b) $\text{sen}\,(5x) + \cos x = 0$

c) $\text{sen}\,(4x) = -\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

d) $\cos\,(6x) + \cos\,(4x) = 0$

e) $\text{sen}\,(4x) - \text{sen}\,(2x) = 0$

f) $\cos\,(2x) + \text{sen}\,x = 0$

3. Inequações trigonométricas

No início deste capítulo vimos o caso do seu Elias, o jardineiro que estava com problema para atender a uma encomenda, problema esse que nós até o ajudamos a resolver. Vamos rever?

Seu Elias deveria construir um canteiro triangular que tivesse um lado medindo 20 m, outro lado medindo 16 m, e com área de 80 m²; também perguntaram a ele qual o ângulo formado pelos dois lados citados.

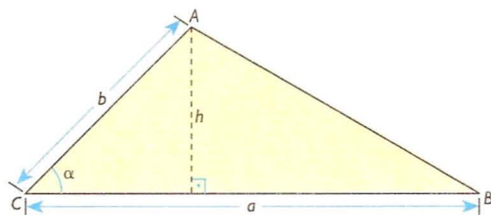
Vamos imaginar agora a seguinte encomenda: um canteiro triangular com um lado medindo 20 m, outro lado medindo 16 m, mas que tivesse **no mínimo 80 m²** de área. Qual deveria ser o ângulo entre os dois lados citados?

A figura mostra um triângulo *ABC*. Nela, a base do triângulo foi tomada como sendo o lado *a* que mede 20 m, e a altura relativa ao lado *a*, medindo *h*.

A área do triângulo é dada por:

$$A_\triangle = \left(\frac{a \cdot h}{2}\right)$$

onde $\frac{h}{b} = \text{sen}\,\alpha \Rightarrow h = b \cdot \text{sen}\,\alpha$.



Assim sendo, a área é dada por:

$$A_\triangle = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}\,\alpha}{2} \text{ com } 0° < \alpha < 180°$$

Para que o triângulo *ABC* seja uma solução do nosso problema, devemos ter:

$$A_\triangle \geqslant 80, \text{ ou seja:}$$

$$\frac{a \cdot b \cdot \text{sen}\,\alpha}{2} \geqslant 80 \Rightarrow a \cdot b \cdot \text{sen}\,\alpha \geqslant 160 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha \geqslant \frac{160}{a \cdot b}$$

Substituindo *a* por 20 e *b* por 16, obtemos:

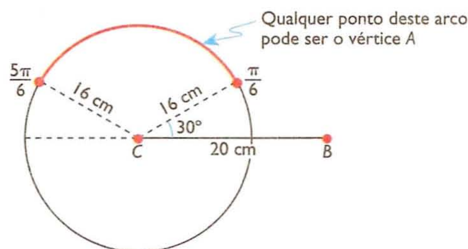
$$\text{sen}\,\alpha \geqslant \frac{160}{20 \cdot 16} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{(I)}$$

Sabemos que $\text{sen}\,30° = \frac{1}{2}$ e que $\text{sen}\,150° = \frac{1}{2}$.

Para qualquer ângulo α entre 30° e 150°, o valor de $\text{sen}\,\alpha$ é maior que $\frac{1}{2}$.

Nessas condições o problema proposto tem infinitas soluções, pois qualquer valor real de α, tal que $30° \leqslant \alpha \leqslant 150°$, torna a sentença (I) verdadeira.

A figura da página seguinte ilustra isso.



A inequação (I), utilizada para resolver nosso problema, é um exemplo de **inequação trigonométrica**, pois a incógnita está associada à função seno, que é uma função trigonométrica.

De um modo geral, chamamos de inequação trigonométrica qualquer inequação onde a incógnita está associada a alguma das funções trigonométricas. São exemplos de inequações trigonométricas:

a) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) > \cos x$

b) $\text{sen}\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) \leqslant \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Do mesmo modo que fizemos para as equações trigonométricas, estudaremos alguns tipos fundamentais de inequações.

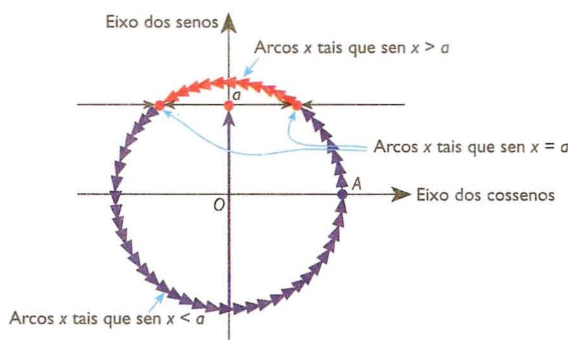
Em geral, as inequações trigonométricas recaem naqueles tipos fundamentais através de transformações convenientes.

Inequações trigonométricas do 1º tipo

São inequações que podem ser colocadas numa das formas seguintes:

$\text{sen } x > a$, ou $\text{sen } x \geqslant a$, ou $\text{sen } x < a$ ou $\text{sen } x \leqslant a$, com $-1 \leqslant a \leqslant 1$

Observe a figura:



Exemplo 1

Resolver as inequações trigonométricas:

a) $\text{sen } x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

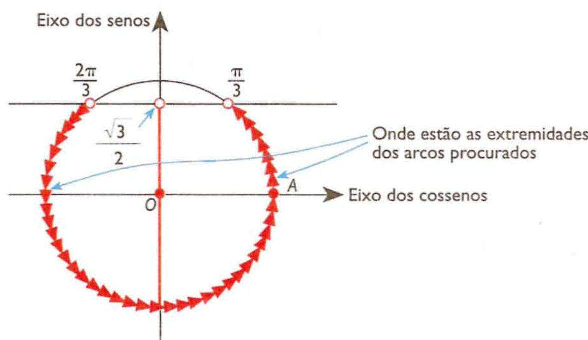
b) $2 \cdot \text{sen } x \geqslant \sqrt{3}$

Solução

a) $\text{sen } x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Percorrendo o ciclo no sentido positivo, a partir de A, notamos que $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{sen}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Veja a figura:



O conjunto solução é obtido percorrendo o ciclo no sentido positivo, a partir de A, até completar uma volta, e em seguida generalizando.
Dessa forma, os arcos x procurados são tais que:

$$0 + k \cdot 2\pi \leqslant x < \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi < x < 2\pi + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

O conjunto solução é, portanto:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid k \cdot 2\pi \leqslant x < \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi < x < 2\pi + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) $2 \cdot \text{sen } x \geqslant \sqrt{3}$

Temos que $2 \cdot \text{sen } x \geqslant \sqrt{3} \Rightarrow \text{sen } x \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Utilizando a mesma figura do item a, temos que o conjunto solução é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exemplo 2
Determinar o conjunto solução da inequação:

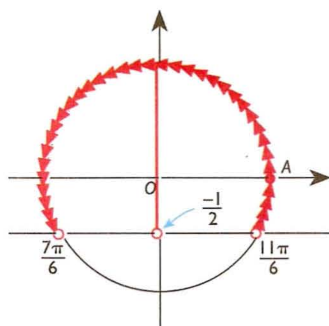
$$|\text{sen } (4x)| < \frac{1}{2}$$

Solução

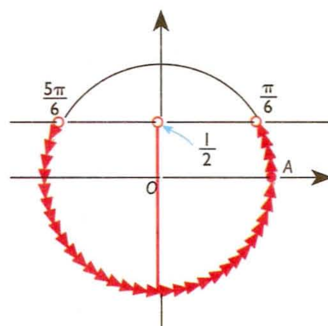
Devemos ter:

$$\overbrace{-\frac{1}{2} < \text{sen}\,(4x)}^{\text{(I)}} \underbrace{< \frac{1}{2}}_{\text{(II)}}$$

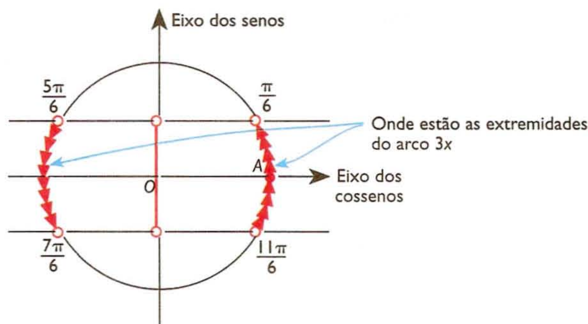
A condição (I) nos dá sen $(4x) > -\dfrac{1}{2}$



A condição (II) nos dá sen $(4x) < \dfrac{1}{2}$



Como (I) e (II) devem ocorrer simultaneamente, fazendo a intersecção, temos:



Percorrendo o ciclo no sentido positivo, a partir de A, e generalizando, temos:

$0 + k \cdot 2\pi \leqslant 4x < \dfrac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ ou $\dfrac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi < 4x < \dfrac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ ou

$\dfrac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi < 4x < 2\pi + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Portanto o conjunto solução é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid k \cdot \frac{\pi}{2} \leqslant x < \frac{\pi}{24} + k \cdot \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{5\pi}{24} + k \cdot \frac{\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{24} + k \cdot \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{11\pi}{24} + k \cdot \frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} + k \cdot \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. Resolva as inequações:

a) $\text{sen } x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\text{sen } x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\text{sen } (5x) \geq 0$ d) $2 \cdot \text{sen } x \geq -1$

8. Resolva:

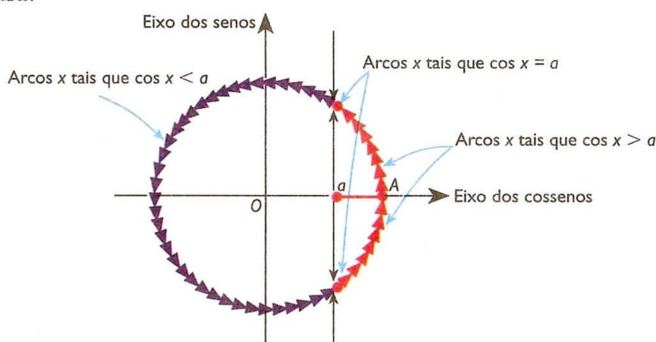
a) $|\text{sen } (3x)| \leq \frac{1}{2}$ b) $|\text{sen } (4x)| \geq \frac{1}{2}$, para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ c) $|2 \cdot \text{sen } (5x)| > \sqrt{3}$

Inequações trigonométricas do 2º tipo

São inequações que podem ser colocadas numa das formas seguintes:

$\cos x > a$, ou $\cos x \geq a$, ou $\cos x < a$, ou $\cos x \leq a$, com $-1 \leq a \leq 1$

Observe a figura:



Exemplo

Resolver as inequações trigonométricas:

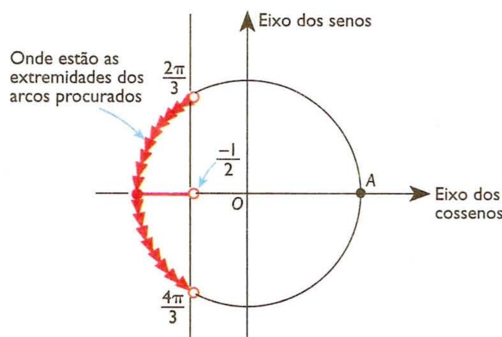
a) $\cos x < \frac{-1}{2}$ b) $\cos (3x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Solução

a) $\cos x < \frac{-1}{2}$

Procedendo como nos exemplos anteriores, temos:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2} \quad \text{e} \quad \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2}$$



O conjunto solução é:

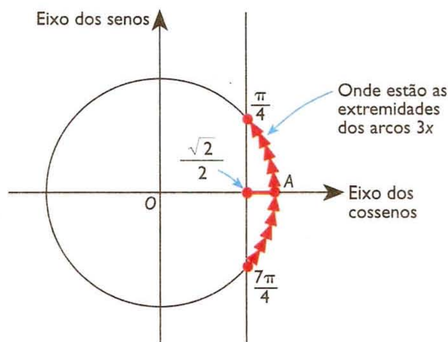
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi < x < \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) $\cos(3x) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$

Procedendo como nos exemplos anteriores, temos:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Veja a figura:



O conjunto solução é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid k \cdot \frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{7\pi}{12} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \leqslant x < \frac{2\pi}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

9. Resolva as inequações:

a) $\cos x \geqslant \frac{-1}{2}$

b) $2 \cdot \cos x < \sqrt{3}$

c) $\cos(5x) > \frac{1}{2}$

d) $\cos(2x) < 0$

10. Resolva:

a) $|\cos x| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $|\cos x| > \frac{1}{2}$

c) $2 \cdot \cos^2 x + \cos x < 0$

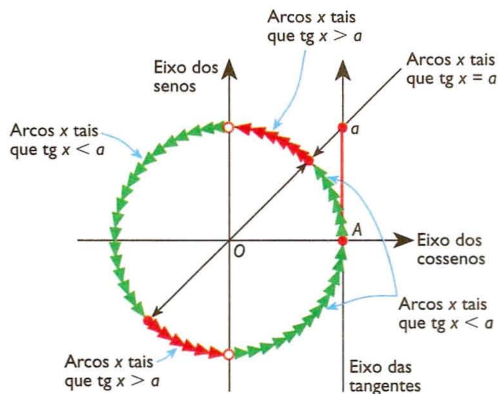
d) $\frac{1}{2} < \cos x < 1$

Inequações trigonométricas do 3º tipo

São inequações que podem ser colocadas numa das formas seguintes:

$\text{tg } x > a$, ou $\text{tg } x \geqslant a$, ou $\text{tg } x < a$, ou $\text{tg } x \leqslant a$, com $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}$

A figura seguinte ilustra isso:



Exemplo

Resolver as inequações trigonométricas:

a) tg $x \geqslant \sqrt{3}$

b) $3 \cdot \text{tg}\,(2x) < \sqrt{3}$

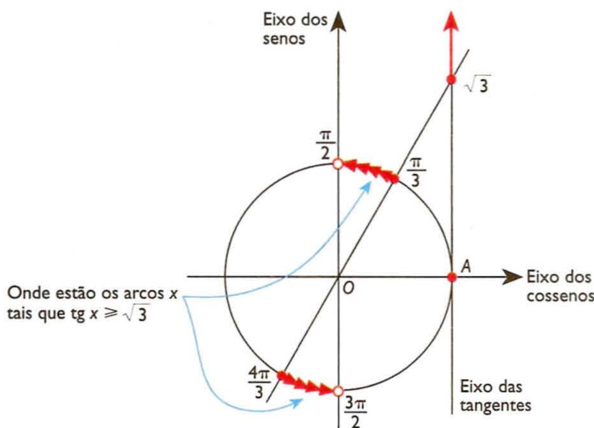
Solução

a) tg $x \geqslant \sqrt{3}$

Percorrendo o ciclo no sentido positivo, a partir de A, temos:

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \quad \text{e} \quad \text{tg}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

Veja a figura:



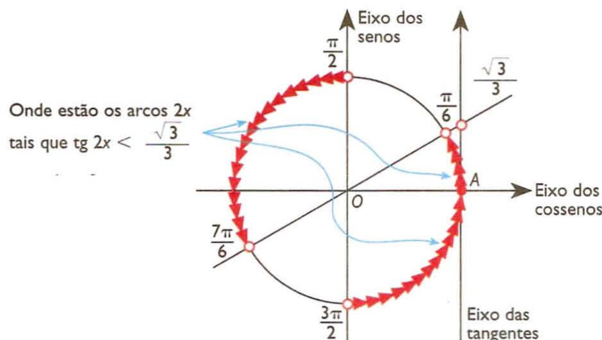
O conjunto solução é, portanto:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \text{ ou } \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi \leqslant x < \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) $3 \cdot \text{tg}\,(2x) < \sqrt{3}$

Devemos ter: $\text{tg}\,(2x) < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Procedendo da forma anterior, observamos que

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{e} \quad \text{tg}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



Então:

$$0 + k \cdot 2\pi \leq 2x < \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi < 2x < \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad \text{ou}$$

$$\frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi < 2x < 2\pi + k \cdot 2\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

Portanto o conjunto solução é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid k \cdot \pi \leq x < \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi < x < \frac{7\pi}{12} + k \cdot \pi \quad \text{ou} \right.$$

$$\left. \frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi < x < \pi + k \cdot \pi, \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

11. Resolva as inequações seguintes:

a) $\text{tg}\,(3x) < \sqrt{3}$

b) $0 < \text{tg}\,x \leq 1$

c) $\text{tg}\left(\frac{x}{3}\right) > 1$

d) $|\,3 \cdot \text{tg}\,(5x)\,| \leq \sqrt{3}$

e) $\text{tg}^2\,x - \text{tg}\,x < 0$

RELEMBRANDO CONCEITOS

Equações trigonométricas

Tipo	Solução
$\text{sen}\,x = \text{sen}\,a$	$x = a + k \cdot 2\pi$ ou $x = \pi - a + k \cdot 2\pi, \ k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = \cos a$	$x = a + k \cdot 2\pi$ ou $x = -a + k \cdot 2\pi, \ k \in \mathbb{Z}$
$\text{tg}\,x = \text{tg}\,a$	$x = a + k \cdot \pi, \ k \in \mathbb{Z}$

Tipo	Solução
$\text{sen } x > a$ $\text{sen } x \geqslant a$ $\text{sen } x < a$ $\text{sen } x \leqslant a$ com $-1 \leqslant a \leqslant 1$	Eixo dos senos Arcos x tais que $\text{sen } x > a$ a Arcos x tais que $\text{sen } x = a$ A O Eixo dos cossenos Arcos x tais que $\text{sen } x < a$
$\cos x > a$ $\cos x \geqslant a$ $\cos x < a$ $\cos x \leqslant a$ com $-1 \leqslant a \leqslant 1$	y Arcos x tais que $\cos x < a$ Arcos x tais que $\cos x = a$ Arcos x tais que $\cos x > a$ a A O x
$\text{tg } x > a$ $\text{tg } x \geqslant a$ $\text{tg } x < a$ $\text{tg } x \leqslant a$ com $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$	Arcos x tais que $\text{tg } x > a$ y Arcos x tais que $\text{tg } x = a$ Arcos x tais que $\text{tg } x < a$ a A O x Arcos x tais que $\text{tg } x < a$ Arcos x tais que $\text{tg } x > a$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

12. Quais as soluções da equação $\text{tg } 5x = 1$, no intervalo $\frac{\pi}{2} < x < \pi$?

13. Sabendo que $2 \text{ sen } (2x) \cos (2x) = \cos^2 (2x) - \text{sen}^2 (2x)$, determine x sabendo que $0 < x < \pi$.

14. Resolva a equação: $2 \text{ sen}^2 x - 9 \cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4 = 0$.

15. Para quais valores de x tais que $0 \leqslant x < 2\pi$, a sentença $\text{sen } (2x) = \text{sen } x$ é verdadeira?

16. (U. F. Viçosa-MG) Determine as soluções da equação $\cos 2x + \text{sen } 4x = 0$, para $-\frac{\pi}{4} < x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

17. (Unicamp-SP) Ache os valores de x, com $0° \leqslant x < 360°$, tais que $2 \cos^2 x + 5 \text{ sen } x - 4 \geqslant 0$.

18. Resolva o sistema de inequações:

a) $\begin{cases} \text{sen } x > 0 \\ \cos x < \frac{1}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 0 < \text{tg } x \leqslant 1 \\ \text{sen } x > \frac{1}{2} \end{cases}$

19. (Cesgranrio) Resolva a equação $(\cos x + \text{sen } x)^2 = \frac{1}{2}$.

TESTES

20. (UEBA) No intervalo $[0, 2\pi]$, a equação trigonométrica $\text{tg } x = -1$:

a) não possui raízes.
b) possui uma única raiz.
c) possui exatamente duas raízes.
d) possui exatamente três raízes.
e) possui uma infinidade de raízes.

21. (Fuvest-SP) Resolver a equação $\sec x = -2$, com $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

a) $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right\}$
b) $S = \left\{\pi, \frac{\pi}{3}\right\}$
c) $S = \left\{2\pi, \frac{\pi}{2}\right\}$
d) $S = \left\{\pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$
e) $S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

22. (Faap-SP) Sendo x um arco do 1º quadrante, a solução da equação $4^{\text{sen}^2 x} = 2^{(-2 \cos^2 x + 4 \text{ sen } x)}$ é:

a) $\frac{\pi}{8}$ rad
b) $\frac{\pi}{4}$ rad
c) $\frac{\pi}{2}$ rad
d) $\frac{\pi}{6}$ rad
e) $\frac{\pi}{3}$ rad

23. (UFES) A soma de todos os valores distintos de α, $0 < \alpha < 2\pi$ que satisfazem à equação $\text{sen } 2\alpha = 2 \text{ sen}^2 \alpha$, é:

a) $\frac{7\pi}{2}$
b) $\frac{2\pi}{3}$
c) $\frac{5\pi}{3}$
d) $\frac{5\pi}{2}$
e) 2π

24. (Unifor-CE) As soluções de $\text{sen } x - \cos x \geqslant 0$, no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, são tais que:

a) $\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$
b) $\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}$
c) $\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$
d) $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6}$
e) $x = 0$ ou $x = \frac{\pi}{2}$

25. (Imes-SP) O valor de $x \in \mathbb{R}$ na equação $\cos x + \text{sen}^2 x + 1 = 0$, para todo k inteiro, é:

a) $x = \pi + k\pi$
b) $x = \pi + 2k\pi$
c) $x = \pi + \frac{k\pi}{2}$
d) $x = k\pi$
e) $x = 2k\pi$

26. (Cesgranrio) Se $0 \leqslant x \leqslant \pi$, as raízes da equação $\cos^2 x - \text{sen}^2 (\pi - x) = \frac{1}{2}$ são:

a) $\frac{\pi}{3}$ e π

b) $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$

c) 0 e π

d) $\frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6}$

e) $\frac{\pi}{2}$ e π

27. (F. C. Chagas-BA) As soluções da equação $\cos^2 x + \cos x = 0$, no intervalo $[0, 2\pi]$, são:

a) 0, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π

b) 0, $\frac{\pi}{2}$ e π

c) $\frac{\pi}{2}$, π e $\frac{3\pi}{2}$

d) 0, $\frac{\pi}{2}$, π e 2π

e) $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π

28. (FGV-SP) No intervalo $[0, 2\pi]$ a soma das raízes da equação
$\text{sen}^3 x - 3 \cdot \text{sen}^2 x \cdot \cos x + 3 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos^2 x - \cos^3 x = 0$ é:

a) $\frac{\pi}{2}$

b) π

c) $\frac{3\pi}{2}$

d) 2π

e) $\frac{5\pi}{2}$

29. (Mackenzie-SP) A solução da inequação $\frac{\text{sen}^2 x - \text{sen}\, x}{2\, \text{sen}\, x - 1} > 0$ no intervalo $[0, 2\pi]$ é dada por x real, tal que:

a) $0 \leqslant x \leqslant \pi$

b) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{6}$

c) $\frac{\pi}{2} \leqslant x < \frac{5\pi}{6}$

d) $\frac{5\pi}{6} \leqslant x \leqslant \pi$

e) $0 < x < \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6} < x < \pi$

30. (Mackenzie-SP) O número de raízes da equação $\text{sen}^2 x - 9 \cdot \cos x + 14 \cos^2 x = 0$ no intervalo $[0, 2\pi]$ é:

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

31. (F. M. Santa Casa-SP) Qual é o número de soluções do sistema

$\begin{cases} \text{sen}\,(x + y) = 0 \\ \text{sen}\,(x - y) = 0 \end{cases}$, onde $0 \leqslant x \leqslant \pi$ e $0 \leqslant y \leqslant \pi$?

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

32. (Fatec-SP) Se $A = \{x \in [0, \pi] \mid \text{sen}^3 x + 3 \cos^2 x + 3\, \text{tg}^2 x = 3 \sec^2 x - 2\, \text{sen}\, x\}$, então o número de elementos do conjunto é:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

33. (Especex) O conjunto solução da equação $\left(\frac{1}{2} - \text{sen}^2 \theta\right) \cos 3\theta = 0$, sendo $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, é:

a) $S = \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

b) $S = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

d) $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

34. (Especex) O conjunto solução da equação tg $x + 3$ cotg $x = 5$ sec x, para $x \in \mathbb{R}$, é:

a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{5} + 2k\pi \text{ ou } x = \dfrac{3\pi}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{7} + 2k\pi \text{ ou } x = \dfrac{3\pi}{7} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

35. (Mackenzie-SP) Se $2x \in [0, 2\pi]$, então os pontos x do ciclo trigonométrico correspondentes às soluções do sistema $\begin{cases} \cos 2x > 0 \\ \text{tg } x < 0 \end{cases}$ pertencem ao:

a) 1º quadrante somente.
b) 2º quadrante somente.
c) 3º quadrante somente.
d) 4º quadrante somente.
e) 1º ou 4º quadrante.

Respostas

Capítulo I – CONJUNTOS

1. a) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} b) {7, 9, 11, ...} c) {12, 15, 18, ..., 96, 99} d) {2}.
2. a) {x | x é número natural ímpar}
b) {x | x é dia da semana cujo nome começa pela letra s}
c) {x | x é número natural múltiplo de 4 e menor ou igual a 60}
d) {x | x é número natural múltiplo de 5 e $10 \leqslant x \leqslant 30$}
3. {x | x é cor da bandeira brasileira}
4. a) $n(A) = 2$ b) $n(B) = 5$ c) $n(C) = 41$
5. a) $0 \in A$ b) $0 \notin B$ c) $2 \in A$ d) $2 \in B$ e) $9 \notin A$ f) $4 \notin B$
6. a) vazio b) unitário c) vazio d) unitário
7. a) $A = B$ b) $A \neq B$ c) $A \neq B$
8. a) $S = \{3, 4, 5, 6\}$ b) $S = \{5\}$ c) $S = \varnothing$ d) $S = \{2, 7\}$
9. a) $S = \{\ \}$ b) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ c) $S = \{-3\}$ d) $S = \left\{-3, \frac{1}{2}\right\}$
10. a) V b) V c) F d) F e) V f) F g) V h) V
11. Verdadeiras: b, c, d
12. Verdadeiras: a, c, d
13. {2, 3}, {2, 3, 4}, {2, 3, 5} e {2, 3, 4, 5}
14. Falsas: a, b, e
15. Verdadeiras: a, b, c
16. Verdadeiras: a, c, d, g, h, j, l, m
17. a) {2}, {4}, {6}, {8}
b) {2, 4}, {2, 6}, {2, 8}, {4, 6}, {4, 8}, {6, 8}
c) {2, 4, 6}, {2, 4, 8}, {2, 6, 8}, {4, 6, 8}
18. a) 3 b) 8
19. $P(B) = \{\varnothing, \{8\}, \{9\}, \{8,9\}\}$
20. $P(x) = \{\varnothing, \{0\}, \{2\}, \{5\}, \{0, 2\}, \{0, 5\}, \{2, 5\}, \{0, 2, 5\}\}$
21. $P(A) = \{\varnothing, \{p\}, \{a\}, \{z\}, \{p, a\}, \{p, z\}, \{a, z\}, \{p, a, z\}\}$
22. a) 32 b) 16 c) 4 d) 256
23. 6
24. 9
25. a) {1, 2, 4, 6} b) {1, 2, 3, 4} c) {6, 8, 9} d) $\varnothing$ e) {8, 9} f) {1, 2, 4, 6}
26. p e q ou p, q e m ou p, q e n ou p, q, m e n
27. A = {v, i, d, a}
28. $x = 6$ e $y = 8$
29. a) $\{q\}$ b) $\{n\}$ c) $\{n, q\}$
30. a) {2, 6, 8} b) {1, 2, 3} c) {2, 5, 6, 7, 8}
31. a) {1, 3, 5} b) {5, 7, 8} c) {5, 6, 9} d) {6, 9} e) {6, 9} f) {5}
32. $x = 7$ e $y = 8$
33. a) $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
b) $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$
c) $A \cap B = \{1, 2, 3, 6\}$
d) m.d.c. (18, 24) = 6
34. a) $A = \{4, 8, 12, 16, ...\}$
b) $B = \{3, 6, 9, 12, 15, ...\}$
c) $A \cap B = \{12, 24, 36, ...\}$
d) m.m.c. (3, 4) = 12
35. a) {2, 3, 4, 5, 7, 8}
b) {2, 5, 8}
c) {3, 4, 5, 7, 8}
d) {2, 5, 7, 8}
e) {2, 3, 4, 5, 7, 8}
f) {2, 5, 7, 8}
36. a) {0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}
b) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 12}
c) {0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12}
d) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12}
37. Verdadeiras: a, c
38. Falsa: d
39. a) {2, 3, 5, 6, 7} b) {2, 5, 6, 7} c) {2, 4} d) {2, 3, 4} e) {2, 4, 5, 6, 7} f) {3} g) {2, 5, 6, 7} h) {3} i) {2, 3}

40. Verdadeiras: a, b, c, e, f
41. a) {1, 4} b) {5} c) {2, 3, 5}
42. a) B b) C c) {1, 3, 4, 6, 8, 10, 12}
43. $M \Delta N = \{a, b, c, d\}$
44. 30
45. 20
46. 116
47. a) 80 b) 150 c) 170 d) 220
48. a) 10% b) 30% c) 50%
49. a) 110 b) 20 c) 38 d) 60 e) 70
50. Verdadeiras: b, c, d, f
51. Falsas: b, f
52. Verdadeiras: a, b, c, e
53. a) V b) V c) V d) F e) F f) V
54. a) {1, 2, 3} b) {1, 2, 4, 5} c) {1, 2, 3, 4} d) {1, 2, 4, 6}
55. a) {1, 2, {1}, {2}, {1, 2}} b) {{1}, {2}} c) {{1, 2}} d) {1, 2}
56. $N = \{2, 3, 4\}$
57. $B = \{2, 5, 6, 7\}$
58. 32
59. 16
60. 2
61. 2
62. 70
63. 2
64. a) 20 b) 10 c) 57 d) 5
65. a) 15 b) 10 c) 20 d) 25
66. a **67.** c **68.** b **69.** d **70.** c **71.** d **72.** a **73.** e **74.** a **75.** d **76.** c
77. d **78.** d **79.** e **80.** b **81.** c **82.** d **83.** b

Capítulo 2 – CONJUNTOS NUMÉRICOS

1. Verdadeiras: a, c, e, f, g, h
2. a) 31 b) 20
3. Existem muitas soluções. Por exemplo: $0 = 44 - 44$; $1 = 44 : 44$; $2 = (4 : 4) + (4 : 4)$; $3 = (4 + 4 + 4) : 4$; $4 = 4 \cdot (4 - 4) + 4$; $5 = (4 \cdot 4 + 4) : 4$; $6 = 4 + (4 + 4) : 4$; $7 = (44 : 4) - 4$; $8 = (4 + 4) + (4 - 4)$; $9 = (4 + 4) + (4 : 4)$; $10 = (44 - 4) : 4$
4. a) $3 \in \mathbb{N}$ b) $3 \in \mathbb{Z}$ c) $-3 \notin \mathbb{N}$ d) $-3 \in \mathbb{Z}$ e) $0 \in \mathbb{N}$ f) $0 \notin \mathbb{Z}^*$ g) $0 \in \mathbb{Z}_+$ h) $0 \in \mathbb{Z}_-$ i) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ j) $\mathbb{Z}_- \subset \mathbb{Z}$ l) $\mathbb{Z}^* \supset \mathbb{Z}^*_-$ m) $\mathbb{Z}^*_+ \subset \mathbb{Z}$
5. a) {−2, −1, 0, 1, ...} b) {..., −2, −1, 0, 1, 2} c) {−2, −1, 1, 2} d) {0, 1, 2, 3, 4} e) {−2, −1, 0, 1, 2} f) {−1} g) $\varnothing$ h) {−2, −1, 0}
6. a) V b) F c) F d) V
7. Verdadeiras: b, c, d, g, h, i, j, l, m
8. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{12}{5}$ c) $-\frac{1}{4}$ d) $\frac{11}{20}$ e) $\frac{5}{9}$ f) $\frac{16}{45}$ g) $\frac{21}{10}$ h) $\frac{19}{9}$ i) $\frac{104}{45}$
9. a) $\frac{7}{6}$ b) $\frac{7}{3}$ c) 0,99 d) $-\frac{5}{2}$
10. Racionais: a, b, d, f, h, l; irracionais: c, e, g, i, j, m
11. $\left\{-3{,}1;\ -2;\ \frac{3}{4};\ \sqrt{1}\right\}$

12. Verdadeiras: b, e, f; falsas: a, c, d

13. a) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ c) $2(\sqrt{2}+1)$ e) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ f) $\frac{6(\sqrt{15}-2)}{11}$

14. a) $9+4\sqrt{5}$ b) 1 c) $38-12\sqrt{10}$ d) $4-3\sqrt{6}$

15. Verdadeiras: b, d, g, h

16. a) $\{-2\}$ b) $\left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$ c) $\varnothing$ d) $\left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$

17. a) $\varnothing$ b) $\varnothing$ c) $\{2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\}$ d) $\{2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\}$

18. a) 

d) 

g) 

b) 

e) 

h) 

c) 

f) 

i) 

19. a) $[-4, 3]$ c) $]-6, -\sqrt{2}[$ e) $\left]-\infty, \frac{5}{8}\right]$

b) $[1, \sqrt{10}[$ d) $]7{,}5; \infty[$ f) $]-10, 10]$

20. a) 31 b) 13 c) 14 d) 11 e) 15 f) 9

21. a) 6 b) 11 c) infinitos

22. a) $[-2, 4]$ b) $\{1\}$ c) $\varnothing$ d) $[-2, 2]$ e) $[2, 5]$ f) $]-3, 3]$

23. a) $[-10, 5]$ b) $]-6, 6[$ c) $\mathbb{R}$ d) $]-\infty, 4]$ e) $]-\infty, 3]$ f) $[-2, \infty[$

24. a) 12 b) −3 c) 3 d) $\frac{1}{10}$ e) $-\frac{5}{3}$ f) $\frac{17}{12}$

25. $x = -10$ ou $x = 10$

26. 0, 1, 2, 3, 4, 5

27. −5, −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5

28. $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leqslant x \leqslant 5\}$

29. b, c, g, h

30. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{25}{99}$ c) $\frac{23}{90}$ d) $\frac{6}{5}$ e) $\frac{11}{9}$ f) $\frac{46}{45}$

31. a) $\sqrt[8]{5^3}$ b) $\sqrt{6^3}$ c) $\sqrt{4}$ d) $\sqrt[3]{9}$

32. a) $\frac{1}{25}$ b) 4 c) $\frac{1}{2}$ d) 25 e) $\frac{5}{3}$ f) 1 g) 2 h) $\frac{3}{16}$

33. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{9}{16}$ d) 13 e) $50+10\sqrt{2}$ f) 7 g) 2

34. $\{-2, 0, 2\}$

35. a) $[-4, 6[$ b) $[-2, 5]$ c) $[-3, 6[$ d) $[-2, 5]$ e) $[-4, -2[$

36. 91^{40}

37. 1, 3 e 9

38. a) 14 b) $\frac{14}{9}$

39. 15

40. $\{-1, 0, 1\}$, $\{-3, -2, -1\}$, $\{1, 2, 3\}$

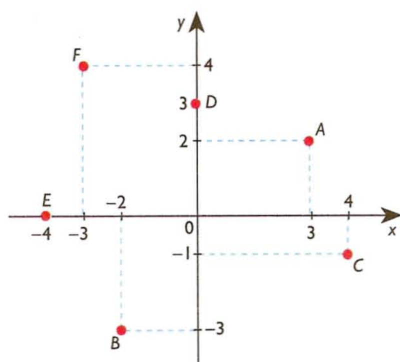
41. b 42. d 43. a 44. a 45. c 46. d 47. d 48. d 49. a 50. e 51. c

52. d 53. d 54. c 55. b 56. d 57. b 58. e 59. b 60. d

1. $y = 2x + 1$

2. a) $a = 8$ e $b = 4$ b) $a = 1$ e $b = \frac{4}{3}$ c) $a = 3$ ou $a = 4$ e $b = 2$ d) $a = 5$ e $b = 3$

3.



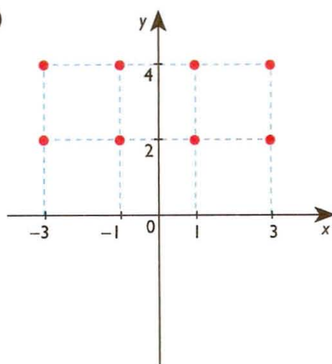
4. a) $A \times B = \{(-2, -1), (-2, 1), (0, -1), (0, 1), (2, -1), (2, 1)\}$
   b) $B \times A = \{(-1, -2), (-1, 2), (-1, 0), (1, -2), (1, 2), (1, 0)\}$
   c) $A^2 = A \times A = \{(-2, -2), (-2, 0), (-2, 2), (0, -2), (0, 0), (0, 2), (2, -2), (2, 0), (2, 2)\}$
   d) $B^2 = B \times B = \{(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)\}$

5. a) 8 b) 4 c) 8 d) 16

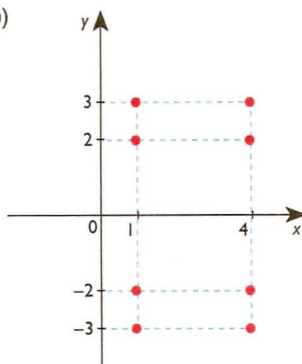
6. 30

7. a) 4 b) 4 c) 8 d) 2

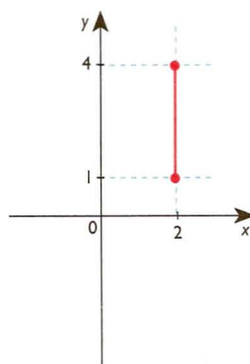
8. a)



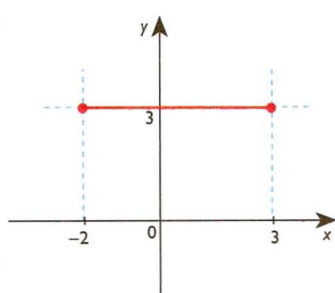
b)



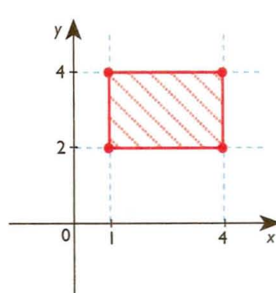
c)



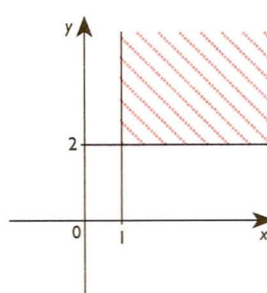
d)



e)



f)



9. a) $A = \{-2, 0, 2\}$ e $B = \{-2, -1, 1, 2\}$
   b) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{2\}$
   c) $A = \{2\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 < y < 3\}$

d) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 3\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant y \leqslant 2\}$

e) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leqslant 4\}$ e $B = \{2\}$

f) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -3\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$

10. a) $R_1 = \{(-1, 2), (0, 4), (1, 6), (3, 10)\}$

b) $R_2 = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1)\}$

c) $R_3 = \{(-1, 2), (0, 0), (1, 2), (3, 6)\}$

11. a) $R_1 = \left\{\left(-2, -\frac{1}{2}\right), (-1, -1), \left(-\frac{1}{2}, -2\right)\right\}$ b) $R_2 = \left\{\left(-1, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, 0\right)\right\}$

12. a) $R = \{(2,9), (3, 6), (6, 3), (9, 2)\}$

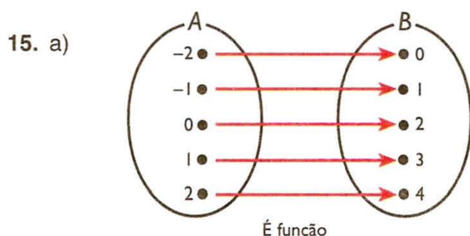
b) $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

13. a) $R = \{(0, 10), (1, 8), (2, 6), (3, 4), (4, 2), (5, 0)\}$

b) $R = \{(0, 5), (5, 0), (3, 4), (4, 3), (0, -5), (3, -4), (4, -3)\}$

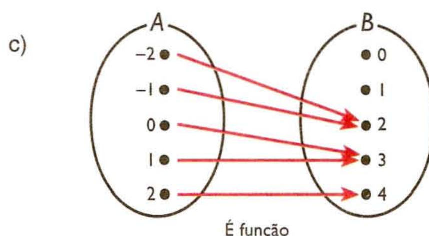
14. a, b, e

15. a)



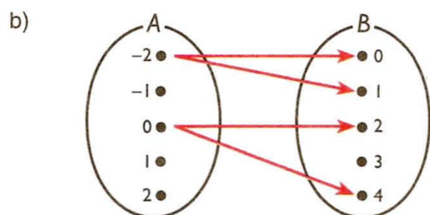
É função

c)

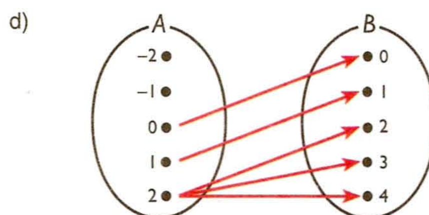


É função

b)



d)



16. a, b

17. a) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{4}$ e) $\left\{\frac{1}{2}, 2, \frac{2}{3}, 3, \frac{3}{4}\right\}$

b) $\frac{2}{3}$ d) $\{1, 2, 3\}$ f) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right\}$

18. a) -13 b) -2 c) -3 d) -18 e) 1 f) $\frac{2}{5}$

19. a) 16 b) 3 c) $\frac{1}{4}$ d) $13 - 8\sqrt{2}$ e) $x = 1$ ou $x = \frac{3}{5}$ f) $x = 2$ ou $x = -\frac{2}{5}$

20. a) $\{2, 3, 4\}$ b) $\{-3, 0, 3\}$ c) $\left\{\frac{1}{3}, 1, 3\right\}$ d) $\left\{0, \frac{1}{3}\right\}$

21. 4

22. $5x - 7$

23. 9

24. $\frac{3}{4}$

25. 18

26. a) $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{R}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\dfrac{5}{3}\right\}$

e) $\mathbb{R}$

f) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\dfrac{5}{3}\right\}$

g) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1 \text{ e } x \neq 1\}$

h) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3 \text{ e } x \neq 4\}$

i) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \dfrac{1}{3}\right\}$

j) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\dfrac{5}{3} \text{ e } x \neq \dfrac{1}{2}\right\}$

l) $\{x \in \mathbb{R}^* \mid x \neq 2\}$

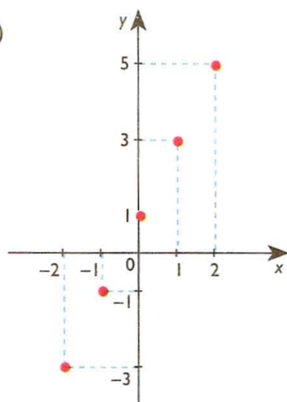
m) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

n) $\{x \in \mathbb{R}^* \mid x > -2\}$

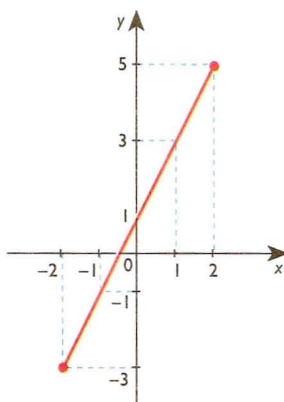
o) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$

p) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$

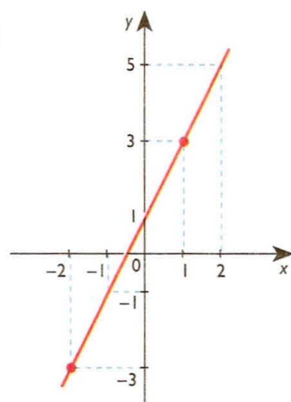
27. a)



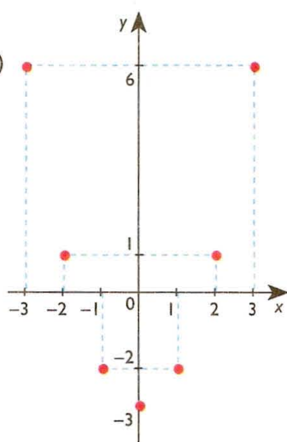
b)



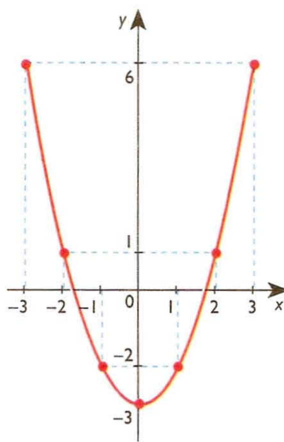
c)



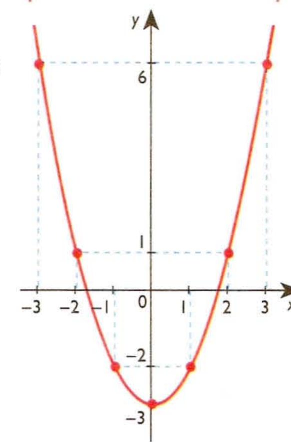
28. a)



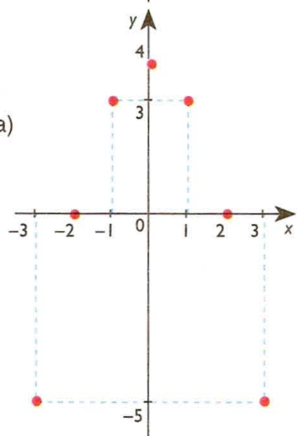
b)



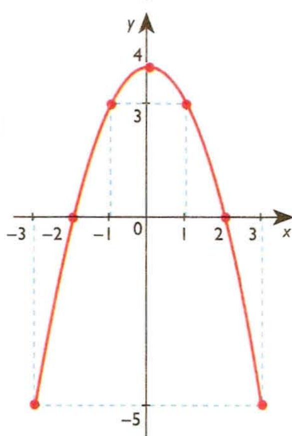
c)



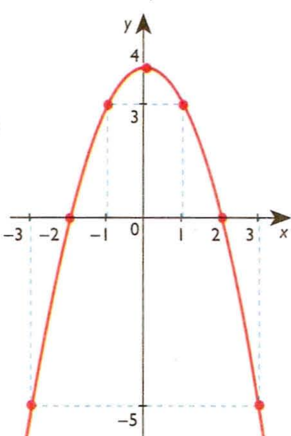
29. a)



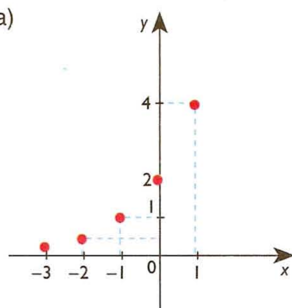
b)



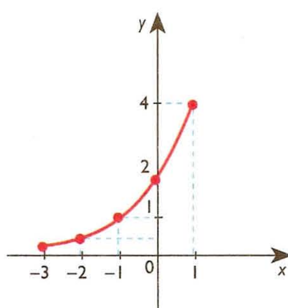
c)



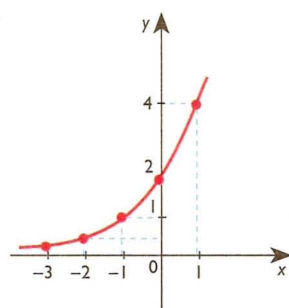
30. a)



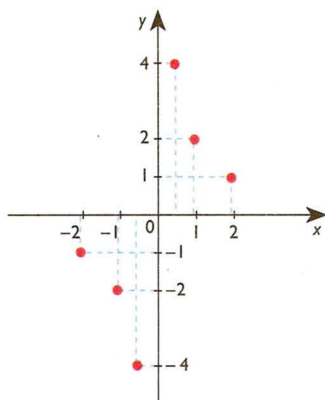
b)



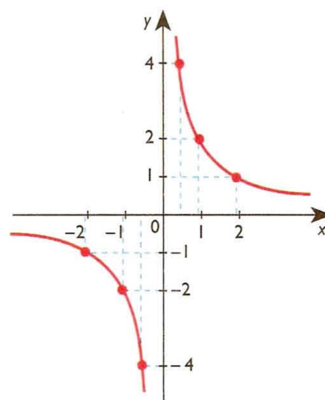
c)



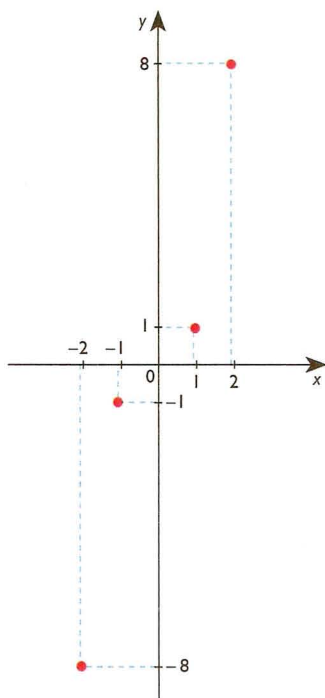
31. a)



b)



32.



33. b e d

34. a, c, g, h

35. a) D = {−1, 0, 1, 2, 3} e Im = {−2, −1, 0, 1, 2}
b) D = [0, 4] e Im = $\{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant y \leqslant 2\}$
c) D = $\mathbb{R}$ e Im = $\mathbb{R}_+^*$
d) D = $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 3\}$ e Im = $\{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant y \leqslant 5\}$

36. a) −2 e 1 b) −3 c) −2, 1 e 4

37. a) Crescente:]−∞, −2] e [0, ∞[. Decrescente: [−2, 0]
b) Crescente:]−∞, 3]. Decrescente: [3, +∞[
c) Crescente: não existe. Decrescente: $\mathbb{R}$

38. a) $\mathbb{R}$ b) $\mathbb{R}$ c) Crescente d) $x = \frac{1}{3}$ e) $x > \frac{1}{3}$ f) $x < \frac{1}{3}$ g) Não h) Não i) Não

39. a) $\mathbb{R}$
b) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 4\}$
c)]−∞, 0]
d) [0, +∞[
e) −2 ou 2
f) $-2 < x < 2$
g) $x < -2$ ou $x > 2$
h) Par
i) 0
j) 4

40. a) $\mathbb{R}$
b) $\mathbb{R}_+^*$
c) Não
d) Crescente
e) Não
f) $x = 0$
g) $x > 1$
h) Não
i) Não
j) Zero

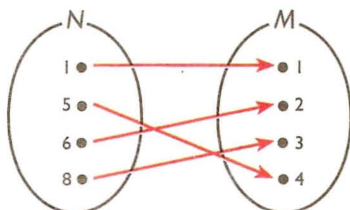
41. a) [−3, 5]
b) Crescente
c) −3, −1, 1 e 5
d) $-1 < x < 1$
e) 3
f) 0
g) $\{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant y \leqslant 4\}$

42. Sobrejetoras: a, c, d, f; Injetoras: b, c, d; Bijetoras: c, d

43. b, c

44. Verdadeiras: c, d, e. Falsas: a, b

45.



46. $f^{-1} = \{(2, -3), (4, -1), (5, 1), (3, 2)\}$

47. $g^{-1}(-4) = 5$ e $g^{-1}(3) = 8$

48. a) $f^{-1}(x) = \frac{1 + x}{4}$ c) $g^{-1}(x) = \frac{2x - 1}{x - 2}$ $(x \neq 2)$ e) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

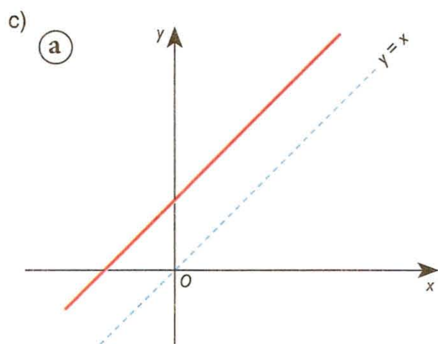
b) $f^{-1}(x) = 2x - 3$ d) $f^{-1}(x) = \frac{x^3 - 3}{2}$ f) $f^{-1}(x) = \frac{x + 2}{2x - 5}$ $\left(x \neq \frac{5}{2}\right)$

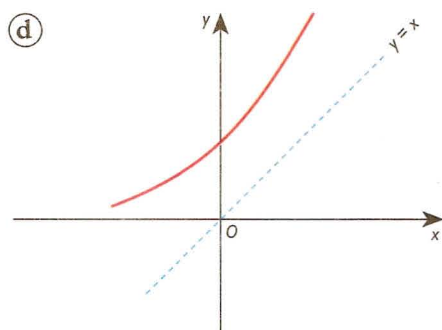
49. a) 0 b) $-\frac{5}{3}$ c) $-\frac{11}{6}$ d) $-\frac{8}{5}$

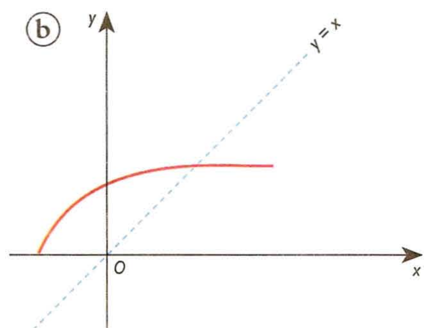
50. a) $\frac{37}{4}$ b) 3

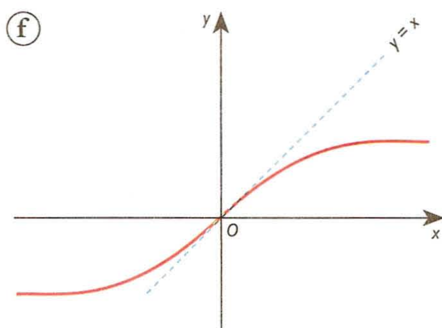
51. a) a, b, d, e, f b) a, b, d, f

c)









52. a) $6x + 1$ b) $6x - 3$ c) $9x - 8$ d) $4x + 3$

53. a) $2x^2$ b) $2x^2 + 12x + 15$ c) $x + 6$ d) $8x^4 - 24x^2 + 15$

54. a) -11 b) -8 c) 97 d) 22

55. $2x + 1$

56. $4x - 2$

57. $8x - 9$

58. $3x - 1$

59. a) -20 d) $f^{-1}(x) = \dfrac{x + 4}{8}$ g) $64x - 36$

b) -3 e) $-16x^2 + 40x - 4$ h) $-2x^2 + 13x - 4$

c) 1 f) -228 i) $-4x + 10$

60. a) $\dfrac{9}{4}$ b) 5 ou $\dfrac{1}{2}$ c) 5 d) $\dfrac{5}{2}$ ou 3

61. a) 7 b) $30x - 98$

62. $2x + 7$

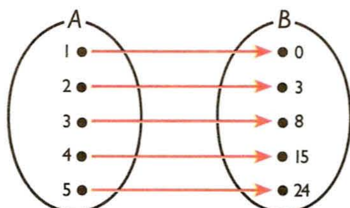
63. a) $x = -4$ ou $x = 4$ b) $x = 1$ ou $x = 2$ c) $x = 3$

64. 8

65. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0 \text{ e } x \neq 4\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2 \text{ e } x \neq 5\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$

66. $\dfrac{5x + 1}{x + 1}$

67. a)

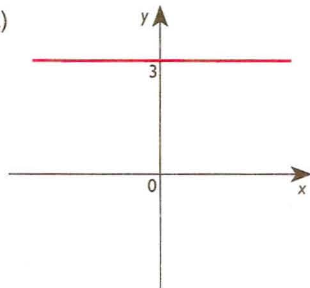


b) $f^{-1}(x) = \{(0,1), (3, 2), (8, 3), (15, 4), (24, 5)\}$

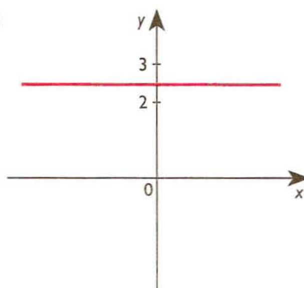
68. $y = 60 - x^2$
69. a) $[-2, 2]$ b) $[0, 2]$ c) 1 d) 2 e) 0 f) $[-1, 1]$
70. a) $\mathbb{R}^*$ b) $\mathbb{R}^*$ c) Decrescente d) Ímpar e) $\mathbb{R}^*_+$ f) $\mathbb{R}^*_-$ g) Zero h) Zero
71. $\left\{-2, -1, -\frac{5}{7}, 0, 3\right\}$
72. $\varnothing$ **73.** $g(33) = 19$ **74.** 0 **75.** 6 **76.** d **77.** d **78.** c **79.** e **80.** c **81.** b
82. d **83.** b **84.** e **85.** a **86.** d **87.** a **88.** e **89.** d **90.** b **91.** e **92.** d
93. c **94.** c **95.** b **96.** b **97.** d

Capítulo 4 – FUNÇÃO DO 1º GRAU

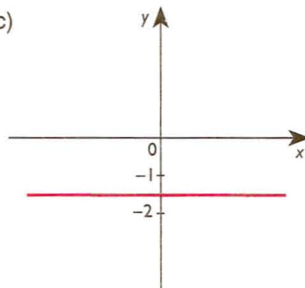
1. a)



b)

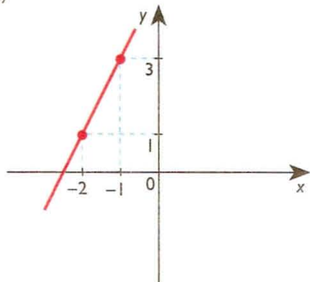


c)

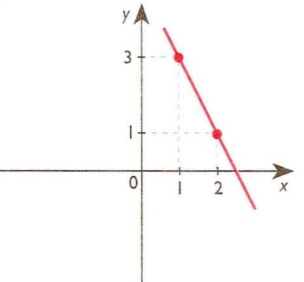


2. a, b, d, f
3. a) -17 b) -1 c) -2 d) $5\sqrt{2} - 2$
4. a) $4x - 3$ b) $12x + 21$ c) $x + 9$
5. a) $-\frac{3}{2}$ b) -1 c) 0
6. a) 3 b) -17 c) 23
7. a) $8x - 63$ b) $24x - 47$
8. a) $y = 100 + 5x$ b) 700 UT c) 40 km
9. $y = 4x + 180$

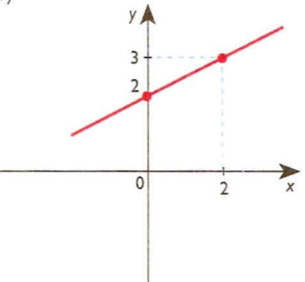
10. a)



b)



c)



11. a) Crescente b) Decrescente c) Decrescente d) Crescente
12. a) $m = 2$ b) $m > 2$ c) $m < 2$
13. $y = 4x - 6$
14. $a = 2$ e $b = 9$
15. a) $y = x + 6$ b) $y = -2x + 1$
16. a) $y = 3x - 4$ b) $y = 2x + 3$ c) $y = -3x + 1$
17. 25 min
18. a) $x = 4$ b) $x = 0$ c) 0,5
19. a) $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ b) $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$ c) $(5, 0)$ d) $(0, 0)$

20. a) $x < 2 \Rightarrow y < 0$; $x = 2 \Rightarrow y = 0$; $x > 2 \Rightarrow y > 0$.
b) $x < 0 \Rightarrow y > 0$; $x = 0 \Rightarrow y = 0$; $x > 0 \Rightarrow y < 0$.
c) $x < 0 \Rightarrow y < 0$; $x = 0 \Rightarrow y = 0$; $x > 0 \Rightarrow y > 0$.
d) $x < -\frac{2}{3} \Rightarrow y > 0$; $x = -\frac{2}{3} \Rightarrow y = 0$; $x > -\frac{2}{3} \Rightarrow y < 0$.

21. a) $y < 0$ b) $y < 0$ c) $y = 0$ d) $y > 0$ e) $y > 0$

22. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2{,}7\}$ b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{10}{3}\right\}$ c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{2}\right\}$ d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{30}{7}\right\}$

23. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 2{,}5\}$ c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant x < 10\}$ d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{2}{3}\right\}$

24. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 2\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2 \text{ ou } x \geqslant 4\}$
c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < \frac{1}{3}\right\}$
d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -\frac{4}{3}\right\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 5\}$
f) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > \frac{7}{3}\right\}$

25. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 3\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -3 \text{ ou } x > 4\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 2\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 6\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leqslant 1\}$
f) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{5}{2} \text{ ou } x > \frac{14}{3}\right\}$

26. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } 2 \leqslant x \leqslant 4\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } 0 < x < 4\}$

27. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 6\}$ b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{3}{2} \text{ ou } x > 2\right\}$

28. a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant \frac{14}{5}\right\}$ b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant \frac{7}{4}\right\}$

29. a) $\mathbb{R}$ b) $\varnothing$ c) $\{-0{,}4\}$ d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{5}{4}\right\}$ e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$ f) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{5}\right\}$ g) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 9\}$ h) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -40\}$

30. a) $m = 5$ b) $m \neq 5$ c) $m < 5$ d) $m > 5$

31. a) 4 b) 7 c) $10x - 11$ d) $x = -\frac{4}{5}$ e) $x = -4$

32. a) $f(x) = \frac{11x}{3} - \frac{19}{3}$ b) $\frac{25}{3}$

33. $y = 76$

34. a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{5}{2}$ c) 2

35. a) $y = 42 - 4x$ b) 34 cm c) 1,5

36. a) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ b) $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 5\}$

37. 42 **38.** 1 **39.** $m = -3$ e $n = -1$ **40.** 99 **41.** $x = 8$

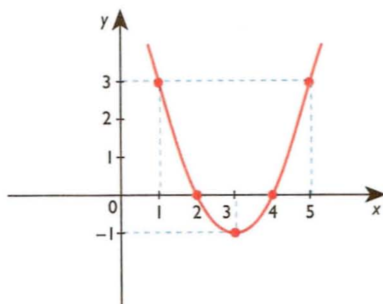
42. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{5}{3} \text{ ou } x > 2\right\}$

43. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

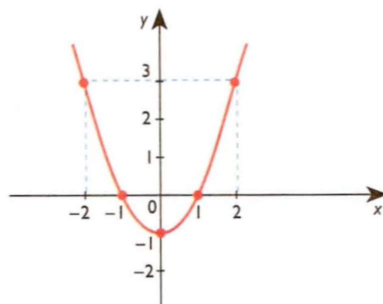
44. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -8 \text{ ou } -4 < x < 2\}$

45. 18 **46.** $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ **47.** b **48.** b **49.** d **50.** e **51.** b **52.** e **53.** a
54. a **55.** d **56.** c **57.** b **58.** c **59.** c **60.** b

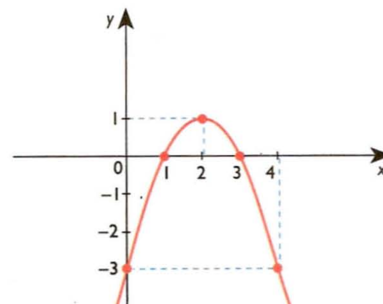
1. a, b, f
2. a) $m \neq 4$ b) $m = 4$
3. a) $m \neq 3$ e $m \neq -3$ b) $m = -3$ c) $m = 3$
4. a) 3 b) 13 c) 1 d) $9 - 7\sqrt{2}$
5. a) $-\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $-\frac{3}{2}$
6. a) $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{2}$ b) 0 ou $\frac{5}{6}$ c) $-\frac{7}{6}$ ou 2
7. 19.310 UV
8. b e d
9. $m < -\frac{1}{3}$
10. $k > 5$
11. a) $y = 5x^2 - 14x + 8$ b) $y = -x^2 + 3x$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 1$
12. $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$
13. 5
14. a) -9 b) -21
15. $x_V = 2$
16. a) $V\left(\frac{9}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ b) $V(7, -9)$ c) $V\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ d) $V\left(\frac{7}{6}, \frac{25}{12}\right)$ e) $V(0, 9)$ f) $V(2, -16)$
17. a) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -16\}$ b) $\left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{1}{2}\right\}$ c) $\left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{81}{20}\right\}$ d) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 4\}$ e) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 0\}$ f) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 5\}$
18. a)



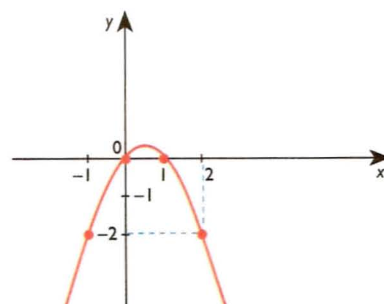
c)



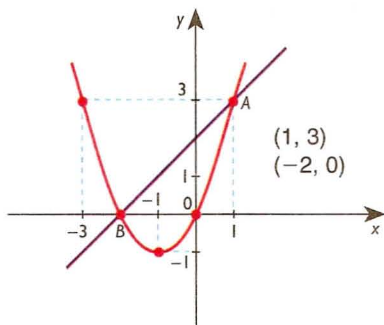
b)



d)

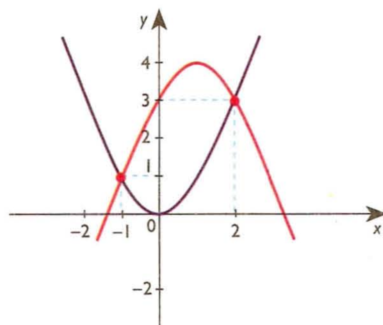


19.



(1, 3)
(−2, 0)

20.



21. 7

22. 3

23. $p = -4$ e $q = -12$

24. $m = 2$ ou $m = 5$

25. $m = 0$

26. $c =$ R$ 675,00

27. $x = 6$

28. a) $y = -x^2 + 3x + 340$ b) $x = 1{,}5$ cm c) $y = 342{,}25$ cm^2

29. a) depois b) 40

30. a) $S = \{1, 9\}$ b) $S = \{0, 6\}$ c) $S = \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$ d) $S = \{-4, 4\}$ e) $S = \varnothing$ f) $S = \left\{\dfrac{9}{2}\right\}$

31. a) 1 e 5 b) −4 c) 0 e 2 d) 5

32. a) $x < 3$ ou $x > 5 \Rightarrow y > 0$; $x = 3$ ou $x = 5 \Rightarrow y = 0$; $3 < x < 5 \Rightarrow y < 0$

b) $x < -2$ ou $x > 4 \Rightarrow y < 0$; $x = -2$ ou $x = 4 \Rightarrow y = 0$; $-2 < x < 4 \Rightarrow y > 0$

c) $x < 0$ ou $x > \dfrac{5}{2} \Rightarrow y > 0$; $x = 0$ ou $x = \dfrac{5}{2} \Rightarrow y = 0$; $0 < x < \dfrac{5}{2} \Rightarrow y < 0$

d) $x < 0$ ou $x > 4 \Rightarrow y < 0$; $x = 0$ ou $x = 4 \Rightarrow y = 0$; $0 < x < 4 \Rightarrow y > 0$

e) $x < -3$ ou $x > 3 \Rightarrow y > 0$; $x = -3$ ou $x = 3 \Rightarrow y = 0$; $-3 < x < 3 \Rightarrow y < 0$

f) $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y > 0$

g) $x = -2 \Rightarrow y = 0$; $x \neq -2 \Rightarrow y < 0$

h) $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y < 0$

i) $x < -1$ ou $x > 2 \Rightarrow y < 0$; $x = -1$ ou $x = 2 \Rightarrow y = 0$; $-1 < x < 2 \Rightarrow y > 0$

j) $x = 0 \Rightarrow y = 0$; $x \neq 0 \Rightarrow y > 0$

33. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 6\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < -2\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -4 \text{ ou } x \geqslant 5\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -5 \text{ ou } x \geqslant 5\}$

f) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -4 \text{ ou } x \geqslant \dfrac{1}{2}\right\}$

g) $\mathbb{R}$

h) $\varnothing$

i) $\mathbb{R}$

j) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{1}{3}\right\}$

l) $\{3\}$

m) $\varnothing$

n) $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < -2\}$

o) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 3\}$

34. $m > 6$

35. $-10 < k < 0$

36. $-\dfrac{3}{2} < m < \dfrac{3}{2}$

37. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leqslant 3\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leqslant 1\}$

38. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2$ ou $0 < x < 1$ ou $x > 5\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant -1$ ou $1 \leqslant x \leqslant 2\}$
c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{1}{2}\right\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 0$ ou $1 < x < 2$ ou $x > 3\}$
e) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{1}{2}\right.$ ou $1 < x \leqslant 2$ ou $\left.x > 5\right\}$
f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2$ ou $x > 5\}$
g) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 6\}$
h) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$

39. a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{1}{4}\right.$ ou $\left.x \geqslant \frac{1}{3}\right\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 2\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = 0$ ou $x > 1$ e $x \neq 4\}$

40. a) $m \neq -5$ e $m \neq 5$ b) $m = -5$ c) $m < -5$ ou $m > 5$ d) $m = 5$

41. a) 18 b) 2 c) 0 d) $\frac{1}{5}$ ou 2

42. $\text{Im} = \{-1, 0, 3\}$

43. a) $V(5, -25)$ b) $\{0, 10\}$ c) -25 d) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -25\}$

44. a) $\left(\frac{11}{2}, \frac{49}{4}\right)$ b) $\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{49}{4}\right\}$

45. $k = 2$

46. 8

47. a) $y = x^2 - 4x + 3$ b) $y = -x^2 + 4x - 4$ c) $y = x^2 + x + 1$

48. a) $V(2, -1)$ b) $V(2, 0)$ c) $V\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

49. 8

50. 6

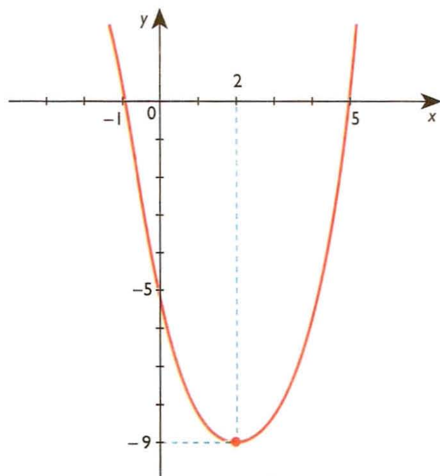
51. $\mathbb{R}_+$

52. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

53. 7

54. a) $a = 1$, $b = -4$, $c = -5$ b) $f(0) = -5$ c) $f(x)$ tem valor mínimo, pois $a = 1 > 0$ d) $(2, -9)$

e)



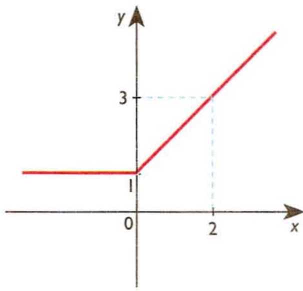
55. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leqslant -1$ ou $x > 3\}$

56. a) $m = 1$ e $n = 0$ b) 5

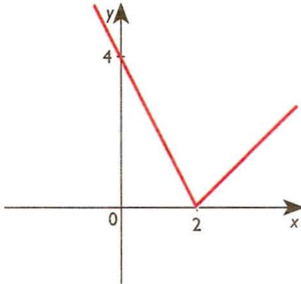
57. d **58.** b **59.** a **60.** a **61.** a **62.** d **63.** a **64.** d **65.** e **66.** b **67.** a
68. b **69.** d **70.** b **71.** c **72.** c **73.** e **74.** d **75.** b **76.** b **77.** d

Capítulo 6 — FUNÇÃO MODULAR

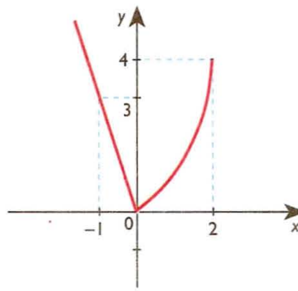
1. a)



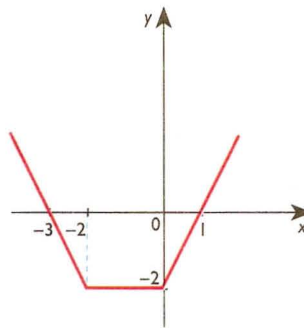
b)



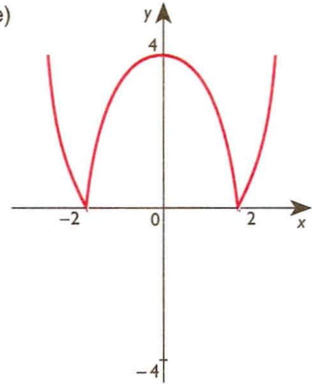
c)



d)

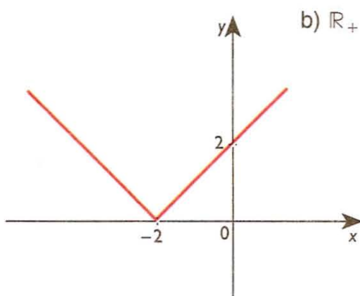


e)



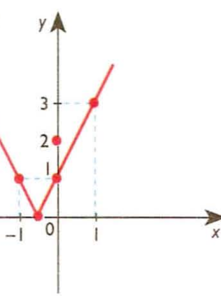
2. a) −2 b) 2 c) 1

3. a)



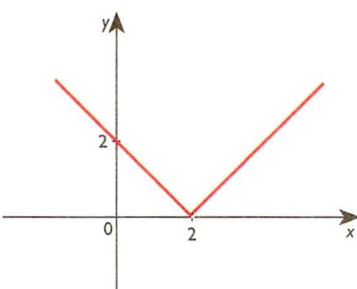
b) $\mathbb{R}_+$

4. a) 3 b)

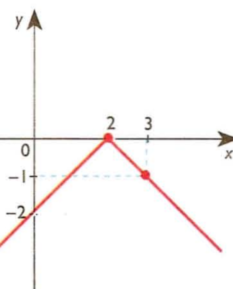


c) $\mathbb{R}_+$

5.



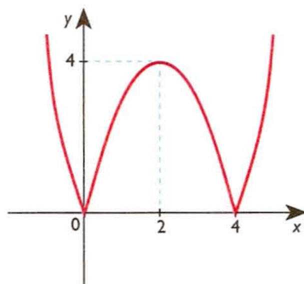
6. a) −6 b)



c) $\mathbb{R}_-$

7. a) $h(x) = -|x + 3|$ b) $h(5) = -8$ c) $\text{Im} = \mathbb{R}_-$

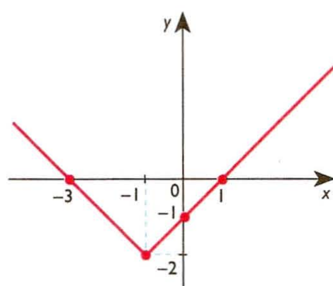
8.



9. a) $h(x) = |x^2 + 4x + 3|$ b) $h(-1) = 0$ c) $h(-3) = 0$ d) $\mathbb{R}_+$

10. a) 0

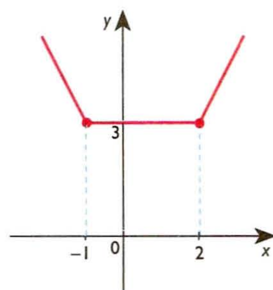
b)



c) $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -2\}$

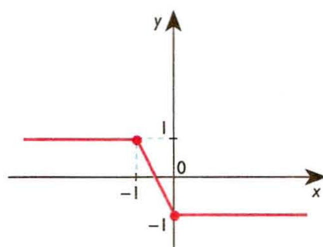
11. $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 4\}$

12. a)



b) $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 3\}$

13.



14. a) $S = \{3, 5\}$ c) $S = \left\{-\dfrac{5}{8}, -\dfrac{1}{8}\right\}$ e) $S = \left\{-\dfrac{5}{3}\right\}$ g) $S = \{-14, 16\}$

b) $S = \left\{\dfrac{1}{5}, 1\right\}$ d) $S = \left\{\dfrac{5}{6}, \dfrac{1}{2}\right\}$ f) $S = \left\{\dfrac{1}{3}, \dfrac{11}{3}\right\}$ h) $S = \left\{\dfrac{1}{5}\right\}$

15. a) $S = \{1, 2, 3, 4\}$ c) $S = \{-1, 3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}, 7\}$

b) $S = \{-1, 4\}$ d) $S = \{2, 6, 4 - \sqrt{2}, 4 + \sqrt{2}\}$

16. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\dfrac{2}{3}\right\}$ b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \dfrac{1}{2}\right\}$ c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \dfrac{1}{20}\right\}$

17. a) $S = \left\{3, \dfrac{5}{3}\right\}$ b) $S = \{4\}$ c) $S = \varnothing$

18. a) $S = \left\{\dfrac{4}{7}, 8\right\}$ b) $S = \left\{-4, \dfrac{2}{3}\right\}$

19. a) $S = \{-6, -4, 4, 6\}$ b) $S = \{-2, 2\}$ c) $S = \{-5, -4, 4, 5\}$ d) $S = \varnothing$

20. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -8 \text{ ou } x > 2\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 7\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\dfrac{5}{3} \text{ ou } x > 3\right\}$

21. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2 \text{ ou } x \leqslant -2\}$ b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3 \text{ ou } x \geqslant 5\}$

22. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -14 \leqslant x \leqslant 6\}$ c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 8\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 \leqslant x \leqslant 1\}$ d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{5}{2}\right\}$

23. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2 \text{ ou } 4 < x < 6\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 - \sqrt{7} \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } 3 \leqslant x \leqslant 2 + \sqrt{7}\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3 - \sqrt{14} \text{ ou } 1 < x < 5 \text{ ou } x > 3 + \sqrt{14}\}$

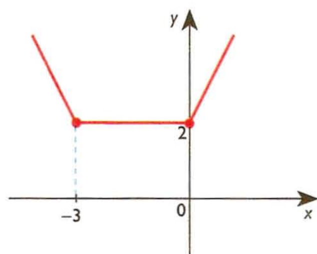
24. a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 2\}$ b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } 2 \leqslant x \leqslant 8 \text{ ou } x \geqslant 10\}$

25. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -8 \text{ ou } x \geqslant \dfrac{4}{5} \text{ e } x \neq 3\right\}$ b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{5}{3} < x < -\dfrac{1}{9} \text{ e } x \neq -\dfrac{1}{2}\right\}$

26. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > \dfrac{5}{2}\right\}$ b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \dfrac{2}{5} \text{ ou } x \geqslant 2\right\}$

27. a) 9 b) 2 c) 2 d) 14

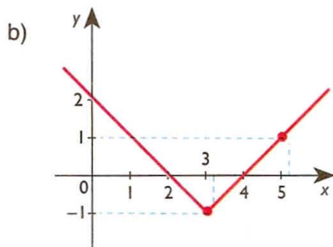
e)

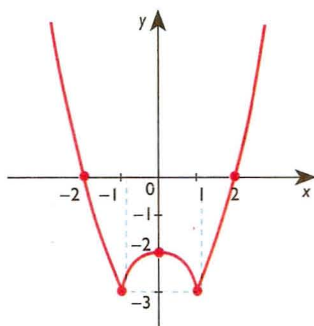


f) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 2\}$
g) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$
h) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -3\}$

28. a) −2 b) 2 c) −2 d) 2

29. a) $h(x) = |x - 3| - 1$

b) 

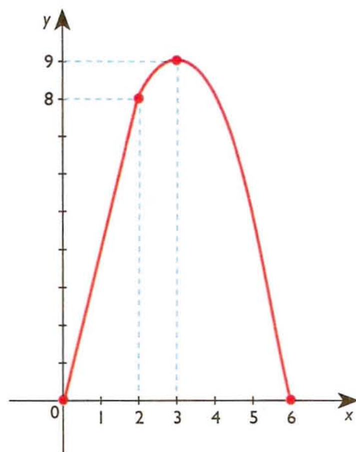
30. 

Verdadeiras: a, b, c, f.

31. a) $S = \left\{2, 15, \dfrac{17 - \sqrt{409}}{2}, \dfrac{17 + \sqrt{409}}{2}\right\}$ b) $S = \{11\}$ c) $S = \left\{3, \dfrac{7}{6}\right\}$

32. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -50 < x < 150\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } 2 < x < 3 \text{ ou } x > 6\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant \dfrac{8}{5}\right\}$

33. a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$
b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 5\}$
c) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } 3 \leqslant x \leqslant 6 \text{ ou } x \geqslant 9\}$

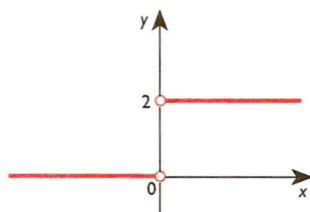
34. a) 

b) $x = \dfrac{5}{4}$ ou $x = 5$

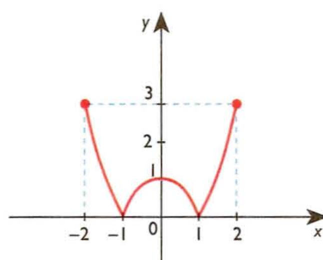
35. $S = \{-2, -1, 1, 2\}$
36. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x \geqslant 3\}$

37. $S = \varnothing$
38. $S = \{x \in \mathbb{R}^* \mid -1 < x < 1\}$
39. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0 \text{ ou } x > 1\}$

40.



41.



42. e **43.** c **44.** a **45.** d **46.** a **47.** d **48.** e **49.** c **50.** a **51.** d **52.** b
53. a **54.** e **55.** d **56.** a **57.** e **58.** e **59.** a

Capítulo 7 – FUNÇÃO EXPONENCIAL

1. a) 125 d) $\frac{81}{16}$ g) 2 j) $\frac{1}{8}$ n) 1
b) 10 000 e) 0,048 4 h) $\frac{9}{4}$ l) $\frac{4}{3}$ o) 0,85
c) $\frac{9}{25}$ f) $\frac{4}{81}$ i) $\frac{9}{16}$ m) $\frac{9}{25}$ p) $\frac{100}{9}$

2. a) a^7 d) a^2 g) a^7 j) a^{x^2+x} n) 6^x
b) a^4 e) a^{-2} h) a^6 l) $(a \cdot b)^2$ o) $\left(\frac{3}{5}\right)^x$
c) a^7 f) $a^0 = 1$ i) a^{3x} m) $\left(\frac{a}{b}\right)^3$ p) a^6

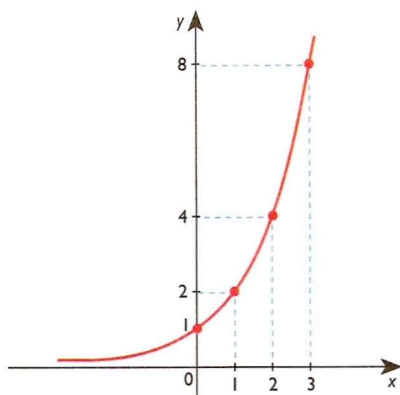
3. a) $2^{\frac{4}{5}}$ b) $2^{\frac{1}{2}}$ c) $10^{\frac{x+1}{2}}$ d) $2^{\frac{x}{3}}$ e) $3^{\frac{2x+1}{5}}$ f) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{x+4}{x}}$

4. a) $2^x \cdot 2^3$ b) $5^{2x} \cdot 5$ c) $\frac{3^x}{3^2}$ d) $\frac{10^{2x}}{10}$ e) 10^0

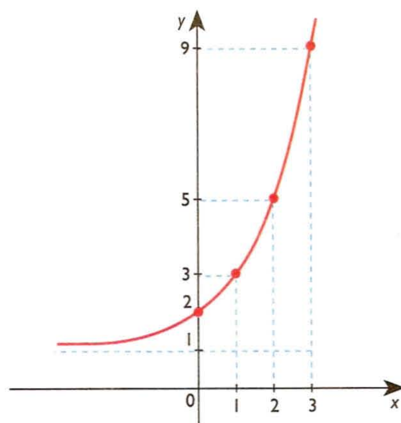
5. b) (base: 5) e c) $\left(\text{base: } \frac{1}{5}\right)$

6. a) Crescente, pois a base 3,1 é maior que 1
b) Decrescente, pois a base $\frac{2}{3}$ está entre 0 e 1
c) Decrescente, pois a base $2^{-3} = \frac{1}{8}$ está entre 0 e 1
d) Decrescente, pois a base 0,23 está entre 0 e 1
e) Crescente, pois a base $\pi \simeq 3{,}14$ é maior que 1
f) Crescente, pois a base $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$ é maior que 1
g) Crescente, pois a base $\sqrt{2} + 2 \simeq 1{,}41 + 2 = 3{,}41$ é maior que 1
h) Decrescente, pois a base $\frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 0{,}57$ está entre 0 e 1

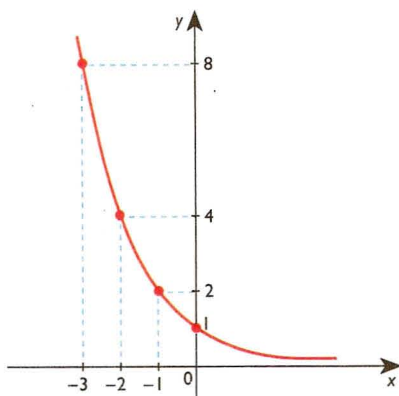
7. a)



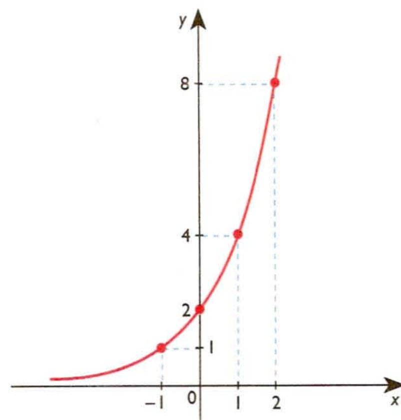
c)



b)



d)



8. a) -2 b) $\frac{3}{2}$ c) 2 d) $\frac{7}{3}$ e) 7 f) -3

9. a) $S = \{4\}$ c) $S = \{3\}$ e) $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ g) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ i) $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

b) $S = \{3\}$ d) $S = \{3\}$ f) $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ h) $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

10. a) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ b) $S = \left\{\frac{10}{9}\right\}$ c) $S = \left\{-\frac{7}{20}\right\}$ d) $S = \{10\}$ e) $S = \{3\}$ f) $S = \{-8\}$

11. a) $S = \{-1, 0\}$ b) $S = \{2, 6\}$ c) $S = \{-3, 8\}$ d) $S = \{-2, 2\}$

12. a) $S = \{2\}$ b) $S = \{5\}$ c) $S = \{2\}$ d) $S = \{-2\}$

13. a) $S = \{0\}$ b) $S = \{-1\}$ c) $S = \{4\}$ d) $S = \{-1, 0, 1\}$

14. a) $S = \{1\}$ b) $S = \{0, 1\}$

15. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 6\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 4\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$
e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$
f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\}$
g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4 \text{ ou } x > 5\}$
h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 1\}$

16. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{3}{2}\right\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$

17. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -6\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{2}{3}\right\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$

18. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{4}{3}\right\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 2\}$
e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$
f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 11\}$
g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2 \text{ ou } x \geqslant 5\}$
h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$

19. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x < 3\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leqslant 2\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{4}{3} < x < 2\right\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$
e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 2\}$
f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$

20. a) F b) V c) V d) F e) F f) V

21. a, b, d, e, f

22. a) 8 b) $\frac{1}{2}$ c) 0 d) -4

23. a) $x = 2$ ou $x = 3$ b) $x < 2$ ou $x > 3$ c) $2 < x < 3$ d) -2 ou 2

24. a) $S = \{4\}$
b) $S = \left\{\frac{1}{5}\right\}$
c) $S = \{4\}$
d) $S = \{3\}$
e) $S = \{-1\}$
f) $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$
g) $S = \left\{\frac{13}{3}\right\}$
h) $S = \{1, 2\}$
i) $S = \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$
j) $S = \left\{\frac{15}{2}\right\}$
l) $S = \{1, -2\}$
m) $S = \{4\}$
n) $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$
o) $S = \left\{\frac{4}{3}\right\}$

25. a) $S = \{5\}$
b) $S = \{1\}$
c) $S = \{3\}$
d) $S = \{-1\}$
e) $S = \{4\}$
f) $S = \{2\}$
g) $S = \{2\}$
h) $S = \{0, 2\}$

26. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4\}$
d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{5}{3}\right\}$
e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 2\}$
f) $S = \{1\}$
g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$
h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 \leqslant x \leqslant -3\}$
i) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -8 \text{ ou } x \geqslant -2\}$

27. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 2\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} < x < \frac{3}{2}\right\}$
d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < \frac{4}{3}\right\}$

28. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{8} \leqslant x < \frac{2}{3}\right\}$

29. $x = 0$ e $y = -1$ **30.** 64 **31.** $S = \{(-1, 1)\}$ **32.** 10 **33.** $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ **34.** d **35.** e

36. a **37.** a **38.** e **39.** a **40.** a **41.** a **42.** e **43.** e **44.** a **45.** d **46.** c
47. c **48.** e **49.** e **50.** d **51.** b **52.** e **53.** d **54.** a **55.** c

Capítulo 8 – LOGARITMOS

1. a) $x = 5$ b) $x = 2$ c) $x = \frac{1}{2}$ d) $x = 2$

2. -3

3. 4

4. a) $\frac{11}{4}$ b) $\frac{1}{3}$

5. a) 15 b) $\frac{7}{2}$ c) 1

6. a) 64 c) 8 e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ g) $-\frac{1}{2}$ i) 3 ou 9 l) −5 ou 2

b) $\frac{1}{81}$ d) 10 000 f) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ h) 3 j) $\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$ m) 2 ou 6

7. a) $S = \{2, 16\}$ b) $S = \left\{\frac{1}{3}, 27\right\}$ c) $S = \{1, 64\}$ d) $S = \{2, \sqrt[16]{2}\}$

8. a) $S = \{0\}$ b) $S = \left\{-\frac{7}{2}\right\}$ c) $S = \{5\}$ d) $S = \{0\}$ e) $S = \{8\}$ f) $S = \{60\}$

9. a) $S = \{4\}$ c) $S = \{9\}$ e) $S = \{4\}$ g) $S = \{3\}$ i) $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

b) $S = \{\sqrt[4]{5}\}$ d) $S = \{6\}$ f) $S = \{10\}$ h) $S = \{1\}$

10. a) $S = \{2\}$ b) $S = \{5, 8\}$ c) $S = \{10\}$ d) $S = \{7\}$

11. a) 0 b) 1 c) 8 d) 2 e) 4

12. a) 4 b) 2 c) 36 d) $\frac{8}{5}$ e) 9 f) 16 g) 10 h) 6

13. a) $5a^2$ b) 8 c) 3 d) $a + b$

14. a) $S = \{4\}$ b) $S = \varnothing$ c) $S = \{-2, 1\}$ d) $S = \{6\}$

15. a) $S = \{-1, 8\}$ b) $S = \{28\}$

16. a) $\log_3 10 + \log_3 9$ b) $\log_4 \frac{2}{3} + \log_4 5 + \log_4 7$ c) $\log 3 + \log a + \log b$

17. a) $\log_3 40$ b) $\log_4 2$ c) $\log (x^2 - 25)$ d) $\log_5 (x^2 - 2x - 3)$

18. $P = 10$ h **19.** $E = 12x + 6$ **20.** 2 m **21.** $m + n$ **22.** 1 000 **23.** $a = 5$ e $b = 2$

24. a) $S = \{10\}$ b) $S = \{8\}$ c) $S = \left\{5, \frac{11}{3}\right\}$ d) $S = \{8\}$

25. a) $\log_5 8 - \log_5 9$ b) $\log_3 1 - \log_3 4 = -\log_3 4$ c) $\log(a + b) - \log c$

26. a) $\log_3 3 = 1$ b) $\log \frac{5}{2}$ c) $\log_4 \frac{x}{x + 2}$ d) $\log \frac{x - 2}{x + 2}$

27. a) $\log_2 a + \log_2 b - \log_2 c$
b) $\log_5 a - \log_5 b - \log_5 c$
c) $\log 2 + \log b + \log c - \log 3 - \log a$

28. a) $\log_2 \frac{15}{7}$ b) $\log_4 \frac{x^2 - x}{x + 1}$

29. $\frac{10}{3}$ **30.** $S = \frac{4\pi r^3}{3}$ **31.** $-x$

32. $\frac{a}{b} = 16$ **33.** $a = 10$ e $b = 5$ **34.** 1

35. a) $S = \varnothing$ b) $S = \{25\}$ c) $S = \varnothing$ d) $S = \{7\}$

36. a) $S = \left\{-1, -\frac{2}{3}\right\}$ b) $S = \{1\}$ c) $S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$ d) $S = \{-1, 1\}$

37. a) $3 \log_4 2 = \frac{3}{2}$ b) $2 \log_5 7$ c) $-\log_4 3$ d) $\frac{1}{3} \cdot \log_2 5$ e) $2 \log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{4}$

38. a) $\log_5 8$ b) $\log_3 16$ c) $\log \frac{1}{2}$ d) $\log 4$

39. a) $\log N = 2 \log a + 3 \log b - \log c$ c) $\log N = \frac{1}{2} \log 2 + \log a - \log 5 - 3 \log b$

b) $\log N = 1 + 4 \log a - 2 \log b$ d) $\log N = \log 4 + 5 \log b + 2 \log c - \frac{3}{5} \log a$

40. a) $P = 108$ b) $P = \frac{9}{5}$ c) $P = 200$ d) $P = 10$ e) $P = \frac{1}{25}$ f) $P = 4\sqrt{2}$

41. a) $x + y$ b) $x - y$ c) $3x$ d) $2x + 3y$ e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{4 - x}{2}$

42. a) $S = \{4\}$ b) $S = \{3, 5\}$ c) $S = \{2\}$ d) $S = \{15\}$

43. a) 1,079 b) 1,005 c) 0,083 d) 0,699 e) 2,796 f) 4,770

44. a) 0,477 b) 1,380 c) 1,176 d) 1,556 e) 1,903 f) −0,065

45. a) $\frac{\log 7}{\log 5}$ c) $-\frac{\log 25}{\log 2}$ e) $\frac{\frac{1}{2} \cdot \log 3}{\log 6}$

b) $\frac{1}{\log 2}$ d) $\frac{\log 25}{\log 2}$ f) $\frac{\log 8}{\log 2 - 1}$

46. $\frac{1}{a}$

47. a) 0,638 b) 1,567 c) −0,638 d) −0,638

48. $\frac{1}{2}$

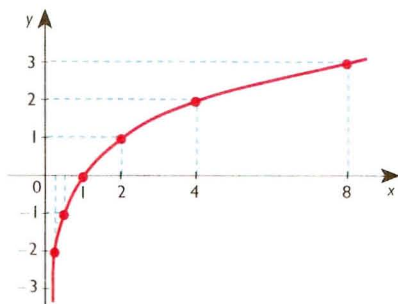
49. $\log_2 7$

50. 1

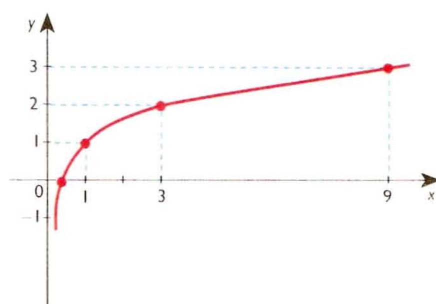
51. 9

52. a) $S = \{15\}$ b) $S = \{5\}$ c) $S = \{4\}$ d) $S = \{6\}$ e) $S = \{2\}$ f) $S = \{3\}$

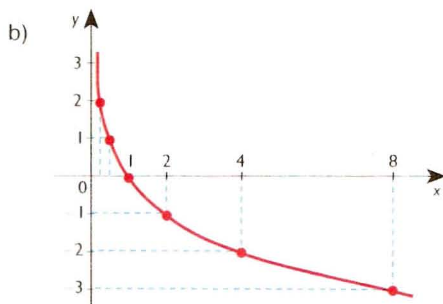
53. a)



c)



b)



54. Crescentes: a, c, e; decrescentes: b, d, f

55. a) $a > 3$ e $a \neq 4$ b) $a < 2$ e $a \neq 1$ c) $-1 < a < 0$ ou $0 < a <$

56. a) 1 024 b) 1 c) 6

57. 4

58. Verdadeiras: a, c, d, f; falsas: b, e, g, h

59. a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -4\}$

b) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{4}{7}\right\}$

c) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{3}\right\}$

d) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{2}{3}\right\}$

e) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{2}{3} \text{ ou } x > 2\right\}$

f) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > 0\}$

g) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}\}$

h) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$

i) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$

j) $D = \mathbb{R}$

60. a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3 \text{ e } x \neq 4\}$

b) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{5}{3} \text{ e } x \neq -\frac{4}{3}\right\}$

c) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 4 \text{ ou } x > 4\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2 \text{ ou } 2 < x < 4\}$

61. a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\sqrt{10} \text{ ou } -\sqrt{10} < x < -3 \text{ ou } x > 5\}$

b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$

62. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 14\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} < x < \frac{65}{3}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{9}{8}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{99}{2} \leqslant x < \frac{1}{2}\right\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 1\}$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{19}{15}\right\}$

63. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leqslant 12\}$

64. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < -3 \text{ ou } 0 < x < 1\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R}^* \mid -4 < x < 4\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leqslant x < 0 \text{ ou } \frac{5}{2} < x \leqslant 3\right\}$

65. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leqslant 3\}$ b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant x < 9\}$

66. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 7\}$ b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 7 < x \leqslant 10 \text{ ou } x \geqslant 19\}$

67. a) 2 b) 1 c) 0 d) -1 e) -2

68. a) 1 000 b) 2,01 c) 16 d) 4 e) $\frac{3}{4}$ f) 2

69. a) 10 b) 128 c) 25 d) 2

70. $S = \{6\}$

71. a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$

b) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2} \text{ e } x \neq 1\right\}$

c) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{3} \text{ ou } x > 2\right\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3 \text{ ou } 4 < x < 6 \text{ e } x \neq 5\}$

72. a) 1,86 b) 0,74 c) 0,7 d) $-0,9$ e) 1,6

73. a) $\frac{2a + 3b}{2}$ b) $1 - b$ c) $2 - 4b$ d) $\frac{1}{a}$ e) $\frac{a}{b}$

74. $\frac{5}{2}$ **75.** $xyz = 8$

76. a) $S = \left\{\frac{127}{15}\right\}$ b) $S = \{-2, 6\}$ c) $S = \{5\}$ d) $S = \{3\}$ e) $S = \{2\}$ f) $S = \left\{\frac{39}{7}\right\}$

77. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3} < x < 6\right\}$ c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -5 \text{ ou } x \geqslant 1\}$ e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 7\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{11}{6}\right\}$ d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 13\}$ f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 8 < x \leqslant 10\}$

78. 27 **79.** $S = \{(1, 3), (3, 1)\}$ **80.** $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

81. a) $a \leqslant 1$ b) $a = 1$ e $x = 2$

82. $x = 10$ ou $x = 100$

83. 4

84. 180

85. $x = a^{\sqrt{z}}$

86. $S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

87. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 \leqslant x \leqslant 12\}$ b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 4 \text{ ou } x > 12\}$

88. c **89.** c **90.** c **91.** e **92.** b **93.** d **94.** e **95.** e **96.** e **97.** e **98.** c
99. d **100.** c **101.** e **102.** e **103.** c **104.** e **105.** e **106.** b **107.** c **108.** a **109.** a

Capítulo 9 – CÁLCULO E APLICAÇÕES DOS LOGARITMOS DECIMAIS

1. a) 2,456 37 b) 3,561 697 c) 2,024 321 d) −0,061 981 e) −1,545 16
2. a) 5,655 99 b) 8,201 11 c) 4,661 17 d) −0,142 72
3. a) 879 b) 65,8 c) 9,290 9 d) 0,876
4. a) 1 846 b) 38,4 c) 17 d) 1 000
5. a) 3 b) −2 c) 6 d) −4
6. a) 1 b) −2 c) 2 d) 3 e) −1
7. a, d, e
8. a) 0,544 068 b) 2,544 068 c) 3,544 068 d) −0,455 932
9. a) 2,878 522 b) 1,892 095 c) 0,954 243
10. a) 804 b) 85 c) 7
11. a) 7 b) 29
12. 2
13. a) 1,767 14 b) 0,949 127 7 c) 3,079 181 d) 1,404 07
14. a) 3,361 936 b) 3,287 505 c) 2,708 293
15. a) $\simeq$ 3,9 b) $\simeq$ 184,3 c) $\simeq$ 48,9
16. a) log 0,536 = −0,270 835 ou log 0,536 = $\bar{1}$,729 165 caract −1 e mantissa 0,729 165
b) log 0,036 = −1,443 697 ou log 0,036 = $\bar{2}$,556 303 caract −2 e mantissa 0,556 303
c) log 0,001 25 = −2,903 09 ou log 0,001 25 = $\bar{3}$,096 91 caract −3 e mantissa 0,096 91
17. a) $\simeq$ 0,365 b) $\simeq$ 0,004 2
18. a) 3,695 97 b) 6,862 39 c) 2,736 88
19. $\simeq$ 64,77 dB **20.** $\simeq$ 123 dB
21. a) $\simeq$ 586 755 b) $\simeq$ 463 095 c) $\simeq$ 35 anos
22. a) $\simeq$ 989 233 b) $\simeq$ 1 630 969 c) 44 anos
23. a) $\simeq$ 0,028 8 b) $\simeq$ 6 163
24. a) R$ 89.110,32 b) 6 anos (arredondado para cima)
25. a) $\simeq$ 535 gramas b) $\simeq$ 440 gramas
26. 0,415 4 **27.** 1 177 **28.** 5,632 2 **29.** a) $\simeq$ 5 b) 2,421 1
30. a) 3 b) 2 c) 3 d) 3
31. Entre 10^0 e 10^1
32. a) $\simeq$ 830 540 b) $\simeq$ 500 000 c) $\simeq$ 23 anos e meio
33. a) 0,05 b) $\simeq$ 4 370 c) 23 anos
34. d **35.** a **36.** d **37.** a **38.** a **39.** b **40.** d **41.** e **42.** d **43.** c

1. a) 75 b) R$ 720,00 c) 1,5 d) 5,4 e) 18 f) 4,5%
2. a) 42% b) 1% c) 25%
3. a) R$ 2.880,00 b) R$ 15.120,00
4. R$ 132,00
5. 10,5%
6. a) na loja B b) R$ 175,00
7. Mesma coisa.
8. 25%
9. a) 240 b) 25 c) 5,76 d) 25 e) 30 f) 0,675
10. a) 200 000 b) 800 000
11. R$ 74,00 e foi pago R$ 55,50
12. R$ 27,00
13. R$ 150,00
14. 6%
15. a) R$ 61.560,00 b) 8%
16. a) As faltas de Antônio correspondem a 5% b) 30% foi o aumento para Pedro
17. Ficam menores em 1%
18. R$ 20,00
19. R$ 645 000,00
20. $\simeq$ 0,250 63%
21. Aproximadamente 315,24%
22. a) 24% b) 25%
23. 100 litros
24. a) 360 b) 270 c) 120
25. de 4%
26. a) R$ 14.400,00 b) R$ 4.680,00 c) R$ 11.520,00 d) R$ 11.880,00 e) R$ 7.200,00 f) R$ 3.240,00
27. a) 10% ao mês b) 15% ao mês c) 15% ao mês d) 1% ao dia
28. a) R$ 9.280,00 b) R$ 7.398,40 c) R$ 6.656,00
29. a) 4 meses b) 9 dias c) 20 meses d) 5 meses
30. a) R$ 36.000,00 b) R$ 80.000,00 c) R$ 72.000,00
31. 12,5% ao mês
32. 10 meses
33. a) R$ 69.984,00 b) R$ 78.647,76 c) R$ 60.360,72 d) R$ 79.860,00
34. a) R$ 12.000,00 b) R$ 200.000,00 c) R$ 30.000,00 d) R$ 120.000,00
35. a) 4 meses b) 3 dias
36. a) 2 meses b) 2 dias
37. a) 10% a.m. b) 9% a.m. c) 7% a.m. d) 0,4% ao dia
38. a) 0,96 b) 14 400 c) 576
39. R$ 33.800,00
40. 25%
41. 33,1%
42. 33,4%
43. b, d, e
44. *a* é melhor
45. 20% ao mês
46. 35,01%
47. a) isento b) R$ 38,58 c) R$ 157,06 d) R$ 759,42
48. No mínimo R$ 150.375,94
49. 50 litros
50. R$ 6.000,00
51. a) Melhor antecipado com desconto b) a partir de 47,06% ao mês
52. e **53.** c **54.** d **55.** b **56.** d **57.** a **58.** a **59.** e **60.** b **61.** d **62.** d
63. a **64.** b **65.** d

1. a) $x = 20$, $y \simeq 21{,}33$ e $z \simeq 26{,}66$
b) $x \simeq 19{,}2$, $y \simeq 10{,}8$ e $z \simeq 14{,}4$
c) $x \simeq 2{,}65$, $y \simeq 2{,}34$ e $z \simeq 3{,}54$
d) $x \simeq 16{,}43$, $y \simeq 22{,}25$ e $z \simeq 24{,}37$
e) $x = 15$, $y \simeq 26{,}67$ e $z \simeq 33{,}34$
f) 4

2. a) $\dfrac{L\sqrt{2}}{2}$ b) $2\sqrt{2}\,L$

3. $\dfrac{L\sqrt{3}}{2}$

4. $\dfrac{2\sqrt{3}\,h}{3}$

5. 9, 12, 15

6. 72 m

7. a) $\text{sen } A = \dfrac{3}{5}$, $\cos A = \dfrac{4}{5}$, $\text{tg } A = \dfrac{3}{4}$, $\text{sen } C = \dfrac{4}{5}$, $\cos C = \dfrac{3}{5}$, $\text{tg } C = \dfrac{4}{3}$

b) $\text{sen } B = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos B = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\text{tg } B = 1$, $\text{sen } C = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos C = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\text{tg } C = 1$

c) $\text{sen } A = 0{,}6$, $\cos A = 0{,}8$, $\text{tg } A = 0{,}75$, $\text{sen } B = 0{,}8$, $\cos B = 0{,}6$, $\text{tg } B \simeq 1{,}33$

8. a) $\text{sen } B = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos B = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $\text{tg } B = 2$ b) $\text{sen } C = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos C = \dfrac{1}{2}$, $\text{tg } C = \sqrt{3}$

9. $\dfrac{3}{5}$

10. 22 cm e 16,5 cm

11. $(30 + 15\sqrt{2})$ cm

12. a) $\dfrac{3}{8}$ b) 0,283 1 c) 0,5

13. a) 0,529 9 b) 0,961 3 c) 0,325 6 d) 0,948 3 e) 0,723 6 f) 0,192 8

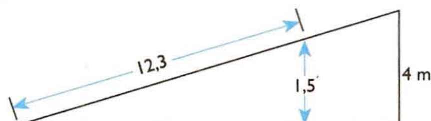
14. a) $\cos \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{sen } \beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \beta = \dfrac{1}{2}$, $\text{tg } \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\text{tg } \beta = \sqrt{3}$

b) $\text{sen } \alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\text{sen } \beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\text{tg } \alpha = 1$, $\text{tg } \beta = 1$

c) $\text{sen } \alpha = \dfrac{4}{5}$, $\cos \alpha = \dfrac{3}{5}$, $\text{tg } \alpha = \dfrac{4}{3}$

15. 240 m e aprox. 207,8 m
16. aprox. 141,96 m
17. 30 cm
18. 50 m e aprox. 43,3 m
19. 1 000 m
20. aprox. 433 m
21. a) $\simeq 0{,}544\,6$ b) $\simeq 0{,}933\,6$ c) $\simeq 0{,}324\,9$
22. a) $\simeq 0{,}906\,3$ b) $\simeq 0{,}309\,0$ c) $\simeq 1{,}072\,4$
23. a) $\simeq 36°$ b) $\simeq 68°$ c) $\simeq 55°$
24. a) $\simeq 0{,}629\,3$ b) $\simeq 0{,}961\,3$ c) $\simeq 0{,}554\,3$
25. a) $\simeq 0{,}743\,1$ b) $\simeq 0{,}087\,2$ c) $\simeq 1{,}072\,4$
26. a) $\simeq 0{,}389\,4$ b) $\simeq 0{,}118\,0$
27. a) $\simeq 0{,}580\,7$ b) $\simeq 0{,}871\,7$
28. a) $\simeq 0{,}737\,3$ b) $\simeq 0{,}863\,1$
29. a) $\simeq 0{,}476\,9$ b) $\simeq 1{,}163\,1$
30. a) $\simeq 96$ m b) $\simeq 179$ m
31. a) $\alpha = 75°$, $x \simeq 104$ cm e $y = 104$ cm b) $\alpha = 45°$, $x \simeq 183$ cm e $y = 205$ cm

32. a) $x \simeq 17{,}34$ cm b) $x \simeq 44°$
33. $\simeq 21{,}65$ m
34. $\simeq 56{,}8$ m
35. $\dfrac{a \cdot c}{\sqrt{a^2 + c^2}}$
36. a) o menor mede 15,3 cm e o maior, 20,4 cm b) $\dfrac{4}{5}$
37. a) 3,4 b) $\dfrac{25}{12}$
38. a) $\simeq 26$ m b) $\simeq 52$ m
39. a) $x = 20$ cm, $z = 20$ cm e $y \simeq 14{,}64$ cm
40. a) $\simeq 53{,}6$ m b) $\simeq 22{,}11$ m
41. a) $\simeq 187$ m b) $\simeq 194$ m
42. $\simeq 22{,}78$ m
43. a) $\simeq 1{,}43$ m b) $\simeq 1{,}68$ m
44. 5,40 m
45. $\simeq 67°$
46. $x \simeq 92$ m, $y \simeq 58$ m e $\alpha = 80°$
47. $a \simeq 95$ m, $\beta \simeq 55°$ e $\delta = 65°$
48. a) rumo 15 b) pouco mais de uma hora e meia
49. uma mede b, outra mede c, e outra mede $c \cdot \text{sen } B$ ou $b \cdot \text{sen } C$
50. a) $h = d \cdot \text{sen } \alpha$ b) $d = 2$ m
51. a) b) 20,5 m



52. b **53.** c **54.** b **55.** d **56.** a **57.** e **58.** a **59.** d **60.** e **61.** d **62.** b
63. e **64.** b **65.** c

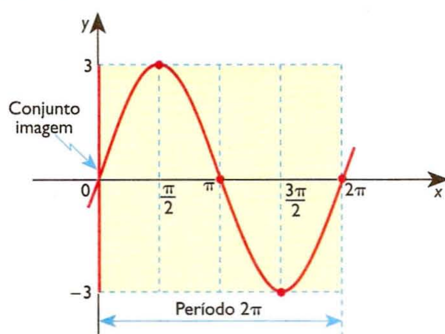
Capítulo 12 – TRIGONOMETRIA – ARCOS E ÂNGULOS

1. a) 120° b) 12°30′ c) 67°30′
2. a) 120° b) 183°
3. a) 20° b) 52°30′ c) 45°
4. 4h 20min
5. a) $\dfrac{\pi}{3}$ rad b) $\dfrac{\pi}{6}$ rad c) $\dfrac{\pi}{4}$ rad d) $\dfrac{2\pi}{3}$ rad
6. a) 120° b) 135° c) 210° d) 12°
7. a) aprox. 0,017 45 rad b) aprox. 57°
8. a) aprox. 4,19 cm b) aprox. 43° c) aprox. 115 cm
9. a) 12 560 m b) 3 750 voltas
10. a) 54° b) 120° c) $\dfrac{\pi}{8}$ rad d) $\dfrac{3\pi}{4}$ rad
11. a) $-296°$ b) $-(179°36')$ c) $-\dfrac{\pi}{3}$ rad d) $-\dfrac{\pi}{2}$ rad
12. a) 1ª determinação positiva é 260° e 1ª determinação negativa é $-100°$
b) 1ª determinação positiva é 280° e 1ª determinação negativa é $-80°$
c) 1ª determinação positiva é $\dfrac{13\pi}{8}$ rad e 1ª determinação negativa é $-\dfrac{3\pi}{8}$ rad
d) 1ª determinação positiva é $\dfrac{3\pi}{4}$ rad e 1ª determinação negativa é $-\dfrac{5\pi}{4}$ rad
13. a) $-\dfrac{13\pi}{8}$ rad b) $\dfrac{7\pi}{6}$ rad

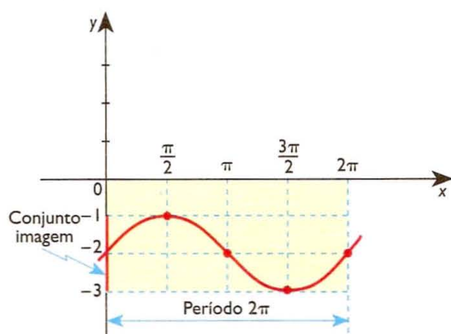
14. a) $-215°$ b) $120°$
15. 350 voltas
16. 5h 30min
17. a) 122 b) 695
18. 5,03 cm
19. $\simeq 229{,}3$ cm
20. a 21. e 22. d 23. a 24. c

Capítulo 13 – FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

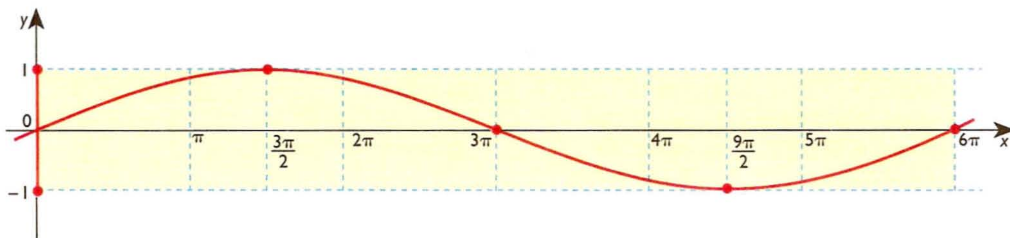
1. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) $\frac{5}{4}$
2. a, b, d, e
3. a) $D(f) = \mathbb{R}$
$Im(f) = [-3, 3]$
período $= 2\pi$ rad



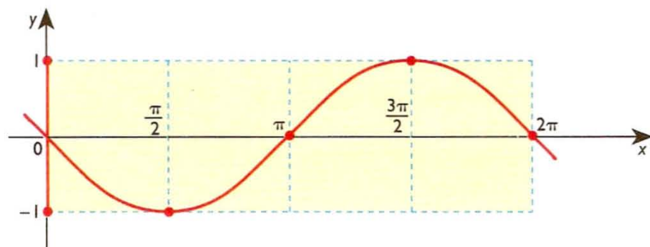
b) $D(f) = \mathbb{R}$
$Im(f) = [-3, -1]$
período $= 2\pi$ rad



4. a) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [-1, 1]$ b) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [-1, 1]$ c) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [-1, 1]$
5. a) $\frac{2\pi}{7}$ rad b) 10π rad c) $\frac{4\pi}{3}$ rad
6. a)



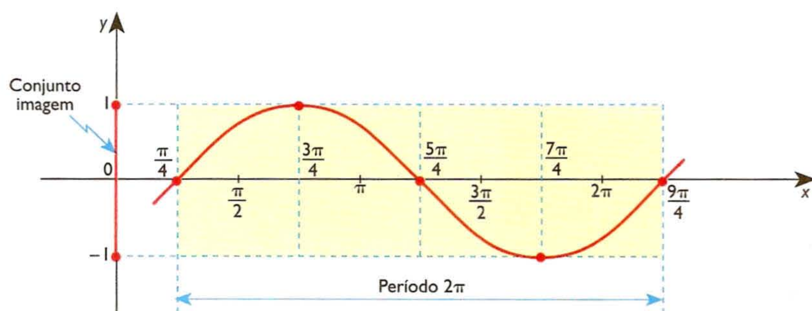
b)



7. a) $\pm \frac{6}{5}$ b) ± 12

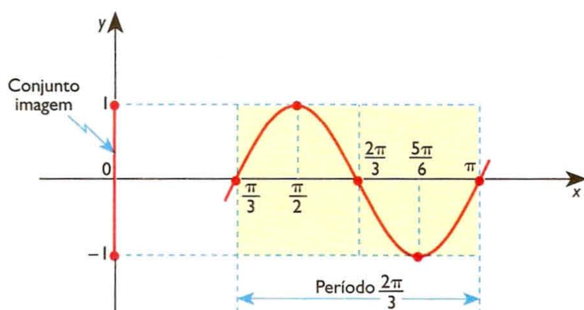
8. a) 2π rad b) $\frac{16\pi}{3}$ rad c) $\frac{4\pi}{3}$ rad

9. a)



$\text{Im}(f) = [-1, 1]$, período $= 2\pi$ rad

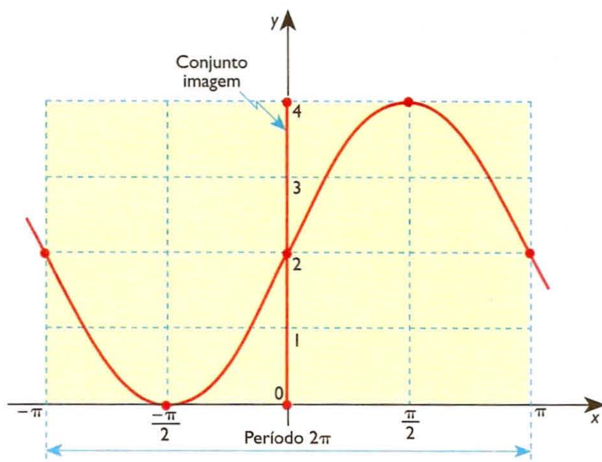
b)



$\text{Im}(f) = [-1, 1]$

período $= \frac{2\pi}{3}$ rad

c)



$\text{Im}(f) = [0, 4]$
período $= 2\pi$ rad

10. a) $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{3}{2}$ b) $a = -\frac{7}{2}$, $b = \frac{5}{2}$ e $c = \pm 3$

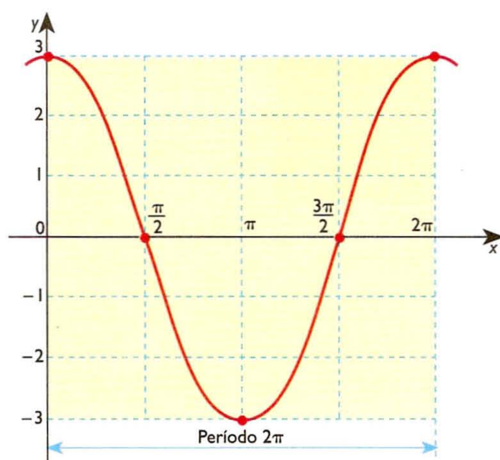
11. a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $-\frac{1}{4}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{4}$ f) $-\frac{1}{2}$

12. a) $\frac{2}{5}$ b) $-\frac{2}{5}$ c) $-\frac{1}{5}$ d) $\frac{1}{5}$

13. a) $\frac{12}{5}$ b) $-\frac{1}{5}$

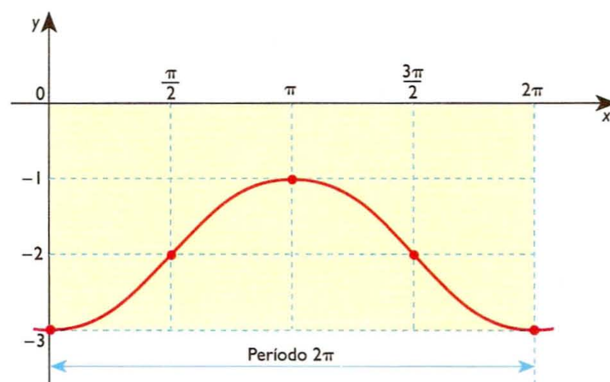
14. *c*, *f*

15. a)



D(f) = $\mathbb{R}$
Im(f) = [−3, 3]
período = 2π rad

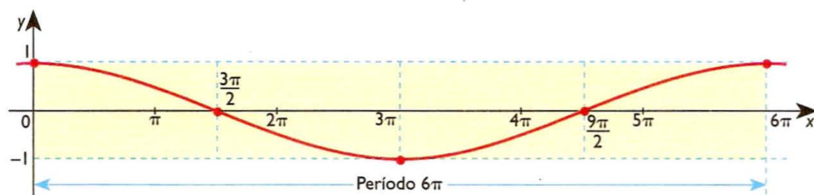
b)



D(f) = $\mathbb{R}$
Im(f) = [−3, −1]
período = 2π rad

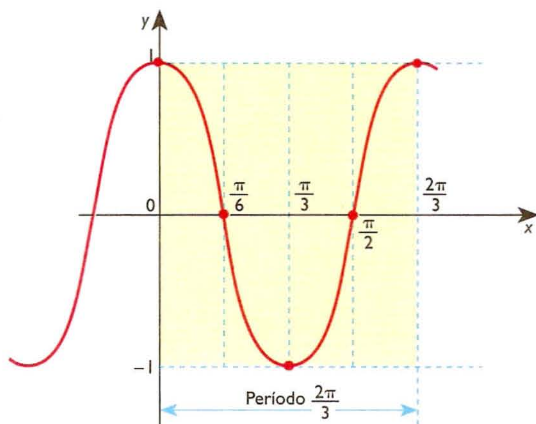
16. a) $\frac{\pi}{4}$ rad b) $\frac{2\pi}{5}$ rad c) $\frac{6\pi}{5}$ rad d) 8π rad

17. a)



Im(f) = [−1, 1]
período = 6π rad

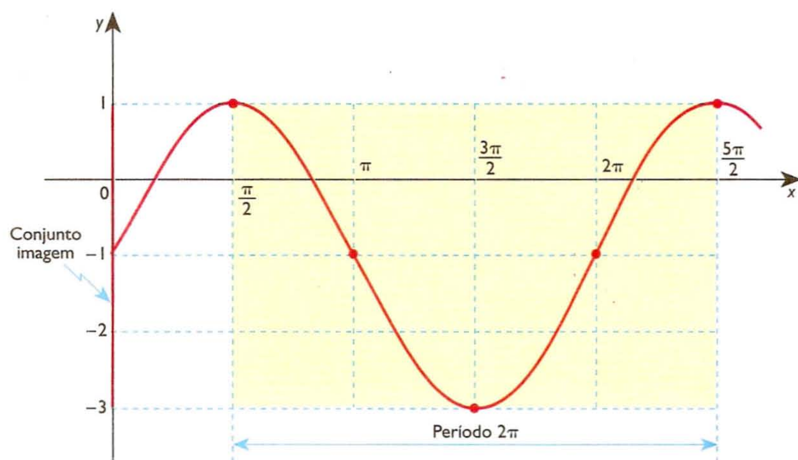
b) (lembre que cos $(-3x) = \cos(3x)$)



$\text{Im}(f) = [-1, 1]$

período $= \dfrac{2\pi}{3}$ rad

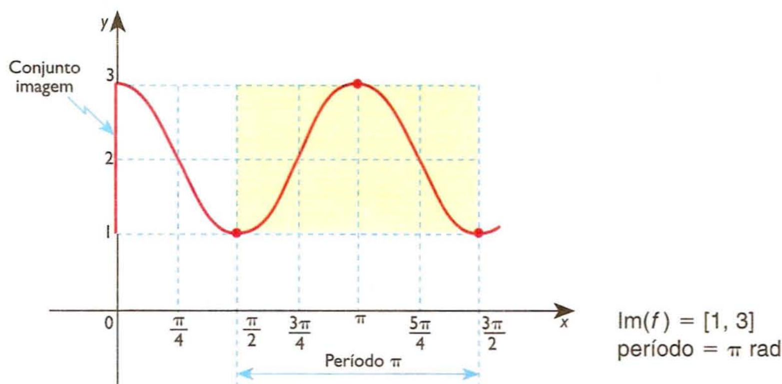
18. a)



$\text{Im}(f) = [-3, 1]$

período $= 2\pi$ rad

b)



$\text{Im}(f) = [1, 3]$

período $= \pi$ rad

19. a) $\left\{p \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{8}{7} \leqslant p \leqslant \dfrac{2}{7}\right\}$

b) $\left\{p \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{1}{3} \leqslant p \leqslant \dfrac{11}{9}\right\}$

c) $\{p \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant p \leqslant 4 \text{ ou } 6 \leqslant p \leqslant 10\}$

d) $\{p \in \mathbb{R} \mid -7 \leqslant p \leqslant -6 \text{ ou } -1 \leqslant p \leqslant 0\}$

20. a) $\left\{k \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{4} \leqslant k \leqslant \frac{11}{6}\right\}$ b) $\{k \in \mathbb{R} \mid k \leqslant 3\}$

21. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $-\frac{2}{5}$ d) $-0,5$

22. $\frac{29}{6}$

23. a) π rad b) 2π rad c) $\frac{3\pi}{2}$ rad d) 2π rad

24. a) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3\pi}{10} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ c) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{-3\pi}{2} - k3\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ d) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3\pi}{20} + k \cdot \frac{3\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

25. a) $m = \pm 1$ b) $m = \pm 4$ c) $m = \pm \frac{3}{2}$

26. a) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{4\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ e período $= \frac{2\pi}{3}$ rad

b) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{-5\pi}{4} - k5\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ e período $= 5\pi$ rad

27. a) 1º ou 3º quadrantes b) 2º ou 3º quadrantes c) 3º ou 4º quadrantes

28. a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $-\frac{5}{4}$ e) $-\frac{1}{5}$ g) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ i) $-\frac{1}{10}$

b) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{3}{2}$ f) $\frac{-3\sqrt{5}}{5}$ h) $\frac{-8\sqrt{7}}{7}$

29. a, b, e, f

30. a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

31. a) $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{7}}{4}$ e $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{7}}{3}$ d) $\frac{\sqrt{26}}{5}$

b) $\frac{3}{14}$ e) $\cos x = \frac{-3\sqrt{14}}{14}$ e $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{70}}{14}$

c) $\sqrt{63}$ f) $-\frac{\sqrt{41}}{41}$

32. a) $m = -\frac{4}{3}$, com x do 3º quadrante, ou $m = 1$, com x do 1º quadrante

b) $m = 1$, com x do 1º quadrante, ou $m = -1$, com x do 3º quadrante

c) $m = \frac{1}{2}$, com x do 4º quadrante, ou $m = -\frac{1}{2}$, com x do 2º quadrante

33. demonstração

34. a) $\operatorname{sen} 150° = \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 150° = -\operatorname{tg} 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \frac{3\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -1$

c) $\operatorname{sen} 1\,200° = \operatorname{sen} 120° = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 1\,200° = \cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$,

$\operatorname{tg} 1\,200° = \operatorname{tg} 120° = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3}$

d) $\text{sen}\ \frac{17\pi}{6} = \text{sen}\ \frac{5\pi}{6} = \text{sen}\ \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos\ \frac{17\pi}{6} = \cos\ \frac{5\pi}{6} = -\cos\ \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\text{tg}\ \frac{17\pi}{6} = \text{tg}\ \frac{5\pi}{6} = -\text{tg}\ \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

35. a) $\text{cotg}\ 120° = -\ \text{cotg}\ 60° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sec 120° = -\ \sec 60° = -2$, $\text{cossec}\ 120° = \text{cossec}\ 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

b) $\text{cotg}\ \frac{4\pi}{5} = -\ \text{cotg}\ \frac{\pi}{5}$, $\sec\ \frac{4\pi}{5} = -\ \sec\ \frac{\pi}{5}$, $\text{cossec}\ \frac{4\pi}{5} = \text{cossec}\ \frac{\pi}{5}$

c) $\text{cotg}\ (-240°) = \text{cotg}\ 120° = -\text{cotg}\ 60° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sec\ (-240°) = \sec 120° = -\sec 60° = -2$,

$\text{cossec}\ (-240°) = \text{cossec}\ 120° = \text{cossec}\ 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

36. a) $N = 1$ b) $N = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

37. a) $\text{sen}\ 240° = -\text{sen}\ 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 240° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$, $\text{tg}\ 240° = \text{tg}\ 60° = \sqrt{3}$

b) $\text{sen}\ \frac{8\pi}{7} = -\text{sen}\ \frac{\pi}{7}$, $\cos\ \frac{8\pi}{7} = -\cos\ \frac{\pi}{7}$, $\text{tg}\ \frac{8\pi}{7} = \text{tg}\ \frac{\pi}{7}$

c) $\text{sen}\ (-150°) = \text{sen}\ 210° = -\text{sen}\ 30° = -\frac{1}{2}$, $\cos\ (-150°) = \cos 210° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\text{tg}\ (-150°) = \text{tg}\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\text{sen}\ (560°10') = \text{sen}\ (200°10') = -\text{sen}\ (20°10')$, $\cos\ (560°10') = \cos\ (200°10') =$
$= -\cos\ (20°10')$, $\text{tg}\ (560°10') = \text{tg}\ (200°10') = \text{tg}\ (20°10')$

38. 2

39. a) $\text{sen}\ 690° = \text{sen}\ 330° = -\text{sen}\ 30° = -\frac{1}{2}$, $\cos 690° = \cos 330° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\text{sen}\ \frac{15\pi}{4} = -\text{sen}\ \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\ \frac{15\pi}{4} = \cos\ \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\text{sen}\ (-60°) = -\text{sen}\ 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos\ (-60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$

d) $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$, e $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

40. a) $N = -\sqrt{2} + \frac{3}{2}$ b) $N = \sqrt{2} - 2$ c) $1 + 2\sqrt{3}$ d) $\frac{3 + \sqrt{2}}{2}$

41. a) $\text{sen}\ x - \cos x$ b) $\frac{(-\cos x - 2\ \text{sen}\ x)}{(5\ \text{sen}\ x)}$ c) $\cos x - \text{sen}\ x + \text{tg}\ x + \text{cotg}\ x$ d) -1

42. a) 0,682 0 b) −0,454 0 c) −0,624 8 d) −1,345 6 e) −0,939 7 f) 0,286 7 g) −1,345 6 h) −0,342 0

43. a) −5,021 4 b) 37,846

44. a) $\alpha = 105°$, $x \simeq 36{,}60$ cm, $y \simeq 25{,}88$ cm b) 200,76 m c) $\alpha = 30°$, $\beta = 30°$, $x = y = 37{,}53$ m

45. a) $\frac{\pi}{4}$ rad b) $-\frac{\pi}{6}$ rad c) 40° d) $-\frac{\pi}{3}$ rad

46. a) 1,2 b) $\frac{3}{2}$

47. a) 1,1 b) $\frac{3\sqrt{55}}{55}$

48. a) $\frac{\pi}{6}$ rad b) π rad c) π rad d) $\frac{\pi}{2}$ rad

49. a) 14° b) $\frac{6 + 5\sqrt{3}}{10}$ c) $\frac{4}{3}$

50. a) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{10}{3} \leq x \leq 4\right\}$ c) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq \frac{-7}{2}\right\}$

b) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\right\}$

51. a) $y = -\frac{\pi}{4}$ rad b) $y = -\frac{\pi}{6}$ rad c) $\frac{4\sqrt{5} + \sqrt{10}}{10}$ d) $4 - \frac{\pi}{4}$

52. b, d 53. a) $2 + \sqrt{3}$ b) $-\sqrt{2}$ c) 4 54. $\frac{5}{3}$ 55. $\text{sen}^2\, x$

56. $-\frac{7}{5}$ 57. a, d, e 58. 12 59. $x = 3$ ou $x = -1$ 60. 5

61. $\cos t \cdot \text{cotg}\, t$ 62. a) $\frac{4}{3}$ b) $a = 4$ e $b = 1$ c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{8} + k\frac{3\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

63. demonstração 64. $A = 4\ \text{sen}\, x - 2\ \text{sen}\, x \cdot \cos x$ 65. $-2\ \text{sen}\, x$

66. b 67. a 68. c 69. a 70. a 71. c 72. a 73. e 74. a 75. b 76. e

77. a 78. a 79. c 80. b 81. e 82. a 83. d 84. c 85. e

Capítulo 14 – FÓRMULAS DE TRANSFORMAÇÃO

1. a) $\frac{3\sqrt{3} - \sqrt{7}}{8}$ b) $\frac{3 - \sqrt{21}}{8}$ c) -1 d) $\frac{3\sqrt{7}}{8}$ e) 1 f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. a) 3º quadrante b) 2º quadrante

3. a) 1 b) 1 c) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ d) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

4. a) $\text{sen}\,(a + b) = 0$ e $\cos\,(a + b) = 1$

b) $\cos\,(a - b) = \frac{-3 - 4\sqrt{3}}{10}$ e $\text{sen}\,(a - b) = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{10}$

5. a) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ c) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ d) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}}$

6. $\frac{\sqrt{24} - 1}{\sqrt{8} + \sqrt{3}}$ 7. a) $-\frac{23}{2}$ b) $-\frac{7}{22}$ c) 0,2 d) -9

8. a) $2 - \sqrt{3}$ b) $2 - \sqrt{3}$ 9. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}}$

10. a) $\text{tg}\,(x + y) = -1$ e $\text{tg}\,(x - y) = \frac{1}{7}$ c) $\text{tg}\,(x + y) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{6}}$ e $\text{tg}\,(x - y) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{6}}$

b) $\text{tg}\,(x + y) = \frac{9}{19}$ e $\text{tg}\,(x - y) = -\frac{1}{21}$

11. a) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{7}{25}$ c) $-\frac{117}{125}$ d) 1 e) $-\frac{12}{5}$

12. a) $\frac{4\sqrt{21}}{25}$ b) $\frac{7}{8}$ c) $-\frac{5}{12}$ d) $\frac{24}{7}$

13. a) 1º quadrante b) 4º quadrante

14. a) período = π rad e Im(f) = [−5, 5]

b) período = π rad e Im(f) = [−1, 1]

c) período = $\frac{\pi}{2}$ rad e Im(f) = $\mathbb{R}$

d) período = 4π rad e Im(f) = [−1, 1]

15. a) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ b) $\frac{\sqrt{15}}{5}$ c) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $-\frac{1}{2}$ f) $-\sqrt{3}$

16. a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

17. a) $\text{sen}\ \frac{a}{2} = \text{sen}\ 15° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ e $\cos\ \frac{a}{2} = \cos\ 15° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

b) $\text{sen}\ \frac{a}{2} = \text{sen}\ 22°30' = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ e $\cos\ \frac{a}{2} = \cos\ 22°30' = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

c) $\text{sen}\ \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ e $\cos\ \frac{a}{2} = \frac{-\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

18. $\cos\ \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{13+2\sqrt{13}}{26}}$

19. a) $\frac{4}{5}$ b) $-\frac{3}{5}$ c) $-\frac{4}{3}$ d) $-\frac{3}{4}$

20. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$

21. a) $y = 2\ \text{sen}\ 7x \cos 3x$

b) $y = 2 \cos 4x \cos 3x$

c) $y = 2\ \text{sen}\left(\frac{3x}{2}\right) \cos\left(\frac{7x}{2}\right)$

d) $y = 2\ \text{sen}\left(\frac{3x}{4}\right) \text{sen}\left(\frac{x}{4}\right)$

22. a) $N = 2\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)$

b) $N = 2\ \text{sen}^2\ x$

c) $N = 2\ \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ ou $N = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$

d) $N = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

23. a) $y = 2\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$

b) $y = 2\ \text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

c) $y = 4 \cos (2x)\ \text{sen}\ (7x) \cos x$

d) $y = 4 \cos x\ \text{sen}\ (4x)\ \text{sen}\ (2x)$

24. a) $N = \cos 12x + \cos 4x$ b) $N = \cos 6x - \cos 2x$ c) $N = \text{sen}\ 10x - \text{sen}\ 6x$

25. $-\frac{24}{7}$

26. Valor máximo = 2,5 e valor mínimo = −2,5

27. $-\sqrt{3}$

28. 0

29. a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{2}$

30. a) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ b) $S = 3(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ unid. de área

31. 5 **32.** 7 **33.** $\frac{63}{16}$ **34.** 1 **35.** e **36.** a **37.** a **38.** a **39.** c **40.** c

41. a **42.** b **43.** a **44.** d **45.** c **46.** c **47.** a **48.** b **49.** b **50.** c **51.** d
52. b **53.** a **54.** d **55.** d **56.** b

1. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, resposta equivalente a:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k2\pi \text{ ou } x = \pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

2. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{24} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{12} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{48} + k \cdot \frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

f) $S = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

3. 60° ou 120°

4. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{3\pi}{20} + k \cdot \frac{2\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{2\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}\right\}$

e) $S = \left\{\frac{\pi}{3}\right\}$

5. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{\frac{3\pi}{20}, \frac{7\pi}{20}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{11\pi}{30} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = -\frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = -\frac{\pi}{8} - k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, mesma que: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = -\frac{\pi}{8} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

6. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k \cdot \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = -\frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{20} + k \cdot \frac{2\pi}{5} \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{10} + k \cdot \frac{\pi}{5} \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \frac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

7. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} + k2\pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5\pi}{4} + k2\pi \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid k \cdot \frac{2\pi}{5} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{5} + k \cdot \frac{2\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid k2\pi \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6} + k2\pi \text{ ou } \frac{11\pi}{6} + k2\pi \leqslant x < 2\pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

8. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid k \cdot \frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{18} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{18} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{18} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \text{ ou}\right.$

$\left.\frac{11\pi}{18} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \leqslant x < \frac{2\pi}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{24} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{24} \text{ ou } \frac{7\pi}{24} \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{24}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{15} + k \cdot \frac{2\pi}{5} < x < \frac{2\pi}{15} + k \cdot \frac{2\pi}{5} \text{ ou}\right.$

$\left.\frac{4\pi}{15} + k \cdot \frac{2\pi}{5} < x < \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

9. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid k2\pi \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } \frac{4\pi}{3} + k2\pi \leqslant x < 2\pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + k2\pi < x < \frac{11\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid k \cdot \frac{2\pi}{5} < x < \frac{\pi}{15} + k \cdot \frac{2\pi}{5} \text{ ou } \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{5} < x < \frac{2\pi}{5} + k \cdot \frac{2\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

10. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + k2\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + k2\pi \text{ ou } \frac{7\pi}{6} + k2\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid k2\pi \leq x < \frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ ou } \frac{2\pi}{3} + k2\pi < x < \frac{4\pi}{3} + k2\pi \text{ ou }\right.$

$\left.\frac{5\pi}{3} + k2\pi < x < 2\pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + k2\pi < x < \frac{2\pi}{3} + k2\pi \text{ ou } \frac{4\pi}{3} + k2\pi < x < \frac{3\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid k2\pi < x < \frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ ou } \frac{5\pi}{3} + k2\pi < x < 2\pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

11. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid k \cdot \frac{2\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \text{ ou }\right.$

$\left.\frac{\pi}{2} + k \cdot \frac{2\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid k2\pi < x \leq \frac{\pi}{4} + k2\pi \text{ ou } \pi + k2\pi < x \leq \frac{5\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3\pi}{4} + k6\pi < x < \frac{3\pi}{2} + k6\pi \text{ ou } \frac{15\pi}{4} + k6\pi < x < \frac{9\pi}{2} + k6\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid k \cdot \frac{2\pi}{5} \leq x \leq \frac{\pi}{30} + k \cdot \frac{2\pi}{5} \text{ ou } \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2\pi}{5} \leq x \leq \frac{7\pi}{30} + k \cdot \frac{2\pi}{5} \text{ ou }\right.$

$\left.\frac{11\pi}{30} + k \cdot \frac{2\pi}{5} \leq x \leq \frac{2\pi}{5} + k \cdot \frac{2\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid k2\pi < x < \frac{\pi}{4} + k2\pi \text{ ou } \pi + k2\pi < x < \frac{5\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

12. $\frac{13\pi}{20}$ ou $\frac{17\pi}{20}$

13. $\frac{\pi}{16}, \frac{5\pi}{16}, \frac{9\pi}{16}, \frac{13\pi}{16}$

14. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k2\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = k2\pi + \frac{5\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

15. $0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$

16. $-\frac{\pi}{12}$ e $\frac{\pi}{4}$

17. $30° \leq x \leq 150°$

18. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + k2\pi < x < \pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + k2\pi < x \leq \frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

19. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \text{ ou } x = k\pi + \frac{11\pi}{12},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

20. c **21.** e **22.** d **23.** d **24.** a **25.** b **26.** d **27.** c **28.** c **29.** e **30.** e
31. c **32.** b **33.** d **34.** c **35.** b